Prof. Dr. V. Schmidt | SS 2011
O. Stenzel | 20.05.2011

Räumliche Statistik II
Übungsblatt 4

Präsentation der Lösungen: Fr. 27.05.2011

Aufgabe 1 Sei $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ eine beliebige beschränkte Borel–Menge mit $0 < \nu_d(B) < \infty$. Dann heisst das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_N^! : \mathcal{N} \to [0,1]$ mit

$$P_N^!(A) \;=\; \frac{1}{\lambda\,\nu_d(B)} \int_{\mathbb{N}} \sum_{n:\, s_n(\varphi)\in B} \mathbb{I}_A\big(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)}\varphi - \delta_o\big)\, P_N(\mathrm{d}\varphi)$$

die *reduzierte Palmsche Verteilung* von $\{N_B\}$. Zeige, dass $P_N^!(\cdot)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und nicht von der Wahl von B abhängt.

Aufgabe 2 Seien $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Die *Minkowski–Summe* $A \oplus B$ gegeben ist durch $A \oplus B = \{x+y :\, x \in A,\, y \in B\}$, die *Minkowski–Subtraktion* durch $A \ominus B = \big(A^c \oplus B\big)^c = \bigcap_{y\in B}(A+y)$. Weiterhin sei $\check{B} := \{-x,\; x \in B\}$. Zeige, dass

$$\left(A \ominus \check{B}\right) \oplus B \subset A \subset \left(A \oplus \check{B}\right) \ominus B.$$

Aufgabe 3 Bestimme die Palmsche Verteilung eines Gauss-Poisson Prozesses (vgl. Kapitel 3.3.3), d.h. bestimme das Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}(A)$.

Hinweis. Sei $\{N_B,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein stationärer Poissonscher Cluster–Prozess mit

$$N_B = \sum_{n=1}^{\infty} N^{(n)}_{B-S_n} \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\,, \tag{1}$$

- wobei $\{S_n\}$ ein homogener Poisson–Prozess mit der Intensität λ_0 ist
- und $\{N_B^{(1)}\}$, $\{N_B^{(2)}\}$, ... eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Punktprozessen ist, die von $\{S_n\}$ unabhängig sind und deren Intensitätsmaß $\{\mu^{(1)}(B),\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ endlich ist, d.h., $\mu^{(1)}(\mathbb{R}^d) < \infty$.

Um eine Darstellungsformel für die Palmsche Verteilung P_N^0 von $\{N_B\}$ herleiten zu können, führen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $\widetilde{P} : \mathcal{N} \to [0,1]$ ein, wobei

$$\widetilde{P}(A) = \frac{1}{\mu^{(1)}(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_A(\mathbf{T}_x\varphi)\,\varphi(\mathrm{d}x)\, P_{N^{(1)}}(\mathrm{d}\varphi) \qquad \forall\, A \in \mathcal{N} \tag{2}$$

und $P_{N^{(1)}}$ die Verteilung der Sekundärprozesse $\{N_B^{(1)}\}$, $\{N_B^{(2)}\}$, ... bezeichnet.

- Sei $\{N_B^0\}$ ein zufälliger Punktprozess mit der Palmschen Verteilung P_N^0, und sei $\{\widetilde{N}_B\}$ ein zufälliger Punktprozess mit der in (2) eingeführten Verteilung $\widetilde{P}$, der über dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum wie $\{N_B\}$ gegeben und von $\{N_B\}$ unabhängig ist.
- Dann gilt

$$\{N_B^0,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\} \stackrel{\mathrm{D}}{=} \{N_B + \widetilde{N}_B,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}\,. \tag{3}$$