Prof. Dr. V. Schmidt — WS 2010/2011

O. Stenzel / G. Gaiselmann — 09.11.2010

Räumliche Statistik
Übungsblatt 3

Präsentation der Lösungen: Di. 16.11.2010

Aufgabe 1

Für diese Aufgabe soll das Programm aus Blatt 1, Aufgabe 4, verwendet bzw. erweitert werden.

(a) Wir betrachten einen homogenen Poisson-Prozess $\{N_B : \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ mit Intensität $\lambda_0 = 0.001$. Generiere für die Beobachtungsfenster $W = [0, m]^2$, wobei $m = 100$, $m = 300$ und $m = 500$, jeweils 100 Realisierungen $t_1, \ldots, t_{100}$ der Testgröße

$$T = \sqrt{\frac{\nu_2(W)}{\hat{\lambda}_W}}(\hat{\lambda}_W - \lambda_0),$$

wobei $\hat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_2(W)}$. Prüfe für alle drei Werte von m mit Hilfe eines Shapiro-Wilk-Tests zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die Hypothese abzulehnen ist, dass $t_1, \ldots, t_{100}$ Realisierungen von $N(0,1)$-verteilten Stichprobenvariablen sind.

(b) Wir betrachten einen MC-Rangtest zur Verifizierung des Hypothesenpaars

$$H_0 : \ \lambda = \lambda_0 \text{ vs. } H_1 : \ \lambda \neq \lambda_0$$

zum Niveau $\alpha = 0.05$. Der Test möge auf 100 Realisierungen $t_0, t_1, \ldots, t_{99}$ der Testgröße T beruhen. Dabei ergeben sich $t_1, \ldots, t_{99}$ aus Realisierungen eines Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda_0 = 0.001$, während sich t_0 aus einer Realisierung eines Poisson-Prozesses mit Intensität λ errechnet. Die empirische Gütefunktion $\alpha(\lambda)$ des Tests ist definiert als

$$\alpha(\lambda) = \frac{\sharp\{k : \rho_0^{(k)} > 95\}}{n},$$

wobei n die Anzahl der Testläufe und $\rho_0^{(k)}$ den Rang von t_0 im k-ten Testlauf bezeichnet. Der Rang von t_0 ist dabei als die Position zwischen 1 und 100 definiert, die $|t_0|$ einnimmt, wenn alle Beträge $|t_0|, |t_1|, \ldots, |t_{99}|$ aufsteigend geordnet werden.
Simuliere für $\lambda \in \{0.001, 0.002, \ldots, 0.009, 0.01\}$ die Werte der empirischen Gütefunktion. Führe dazu für jeden Wert λ jeweils 100 Testläufe auf dem Fenster $W = [0, 100]^2$ durch.

(c) Wie ändern sich die Werte der empirischen Gütefunktion, wenn das Fenster $W = [0, 1000]^2$ betrachtet wird?

Für den Shapiro-Wilk-Test kann die entsprechende Funktion shapiro.test in R verwendet werden.

Aufgabe 2

Seien $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ zwei Borel-messbare und lokal integrierbare Funktionen, so dass

$$\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Sei $\{S_n\}$ eine messbare Indizierung eines Poisson-Prozesses mit Intensitätsfunktion λ_1 und $U_1, U_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen und auf $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen, die von $\{S_n\}$ unabhängig ist. Zeige, dass $\{\widetilde{N}_B,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ mit

$$\widetilde{N}_B = \sharp\{n : S_n \in B, U_n \leq \lambda_2(S_n)/\lambda_1(S_n)\}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

ein Poisson-Prozess mit der Intensitätsfunktion λ_2 ist.

Aufgabe 3 Campbellsches Theorem

Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein einfaches zufälliges Zählmaß mit dem Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$, d.h. es gelte $\mu(B) = \mathbb{E}N_B$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Außerdem sei $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine messbare Indizierung der Atome von $\{N_B\}$, d.h., für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei S_n ein Zufallsvektor $S_n : \Omega \to \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$, so dass $N_B = \#\{n : S_n \in B\}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Zeige, dass dann für jede nichtnegative Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ mit $f(\infty) = 0$ gilt

$$\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu(dx),$$

d.h., $\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für das Integral $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu(dx)$.