Prof. Dr. V. Schmidt | SS 2011
O. Stenzel | 19.04.2011

Räumliche Statistik II
Übungsblatt 1

Präsentation der Lösungen: Fr. 29.04.2011

Aufgabe 1 Sei $\{N_B,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poissonsches Zählmaß mit Intensitätsmaß μ. Zeige, dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(N_{B_1} = k_1, \ldots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k)$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \mu(B) < \infty$ und für paarweise disjunkte $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, so dass $\bigcup_{i=1}^n B_i = B$, einer Multinomialverteilung genügen, d.h., es gilt

$$\mathbb{P}(N_{B_1} = k_1, \ldots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k) = \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} \frac{\mu^{k_1}(B_1) \ldots \mu^{k_n}(B_n)}{\mu^k(B)}$$

für beliebige $k_1, \ldots, k_n \geq 0$, so dass $k = k_1 + \ldots + k_n$.

Aufgabe 2

Schreibe ein Programm, das Realisierungen eines homogenen Poisson-Prozesses $\{N_B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ mit Intensität λ auf einem rechteckigen Beobachtungsfenster $W \subset \mathbb{R}^2$ erzeugt. Verwende hierzu Korollar 2.1 aus dem Skript. Für die Simulation von Pseudozufallszahlen können die bereits implementierten Algorithmen der entsprechenden Programmiersprachen verwendet werden. Visualisiere eine Realisierung eines Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda = 0.01$ auf dem Fenster $W = [0, 100]^2$.

Für die Implementierung kann Java, C++ oder R verwendet werden. Die Visualisierung lässt sich komfortabel in R realisieren.

Aufgabe 3

Beweise die sogenannte Independent-Thinning-Eigenschaft des Poisson-Prozesses, d.h. zeige: Wenn jeder der Punkte $\{S_n\}$ eines homogenen Poisson-Prozesses auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensität λ aufgrund einer Folge unabhängiger Bernoulli-Experimente gelöscht oder erhalten wird, erhält man einen homogenen Poisson-Prozess mit Intensität $p\lambda$. Dabei bezeichnet p die Erhaltungswahrscheinlichkeit.

Verwende Theorem 2.8 sowie Theorem 2.7 aus dem Skript.

Aufgabe 4 Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \in (0, \infty)$.

(a) Sei $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W_n) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$. Zeige, dass der erwartungstreue Schätzer

$$\hat{\lambda}_{W_n} = \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)}$$

für λ schwach konsistent ist, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0.$$

(b) Zeige, dass darüber hinaus für jede solche Folge $\{W_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ die Zufallsvariable

$$\sqrt{\frac{|W_n|}{\lambda}}(\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda)$$

asymptotisch normalverteilt ist.