Prof. Dr. V. Schmidt
O. Stenzel / G. Gaiselmann

WS 2010/2011
02.11.2010

Räumliche Statistik
Übungsblatt 2

Präsentation der Lösungen: Di. 09.11.2010

Aufgabe 1

Beweise die sogenannte Independent-Thinning-Eigenschaft des Poisson-Prozesses, d.h. zeige: Wenn jeder der Punkte $\{S_n\}$ eines homogenen Poisson-Prozesses auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensität λ aufgrund einer Folge unabhängiger Bernoulli-Experimente gelöscht oder erhalten wird, erhält man einen homogenen Poisson-Prozess mit Intensität $p\lambda$. Dabei bezeichnet p die Erhaltungswahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2 Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \in (0, \infty)$.

(a) Sei $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W_n) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$. Zeige, dass der erwartungstreue Schätzer

$$\hat{\lambda}_{W_n} = \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)}$$

für λ schwach konsistent ist, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0.$$

(b) Zeige, dass darüber hinaus für jede solche Folge $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Zufallsvariable

$$\sqrt{\frac{|W_n|}{\lambda}}(\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda)$$

asymptotisch normalverteilt ist.

(c) Für jedes $n \geq 1$ seien die Mengen L_n, $U_n \subset \mathbb{R}^d$ jeweils die Vereinigung von endlich vielen $d-$dimensionalen Würfeln der Seitenlänge $\delta > 0$, die sich nicht überlappen. Ferner erhalte man für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen L_{n+1} und U_{n+1}, indem zu L_n bzw. U_n endlich viele dieser Würfel hinzugefügt werden. Es sei nun $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern, so dass $\nu_d(W_n) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$ und zusätzlich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$L_n \subset W_n \subset U_n \text{ sowie } \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_d(L_n)}{\nu_d(W_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_d(U_n)}{\nu_d(W_n)} = 1.$$

Zeige, dass dann $\hat{\lambda}_{W_n}$ stark konsistent ist, d.h., mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt $\lim_{n\to\infty} \hat{\lambda}_{W_n} = \lambda$.