Prof. Dr. V. Schmidt | WS 2010/2011
O. Stenzel | 21.12.2010

Räumliche Statistik
Übungsblatt 9

Präsentation der Lösungen: Di. 11.01.2011

Aufgabe 1

Wir betrachten einen Matérn-Cluster-Prozess in seiner Definition als Poissonschen Cluster-Prozess, d.h. die vom Poissonschen Primärprozess unabhängigen Sekundärprozesse $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \ldots$ haben die Verteilung eines Poissonprozesses mit Intensitätsmaß $\mu(B) = \lambda\nu_d(B \cap B(0, R))$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, für einen Clusterradius $R > 0$ und $\lambda > 0$. Zeige, dass der Matérn-Cluster-Prozess ein Cox-Prozess ist und bestimme sein zufälliges Intensitätsmaß.

Aufgabe 2

Sei $\{N_B\}$ ein einfaches zufälliges Zählmaß im $\mathbb{R}^d$ mit messbarer Indizierung der Atome $\{S_n\}$ und der Eigenschaft, dass $\mathbb{E}(N_B^2) < \infty$ für alle $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$. Dann definiert

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \mathbb{E} \sum_{n_1 \neq n_2} \mathbb{1}_{B_1 \times B_2}(S_{n_1}, S_{n_2}),\ \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

das zweite faktorielle Momentenmaß $\alpha_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d}) \to [0, \infty]$ von $\{N_B\}$.

(a) Sei nun $\{N_B\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß μ. Zeige, dass

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \mu(B_1)\mu(B_2)\, \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

(b) Leite basierend auf (a) eine Integraldarstellung des zweiten faktoriellen Momentenmaßes eines Cox-Prozesses mit dem zufälligen Intensitätsmaß Λ her.