

Räumliche Statistik II

Übungsblatt 2

Präsentation der Lösungen: Fr. 06.05.2011

Aufgabe 1 Finde ein Beispiel für einen stationären, jedoch nicht ergodischen Punktprozess.

Aufgabe 2 Betrachte das dynamische System $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \nu_1, \mathbf{T})$, wobei $\mathbf{T} := \{\mathbf{T}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ und \mathbf{T}_n für $n \in \mathbb{Z}$ definiert ist als

$$\mathbf{T}_n(\omega) = \omega + n\theta - \lfloor \omega + n\theta \rfloor$$

für ein beliebig aber fest gewähltes $\theta \in [0, 1]$.

- (a) Zeige, dass \mathbf{T}_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ maßerhaltend ist, d.h. $\nu_1(A) = \nu_1(\mathbf{T}_n A), \forall n \in \mathbb{Z}, A \in \mathcal{B}([0, 1])$.
- (b1) Zeige, dass die Folge der Fenster $W_n = \{1, \dots, n\}$ den Bedingungen (104)-(106) aus dem Skript genügt.
- (b2) Beweise nun, dass das System für $\theta \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ nicht ergodisch ist. (Hinweis: Wähle als Beobachtungsfenster $W_n = \{1, \dots, n\}$.)

Aufgabe 3 Zeige, dass das dynamische System $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$ ergodisch ist, wenn es eine mittelnnde Folge $\{W_n\}$ gibt, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) = P(A) P(A') \quad \forall A, A' \in \mathcal{A}.$$

(Hinweis: Verwende Theorem 3.19.)