Prof. Dr. V. Schmidt WS 2010/2011
O. Stenzel / G. Gaiselmann 23.11.2010

Räumliche Statistik
Übungsblatt 5

Präsentation der Lösungen: Di. 30.11.2010

Aufgabe 1

(a) Sei $\{S_n\}$ ein zufälliger Punktprozess in $\mathbb{R}^d$, so dass

$$N_B = \#\{n : S_n \in B\} < \infty \ \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d).$$

Gib ein Beispiel eines zufälligen Punktprozesses an, so dass das zugehörige Intensitätsmaß μ nicht lokal-endlich ist.

(b) Zeige, dass ein Poisson-Prozess $\{N_B\}$ mit lokal-endlichem und diffusem Intensitätsmaß μ sowie messbarer Indizierung $\{S_n\}$ folgende Eigenschaft besitzt:

$$P\left(S_i = S_j \neq \infty\right) = 0.$$

(c) Beweise Gleichung (8) aus Theorem 3.2. Zeige also, dass das erzeugende Funktional $\mathbf{G}$ angewandt auf die Funktion

$$f(x) = \Pi_{i=1}^k \left(1 + (z_i - 1)\mathbb{1}_{B_i}(x)\right),$$

wobei $k \geq 1, 0 \leq z_1, \ldots, z_k \leq 1$ und $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}_o(\mathbb{R}^d)$, der erzeugenden Funktion des Zufallsvektors $(N_{B_1}, \ldots, N_{B_k})$ entspricht, d. h.

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E}\left(z_1^{N_{B_1}} \cdots z_1^{N_{B_k}}\right).$$

Aufgabe 2

Sei N ein zufälliges Zählmaß im $\mathbb{R}^d$. Der Operator

$$L_N(f) = \mathbb{E}\exp[-\int_{\mathbb{R}^d} f(x)N(dx)]$$

auf der Menge der Borel-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ heisst das Laplace-Funktional von N. Dabei benutzen wir die Schreibweise $N(dx) = N_{dx}$. Man kann zeigen, dass zwei zufällige Zählmaße N und N' genau dann die gleiche Verteilung haben, wenn $L_N(f) = L_{N'}(f)$ für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit kompaktem Träger gilt. Eine Funktion f hat einen kompakten Träger, wenn die Menge $\{x : \ f(x) > 0\}$ in

einem Kompaktum enthalten ist.
Zeige, dass ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß μ das Laplace-Funktional

$$L_N(f) = \exp[-\int_{\mathbf{R}^d} (1 - e^{-f(x)})\mu(dx)]$$

hat.
Hinweis. Verwende Algebraische Induktion.