

Räumliche Statistik II

Übungsblatt 3

Präsentation der Lösungen: Fr. 20.05.2011

Aufgabe 1 Zwei dynamische Systeme $\mathbf{A} = (\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ und $\mathbf{B} = (\Omega', \mathcal{F}', P', \mathbf{T}')$ über einer Gruppe G heißen isomorph, wenn es zwischen den Wahrscheinlichkeitsräumen eine messbare Bijektion $F : \Omega \rightarrow \Omega'$ gibt, so dass

$$P' = P \circ F^{-1}, P = P' \circ F \text{ und } F \circ \mathbf{T}_x \circ F^{-1} = \mathbf{T}'_x.$$

Zeige, dass im Falle der Isomorphie \mathbf{A} genau dann ergodisch ist, wenn \mathbf{B} ergodisch ist.
(Hinweis: Verwende Theorem 3.19.)

Aufgabe 2 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ ein dynamisches System und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}|X| < \infty$. Zeige, dass für alle $x \in G$

$$\int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} X(\mathbf{T}_x \omega) P(d\omega).$$

(Hinweis: Verwende algebraische Induktion.)

Aufgabe 3 Sei $\{N_B\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität λ . Zeige, dass $\{N_B\}$ ergodisch ist.

(Hinweis: Verwende Theorem 3.21 sowie das Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{N}$, gegeben durch

$$\mathcal{R} = \left\{ \{\varphi \in \mathbb{N} : k_i \leq \varphi(B_i) < \ell_i, i = 1, \dots, m\}, m \geq 1, B_i \in \mathcal{Q}^d, k_i, \ell_i \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\} \right\}.$$

Als mittlere Folge kann $W_n = [-n, n]^d$ verwendet werden.)

Aufgabe 4 Palmsche Verteilung

Sei $\{N_B\}$ ein stationärer Punktprozess und P_N^0 seine Palmsche Verteilung. Zeige: Wenn $\{N_B\}$ ergodisch ist, dann gilt für jedes $A \in \mathcal{N}$

$$P_N^0(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{[-n, n]^d, A}}{N_{[-n, n]^d}}.$$