Prof. Dr. V. Schmidt
O. Stenzel

WS 2010/2011
07.12.2010

Räumliche Statistik
Übungsblatt 7

Präsentation der Lösungen: Di. 14.12.2010

Aufgabe 1

Für diese Aufgabe soll die R-Bibliothek `spatstat` **nicht** verwendet werden.

(a) Implementiere eine Prozedur, die einen Matérn-Cluster-Prozess randeffektfrei auf einem rechteckigen Beobachtungsfenster $W = [0, m]^2$ simuliert. Der primäre Poissonprozess $\{S_n\}$ soll dabei homogen sein mit Intensität $\lambda_0 > 0$.

(b) Visualisiere eine Realisierung eines Matérn-Cluster-Prozess auf dem Fenster $W = [0, 100]^2$ mit den Parametern $\lambda_0 = 0.002$, $\lambda^{(1)} = 0.05$ und $R = 10$ und berechne die (theoretische!) Gesamtintensität λ.

(c) Ermittle für die Fensterlängen $m = 50, 75, 100, 125, 150$ die relative Häufigkeit, mit welcher der Shapiro-Wilk-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese ablehnt, dass die Zufallsvariable

$$T = \sqrt{\frac{\nu_2(W)}{\lambda_0 \lambda^{(1)} \pi R^2 (1 + \lambda^{(1)} \pi R^2)}} (\hat{\lambda}_W - \lambda)$$

standardnormalverteilt ist. Führe dazu für jede der Fenstergrößen 100 mal einen Shapiro-Wilk-Test aus, der jeweils auf 50 Realisierungen des Matérn-Cluster-Prozesses aus (b) beruht. Stelle die Ablehnungshäufigkeiten als Funktion der Fenstergröße graphisch dar.

(d) Wiederhole (c), wobei statt des Matérn-Cluster-Prozesses ein homogener Poisson-Prozess gleicher Intensität betrachtet wird. Die in (c) betrachtete Zufallsvariable T wird entsprechend durch

$$T' = \sqrt{\frac{\nu_2(W)}{\hat{\lambda}_W}} (\hat{\lambda}_W - \lambda_0)$$

ersetzt.

Hinweis. Ein Matérn-Cluster-Prozess lässt sich wiefolgt definieren:

- Sei $\{S_n\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensitätsfunktion $\{\lambda_0(x), x \in \mathbb{R}^d\}$, und sei $Z = \#\{n : S_n \in \mathbb{R}^d\}$ die (zufällige) Anzahl von Atomen von $\{S_n\}$ in $\mathbb{R}^d$.
- Außerdem sei $\left\{N_B^{(1)}\right\}, \left\{N_B^{(2)}\right\}, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identitsch verteilten Poissonschen Zählmaßen, die vom Primärprozess $\{S_n\}$ unabhängig sind

und die die (integrierbare) Intensitätsfunktion $\left\{\lambda^{(1)}(x),\ x \in \mathbb{R}^d\right\}$ mit

$$\lambda^{(1)}(x) = \begin{cases} \lambda^{(1)}, & x \in B(0,R) \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

besitzen, wobei $R > 0$ und $\lambda^{(1)} > 0$.

- Dann heißt das zufällige Zählmaß$\left\{N_B,\ B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}$ mit $N_B = \sum_{n=1}^{Z} N^{(n)}_{B-S_n}$ ein Matérn-Cluster-Prozess.

Aufgabe 2

Seien $\{N_B^{(1)},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ und $\{N_B^{(2)},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ unabhängige homogene Poisson-Prozesse mit Intensitäten λ_1 bzw. λ_2. Sei $X_1, \ldots, X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine beliebige Familie von Zufallsvektoren, die von $\{N_B^{(1)}\}$ und $\{N_B^{(2)}\}$ unabhängig ist. Sei ferner $A(X_1, \ldots, X_n) = conv\{X_1, \ldots, X_n\}$ die zufällige konvexe Hülle von $X_1, \ldots, X_n$. Zeige, dass der Prozess $\left\{N_B,\ B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}$ mit

$$N_B = N^{(1)}_{B \cap A(X_1,\ldots,X_n)} + N^{(2)}_{B \cap A^c(X_1,\ldots,X_n)}$$

ein Cox-Prozess ist, dessen zufälliges Intensitätsmaß $\{\Lambda_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ gegeben ist durch

$$\Lambda_B = \lambda_1 \nu_d(B \cap A(X_1, \ldots, X_n)) + \lambda_2 \nu_d(B \cap A^c(X_1, \ldots, X^n)).$$