Prof. Dr. V. Schmidt
O. Stenzel / G. Gaiselmann

WS 2010/2011
26.10.2010

Räumliche Statistik
Übungsblatt 1

Präsentation der Lösungen: Di. 02.11.2010

Aufgabe 1 Sei $\{N_B,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poissonsches Zählmaß mit Intensitätsmaß μ. Zeige, dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(N_{B_1} = k_1, \ldots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k)$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \mu(B) < \infty$ und für paarweise disjunkte $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, so dass $\bigcup_{i=1}^n B_i = B$, einer Multinomialverteilung genügen, d.h., es gilt

$$\mathbb{P}(N_{B_1} = k_1, \ldots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k) = \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} \frac{\mu^{k_1}(B_1) \ldots \mu^{k_n}(B_n)}{\mu^k(B)}$$

für beliebige $k_1, \ldots, k_n \geq 0$, so dass $k = k_1 + \ldots + k_n$.

Aufgabe 2 Sei $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| \leq r\}$ die d-dimensionale Kugel um den Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ mit Radius $r \geq 0$. Außerdem sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \in (0, \infty)$. Dann heißt die Funktion $H_S : [0, \infty) \longrightarrow [0,1]$ mit

$$H_S(r) = P(N_{B(o,r)} > 0)$$

die sphärische Kontaktverteilungsfunktion des Poisson-Prozesses, wogegen die Funktion $D : [0, \infty) \longrightarrow [0,1]$ mit

$$D(r) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P(N_{B(o,r)} > 1 \mid N_{B(o,\varepsilon)} > 0)$$

Nächster-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion genannt wird.
Zeige, dass für jedes $r > 0$

$$H_S(r) = D(r) = 1 - \exp(-\lambda \kappa_d r^d),$$

wobei κ_d das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel ist.

Aufgabe 3 Transformation gleichverteilter Zufallsvariablen

(a) Sei $\lambda > 0$ und $U_1, U_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen und auf dem Intervall $(0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Zeige, dass die Zufallsvariablen $\frac{-\log U_1}{\lambda}, \frac{-\log U_2}{\lambda}, \ldots$ unabhängig und exponentialverteilt sind mit Parameter λ.

(b) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ. Zeige, dass

$$Y = \max\{k \geq 0 :\ X_1 + \ldots + X_k \leq 1\}$$

eine Poisson-Verteilung mit Parameter λ hat.

Aufgabe 4

Schreibe ein Programm, das Realisierungen eines homogenen Poisson-Prozesses $\{N_B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ mit Intensität λ auf einem rechteckigen Beobachtungsfenster $W \subset \mathbb{R}^2$ erzeugt. Die poissonverteilten Pseudozufallszahlen sollen dabei mit dem aus Aufgabe 3 resultierenden Algorithmus erzeugt werden. Für die Simulation von gleichverteilten Pseudozufallszahlen können die bereits implementierten Algorithmen der entsprechenden Programmiersprachen verwendet werden. Visualisiere eine Realisierung eines Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda = 0.01$ auf dem Fenster $W = [0, 100]^2$.

Für die Implementierung kann Java, C++ oder R verwendet werden. Die Visualisierung lässt sich komfortabel in R realisieren.