Musterlösung zu Aufgabe 4, Blatt 5

Aufgabe 4
Sei $\mathcal{F}[\mathbb{N}_0, \mathbb{C}]$ der Vektorraum aller Abbildungen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ und seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $p(x) := x^2 - ax - b \in \mathbb{C}[x]$. Sei

$$U := \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}) \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n\right\}.$$

(a) Zeige, dass U ein Untervektorraum von $\mathcal{F}[\mathbb{N}_0, \mathbb{C}]$ ist.

(b) Finde eine Basis von U für den Fall $a = b = 0$.

(c) Hat $p(x)$ zwei verschiedene Nullstellen $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$, so bilden die Folgen $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Basis von U.

(d) Hat $p(x)$ die zweifache Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$, gilt also $a^2 + 4b = 0$, und ist $b \neq 0$, so bilden die Folgen $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Basis von U.

Lösung.
a) U ist nicht leer, da $0 \in U$. Wir prüfen, ob U abgeschlossen bzgl. der Addition und der Multiplikation mit Skalaren ist. Seien also $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0},\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.
(U1)

$$\begin{aligned} u_{n+2} + v_{n+2} &\overset{\text{nach Vorauss.}}{=} a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n + a \cdot v_{n+1} + b \cdot v_n \\ &= a \cdot (u_{n+1} + v_{n+1}) + b \cdot (u_n + v_n) \end{aligned}$$

(U2)

$$\begin{aligned} (\lambda u)_{n+2} &= \lambda u_{n+2} \\ &\overset{\text{nach Vorauss.}}{=} \lambda\,(a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n) \\ &= a \cdot (\lambda u_{n+1}) + b \cdot \lambda u_n \end{aligned}$$

Damit ist die Abgeschlossenheit gezeigt.

b) Falls $a = b = 0$, so folgt:

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in U \Leftrightarrow u_{n+2} = 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Also lässt sich $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in U$ darstellen als

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\in\mathbb{N}_0} &= (u_0, u_1, 0, 0, \ldots) \\ &= u_0 \cdot (1, 0, 0, \ldots) + u_1 \cdot (0, 1, 0, 0, \ldots). \end{aligned}$$

Somit ist (v_1, v_2) mit $v_1 = (1, 0, 0, \ldots),\ v_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ ein Erzeugendensystem von U. Da (v_1, v_2) außerdem linear unabhängig ist, ist (v_1, v_2) eine Basis von U.

(c) Es ist $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in U$, da

$$\begin{aligned} \lambda^{n+2} &= \lambda^n\lambda^2 \\ &\overset{\lambda \text{ Wurzel von } x^2-ax-b}{=} \lambda^n \cdot (a\cdot\lambda + b) \\ &= a\cdot\lambda^{n+1} + b\cdot\lambda^n. \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man, dass $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$. Dann sind u_0, u_1 fest vorgegeben und der Rest der Folge ist durch $u_{n+2} = a\cdot u_{n+1} + b\cdot u_n$ gegeben. Die Nullstellen von $p(x)$ sind gegeben durch $\lambda, \mu = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b}$, wobei wir unter $\sqrt{a^2+4b}$ eine der beiden komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = a^2+4b$ verstehen. Die Voraussetzung $\lambda \neq \mu$ bedeutet $a^2+4b \neq 0$. Wir setzen

$$\alpha = \frac{u_0}{2} + \frac{u_1 - \frac{a}{2}u_0}{\sqrt{a^2+4b}}, \quad \beta = \frac{u_0}{2} - \frac{u_1 - \frac{a}{2}u_0}{\sqrt{a^2+4b}}.$$

Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := \alpha\cdot(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0} + \beta\cdot(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$:

$$v_0 = \alpha + \beta = u_0, \quad v_1 = \alpha\cdot\lambda + \beta\cdot\mu = u_1$$

und der Rest folgt per Induktionsschluss: sei $n \in \mathbb{N}_0$, es gelte $u_n = v_n$ und $u_{n+1} = v_{n+1}$, dann folgt

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= \alpha\cdot\lambda^{n+2} + \beta\cdot\mu^{n+2} \\ &= \alpha\cdot\Big(a\cdot\lambda^{n+1} + b\cdot\lambda^n\Big) + \beta\cdot\Big(a\cdot\mu^{n+1} + b\cdot\mu^n\Big) \\ &= \alpha\cdot v_{n+1} + \beta\cdot v_n \\ &\overset{\text{Induktionsvorauss.}}{=} \alpha\cdot u_{n+1} + \beta\cdot u_n \\ &= u_{n+2}. \end{aligned}$$

Daher ist $((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (\mu^n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ ein Erzeugendensystem. Außerdem ist $((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (\mu^n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ linear unabhängig: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_1\cdot(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0} + \lambda_2\cdot(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}_0} = 0$, so folgt für $n = 0$: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Für $n = 1$ folgt, dass $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, insgesamt also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Daher ist $((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (\mu^n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ eine Basis.

(d) Die einzige Nullstelle von $p(x)$ ist nun $\lambda = \frac{a}{2}$. Wie in (c) zeigt man, dass

$$(\lambda^n)_{n\in N_0}, \quad (n\lambda^n)_{n\in N_0} \in U.$$

Die Familie $\Big((\lambda^n)_{n\in N_0}, (n\lambda^n)_{n\in N_0}\Big)$ ist linear unabhängig, denn seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_1 \cdot (\lambda^n)_{n\in N_0} + \lambda_2\cdot(n\lambda^n)_{n\in N_0} = 0$, so folgt für $n = 0$, dass $\lambda_1 = 0$ und für $n = 1$, dass $\lambda_2 = 0$.
Sei nun $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in U$ vorgegeben, dann nehmen wir $\alpha = u_0,\ \beta = \frac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda}$, so ist (wie in (c)):

$$\alpha\cdot(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0} + \beta(n\cdot\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$