Prof. Dr. V. Schmidt
O. Stenzel

WS 2010/2011
18.01.2011

Räumliche Statistik
Übungsblatt 10

Präsentation der Lösungen: Di. 25.01.2011

Aufgabe 1

(a) Implementiere einen Algorithmus zur randeffektfreien Simulation eines modulierten Poisson-Prozesses auf einem rechteckigen Beobachtungsfenster $W \subset \mathbb{R}^2$. Visualisiere eine Realisierung des modulierten Poisson-Prozesses auf dem Fenster $W = [0, 1000]^2$ für den Parametervektor $(\lambda_0, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, R)$, wobei $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, $\lambda^{(1)} = 0.002$, $\lambda^{(2)} = 0.0005$ und $R = 50$ ist.

(b) Bestimme empirisch eine 96%-Umgebung der Intensität eines modulierten Poisson-Prozesses mit den Parametern aus Aufgabenteil (a) für die Fenster $W = [0, 200]^2$, $W = [0, 400]^2, \ldots, W = [0, 1000]^2$. Simuliere zu diesem Zweck 100 Realisierungen des modulierten Poisson-Prozesses, schätze die Intensität für die entsprechenden Fenster und wähle die Grenzen der Umgebung durch Streichen der 2 kleinsten und der 2 größten Realisierungen des Schätzers. Plotte anschliessend die 96%-Umgebungen in Abhängigkeit der Fenstergrösse.

(c) Bestimme empirisch eine 96%-Umgebung der Intensität eines homogenen Poisson-Prozesses, dessen Intensität mit der des in Aufgabenteil (b) betrachteten Prozesses übereinstimmt und plotte ebenfalls für die Fenster $W = [0, 200]^2$, $W = [0, 400]^2, \ldots, W = [0, 1000]^2$ den Verlauf der Konfidenzbänder.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Zeige mit Hilfe von Korollar 3.3, dass das erzeugende Funktional $G : \mathcal{H} \to [0, 1]$ eines Neyman-Scott-Prozesses gegeben ist durch

$$G(f) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left(g\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) P_S(dy)\right] - 1\right) dx\right),$$

wobei $P_S : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ die Verteilung von $S_i^{(n)}$ ist und $g : [-1, 1] \to [0, 1]$ die erzeugende Funktion der Gesamtzahl von Sekundärpunkten ist, die von einem Primärpunkt generiert werden, d.h.,

$$g(z) = \mathbb{E} z^{T^{(1)}}, \text{ für alle } z \in [-1, 1].$$

(b) Sei $T^{(1)} \sim Poi(\lambda_1)$ und P_S absolutstetig bezüglich ν_d mit Dichte $p_S : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$. Folgere aus der sich unter diesen Voraussetzungen ergebenden speziellen Form von $G(f)$ und aus der Formel für das erzeugende Funktional eines Poisson-Prozesses mit Parameter λ_0, dass dann

$$G(f) = \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - f(x)) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(1)}(x - S_n)\, dx\right),$$

wobei $\lambda^{(1)}(x) = \lambda_1 p_S(x)$. Beachte, dass damit gezeigt ist, dass der Neyman-Scott-Prozess in diesem Fall nicht nur als Poissonscher Cluster-Prozess, sondern auch als Cox-Prozess betrachtet werden kann.