Prof. Dr. V. Schmidt
O. Stenzel

WS 2010/2011
25.01.2011

Räumliche Statistik
Übungsblatt 11

Präsentation der Lösungen: Di. 01.02.2011

Aufgabe 1 Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Gauß-Poisson-Prozess. Zeige mit Korollar 3.3, dass das erzeugende Funktional gegeben ist durch

$$G(f) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left((1-p)\,f(x) + p\int_{\mathbb{R}^d} f(x)f(x+y)P_S(\mathrm{d}y) - 1\right)\mathrm{d}x\right) \qquad \forall\ f \in \mathcal{H}.$$

Dabei sei $\lambda_0 > 0$ die Intensität des Primärprozesses $\{S_n\}$ (welches ein homogener Poisson-Prozess ist), $p = P\left(S^{(1)} \in \mathbb{R}^d\right)$ und $P_S : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]$ mit $P_S(B) = p^{-1}P\left(S^{(1)} \in B\right)$ die bedingte Verteilung der Abweichung des zweiten Sekundärpunktes vom auslösenden Primärpunkt (unter der Bedingung, dass es einen solchen zweiten Sekundärpunkt gibt).

Vorinformationen zu Aufgabe 2

- Sei $\mathbb{N}$ die Familie aller lokal endlichen Zählmaße $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \{0,1,\ldots\} \cup \{\infty\}$

- Sei $\mathbb{N}^{(e)} = \left\{\varphi = \sum_n \delta_{s_n} \in \mathbb{N} : \varphi(\mathbb{R}^d) < \infty, s_i \neq s_j \text{ für } i \neq j\right\}$.

- Weiterhin sei $\mathcal{N}$ die übliche σ-Algebra auf $\mathbb{N}$.

- Sei $Q : \mathcal{N} \to [0,1]$ die Verteilung eines Poisson-Prozesses mit dem diffusen und endlichen Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty)$.

- Außerdem sei $f : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ eine Funktion, die den folgenden beiden Bedingungen genügt.

  (a) Für beliebige $\varphi = \sum_n \delta_{s_n}$ und $\varphi' = \sum_n \delta_{s'_n}$ aus $\mathbb{N}^{(e)}$, so dass $\varphi \geq \varphi'$, gelte
  $$f(\varphi) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(\varphi') > 0\,. \tag{1}$$

  (b) Durch $f : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ sei eine Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich der Verteilung Q des Poissonschen Referenz–Punktrozesses gegeben, d.h., es gelte
  $$\int_{\mathbb{N}} f(\varphi)\,Q(\mathrm{d}\varphi) = 1\,. \tag{2}$$

- Dann kann man sich leicht überlegen, dass die Mengenfunktion $P : \mathcal{N} \to [0,1]$ mit
  $$P(A) = \int_A f(\varphi)\,Q(\mathrm{d}\varphi) \qquad \forall\, A \in \mathcal{N} \tag{3}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaßüber $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ ist und somit die Verteilung eines Punktprozesses ist.

- Ein Punktprozess, dessen Verteilung P die in (3) gegebene Form hat, wobei $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ den Bedingungen (1) und (2) genügt, wird *Gibbs–Prozess* genannt.

Beachte.

- Die Dichte $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ von Gibbs–Prozessen besitzt eine probabilistische Deutung.
  - Diejenigen Realisierungen $\varphi \in \mathbb{N}^{(e)}$, für die $f(\varphi) > 1$ gilt, sind unter P „wahrscheinlicher" als unter der Referenz–Verteilung Q.
  - Und umgekehrt: Realisierungen $\varphi \in \mathbb{N}^{(e)}$, für die $f(\varphi) < 1$ gilt, treten unter P seltener als unter Q auf.

Definition Strauss–Prozess.

- Seien $a > 0$, $b \in [0, \infty]$ und $R > 0$ beliebige Zahlen.
- Ein Gibbs–Prozess heißt *Strauss–Prozess* in W, wenn die in (3) betrachtete Dichte die folgende Form hat:

$$f(\varphi) = c\, a^{\varphi(W)} \exp\bigl(-b\, t_R(\varphi)\bigr) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{B}\,. \tag{4}$$

  - Dabei bezeichnet

$$t_R(\varphi) = \sum_{n,m} \mathbb{1}_{W \times W}(s_n, s_m) \mathbb{1}_{(0,R)}(|s_n - s_m|)$$

    die Anzahl aller Punktepaare (s_n, s_m) von $\varphi = \sum_n \delta_{s_n}$ in W, deren Abstand kleiner als R ist,
  - und c ist eine Normierungskonstante, so dass (2) gilt, d.h.,

$$c = \Bigl(\int_{\mathcal{B}} a^{\varphi(W)} \exp\bigl(-b\, t_R(\varphi)\bigr)\, Q(\mathrm{d}\varphi) \Bigr)^{-1} .$$

- Die drei Parameter $a > 0$, $b \in [0, \infty]$ und $R > 0$ des Strauss–Prozesses werden *Aktivität*, *Wechselwirkungsparameter* bzw. *Wechselwirkungsradius* genannt.
- Der Wechselwirkungsparameter $b \in [0, \infty]$ beschreibt die Stärke der gegenseitigen „Abstoßung" zwischen den Punkten.
  - Wenn $b = \infty$, dann ergibt sich aus (4) insbesondere, dass

$$f(\varphi) = \begin{cases} 0\,, & \text{wenn } t_R(\varphi) > 0, \\ c\, a^{\varphi(W)} & \text{wenn } t_R(\varphi) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

    wobei $\infty \cdot 0 = 0$ gesetzt wurde. In diesem Fall sagt man, dass P die Verteilung eines *Hard–Core–Prozesses* mit dem *Hard–Core–Radius* R ist.

– Wenn $b = 0$, dann ergibt sich aus (4), dass

$$f(\varphi) = c\, a^{\varphi(W)} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{B}\,, \tag{6}$$

und man kann sich leicht überlegen, dass dann durch P die Verteilung eines homogenen Poisson–Prozesses mit der Intensität a (eingeschränkt auf W) gegeben ist.

Aufgabe 2

Sei $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, Q)$ der kanonische Wahrscheinlichkeitsraum eines Poisson-Prozesses mit endlichem Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty)$.

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ eine messbare Funktion. Zeige mit Hilfe von Korollar 2.1, dass

$$\int_{\mathbb{N}} f(\varphi) Q(d\varphi) = f(0) e^{-\mu(\mathbf{R}^d)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu(\mathbf{R}^d)}}{k!} \int_{\mathbf{R}^d} \cdots \int_{\mathbf{R}^d} f\Big(\sum_{j=1}^{k} \delta_{x_j}\Big) \mu(dx_1) \ldots \mu(dx_k),$$

wobei $f(0)$ den Funktionswert des Nullmaßes bezeichnet.

(b) Zeige, dass der Strauss-Prozess auf dem Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, wohldefiniert ist, d.h. für alle $a > 0$, $b \in [0, \infty]$ und $R > 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{N}} a^{\varphi(W)} \exp\Big[- b \sum_{x,y : \varphi(\{x\}), \varphi(\{y\}) > 0} \mathbb{I}_{W \times W}(x, y) \mathbb{I}_{(0,R)}(|x - y|) \Big] Q(d\varphi) < \infty.$$