Prof. Dr. V. Schmidt
O. Stenzel

WS 2010/2011
01.02.2011

# Räumliche Statistik
## Übungsblatt 12

Präsentation der Lösungen: Di. 08.02.2011

**Aufgabe 1**

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ die Dichte eines zufälligen Zählmaßes bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $Q$ auf dem Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ der lokal endlichen Zählmaße. Sei $c > 0$ eine Konstante, so dass $f(\varphi) \leq c \; \forall \varphi \in \mathbb{N}$. Seien ferner $(U_1, N_1), (U_2, N_2), \ldots$ iid mit unabhängigen Komponenten, wobei $U_i \sim U([0,1))$ und $N_i \sim Q$ für $i = 1, 2, \ldots$. Zeige, dass

   (i) $I = \min\{k \geq 1 : \; U_k < \frac{f(N_k)}{c}\} \sim Geo(c^{-1})$,
   d.h. $P(I = j) = (1 - c^{-1})^{j-1} c^{-1}$, und

   (ii) $N_I \sim \mathbf{P}$, wobei $\mathbf{P}$ die durch $f$ gegebene Verteilung bezeichnet.

(b) Zeige, dass folgender Algorithmus zur Simulation eines Strauss-Prozesses mit Aktivität $a > 0$ und Interaktionsparameter $b > 0$ auf einem Beobachtungsfenster $W$ korrekt ist: Erzeuge so lange Realisierungen $u_i$ von unabhängigen auf $[0, 1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen und davon unabhängige Realisierungen $n_i$ eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität $a$ auf $W$ mit $0 < \nu_d(W) < \infty$ bis erstmals

$$u_i < \exp(-b t_R(n_i)).$$

Dieses erste nicht verworfene Punktmuster $n_i$ ist das Simulationsergebnis.

(c) Implementiere den Algorithmus aus (b). Erzeuge für die Interaktionsparameter $b = -\log(\gamma)$, $\gamma = 0.2, 0.3, \ldots, 1$, jeweils eine Realisierung eines Strauss-Prozesses mit $a = 0.1$ und $R = 1$ auf dem Fenster $W = [0, 25]^2$ und visualisiere in Abhängigkeit von $\gamma$ die Anzahl von Realisierungen des Poisson-Prozesses, die benötigt wurde, bis erstmals eine Realisierung nicht verworfen wurde.

**Aufgabe 2**

Erzeuge auf dem Beobachtungsfenster $W = [0, 25]^2$ mit dem R-Paket Spatstat jeweils 100 Realisierungen eines Strauss-Prozesses für die Interaktionsparameter $\gamma = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$, wobei die Parameter $R = 1.5$ und $\beta = 1$ konstant gewählt werden. Die Parameterangaben beziehen sich auf die in Spatstat verwendete Definition des Strauss-Prozesses, d.h. $\beta = a$ und $\gamma = \exp(-b)$, wobei $a$ und $b$ die Parameter der in der Vorlesung verwendeten Definition der Dichte sind. Berechne für jede der Realisierungen die Maximum-Pseudolikelihood-Schätzer $\widehat{\beta}_i^{(\gamma)}$ und $\widehat{\gamma}_i^{(\gamma)}$ für $\beta$ bzw. $\gamma$ und visualisiere die

Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers

$$e_\beta(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}(\beta - \widehat{\beta}_i^{(\gamma)})^2} \text{ und } e_\gamma(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}(\gamma - \widehat{\gamma}_i^{(\gamma)})^2}$$

in Abhängigkeit von $\gamma$.
**Hinweis:**
Spatstat lässt sich mit dem Befehl `install.packages(‘‘spatstat‘‘)` installieren. Folgende Einträge in der Hilfe können nützlich sein: `rmh, rmh.default, rmhmodel, rmhmodel.default, ppm`. Sei `fit` das Objekt mit dem Ergebnis des Modelfittings (siehe `ppm`), dann erhält man die Schätzwerte für $\gamma$ und $\beta$ folgendermaßen:

```
result<-exp(coef(fit))
betaHat<-result[1]
gammaHat<-result[2]
```

**Hinweis.** Die Pseudo-Likelihood-Funktion unterscheidet sich von der Likelihood-Funktion durch das Entfallen der Normierungskonstante $c$.