Prof. Dr. V. Schmidt
O. Stenzel

WS 2010/2011
30.11.2010

Räumliche Statistik
Übungsblatt 6

Präsentation der Lösungen: Di. 07.12.2010

Aufgabe 1

(a) Zeige, dass ein Poisson-Prozess $\{N_B\}$ auf $\mathbb{R}^d$ genau dann stationär ist, wenn sein Intensitätsmaß μ stationär ist.

(b) Wie verändert sich die obige Aussage, wenn $\{N_B\}$ ein allgemeines zufälliges Zählmaß mit Intensitätsmaß μ ist? Finde, falls eine der Implikationen nicht gilt, ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 2 Ein Punktprozess kann als eine messbare Abbildung $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ von einem abstrakten Wahrscheinlicheitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in den Raum $\mathbb{N}$ der lokal endlichen Zählmaße mit der σ-Algebra

$$\mathcal{N} = \sigma\{\{N \in \mathbb{N} : N(B) = k\}, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d), k \in \{0, 1, 2, \ldots\}\}$$

aufgefasst werden. Zeige, dass zwei Punktprozesse $N^{(1)}$ und $N^{(2)}$ genau dann die gleiche Verteilung haben, wenn

$$(N^{(1)}(B_1), \ldots, N^{(1)}(B_k)) \stackrel{d}{=} (N^{(2)}(B_1), \ldots, N^{(2)}(B_k))$$

für alle $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}, B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.
Hinweise. 1. Zeige zunächst, dass $\mathcal{N}$ so definiert ist, dass für alle $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ die Projektionsabbildungen

$$\pi_B : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ N \mapsto N_B$$

messbar ist.
2. Benutze einen Eindeutigkeitssatz der Maßtheorie wie das folgende Resultat:
Sei $\mathcal{G}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ auf einem Raum Ω, d.h. $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{F}$ und aus $A, B \in \mathcal{G}$ folge $A \cap B \in \mathcal{G}$. Ferner existiere eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ von Mengen aus $\mathcal{G}$, so dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$. Dann sind zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P_1 und P_2 auf $(\Omega, \mathcal{F})$ gleich, wenn

$$P_1(A) = P_2(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{G}.$$

Aufgabe 3 Sei $\{S_n\}$ ein homogener Poisson-Prozess im $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\lambda > 0$ und $B(o,r)$ eine Kugel mit Radius $r > 0$ um den Ursprung. Dann ist

$$\Xi := \bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n + B(o,r_1))$$

eine sogenannte *zufällig abgeschlossene Menge* (ZAM). Die sphärische Kontaktverteilungsfunktion $H_S(r)$ mit $r > 0$ für eine zufällig abgeschlossene Menge Ξ ist definiert durch

$$H_S(r) := P\left(B(o,r) \cap \Xi \neq \emptyset | o \notin \Xi\right).$$

(a) Bestimme $H_S(r)$ in der oben beschriebenen Situation, d. h. für $\Xi := \bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n + B(o,r_1))$.

(b) Sei $d = 2$ und $A := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x = r \cdot s,\ r \in [0,1]\right\}$ mit $s \in \mathbb{R}^2$ und $||s|| = 1$. Berechne $H_S(r)$ für die zufällig abgeschlossene Menge Ξ, wobei $\Xi := \bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n + A)$.