Prof. Dr. V. Schmidt
O. Stenzel

SS 2011
27.05.2011

Räumliche Statistik II
Übungsblatt 5

Präsentation der Lösungen: Fr. 03.06.2011

Zur Lösung der Aufgaben steht auf der Homepage der Vorlesung die Java-Klasse `Geometry2D` zur Verfügung, die für den Umgang mit geometrischen Objekten wie Punkten, Linien und Polygonen konzipiert worden ist. Von besonderem Interesse sind die Objekte `Point`, `LineSegment` und `ConvexPolygon` mit ihren zugehörigen Methoden. Zur Generierung von Poisson-Prozessen gibt es die Java-Klasse `PoissonProcess`. Die Dateien sind nur bis zum 01.07.2011 verfügbar.

Aufgabe 1

(a) Implementiere eine Klasse, die eine Realisierung eines Poisson-Voronoi-Mosaiks (PVM) auf einem rechteckigen Beobachtungsfenster $W \subset \mathbb{R}^2$ erzeugt. Die Zellen sollen dabei Objekte der Klasse `ConvexPolygon` sein. Zur Berechnung der Voronoi-Zellen können die Methoden `intersectWithHalfplane(ConvexPolygon, LineSegment)` und `bisector(Point, Point)` verwendet werden.

(b) Die Klasse soll nun so erweitert werden, dass die Zelle um den Ursprung, sowie deren Anzahl von Eckpunkten, ihre Randlänge und ihr Flächeninhalt betrachtet werden können. Nützliche Methoden für die Implementierung sind dabei `side(Line, Point)` und `ConvexPolytope.getArea()`.

(c) Berechne nun basierend auf 10000 Realisierungen eines PVM mit Intensität $\lambda = 5 * 10^-4$ die mittlere Eckenanzahl, den mittleren Flächeninhalt und die mittlere Randlänge der den Ursprung enthaltenden Zelle. Wähle dabei das Beobachtungsfenster so groß, dass praktisch keine Randeffekte auftreten (Vorschlag $W = [-250, 250]^2$) und überprüfe dies im Programm.

(d) Vergleiche die Erwartungswerte der Stichprobenvariablen aus Teil (c) (Eckenanzahl, Flächeninhalt und Randlänge) mit den theoretischen Erwartungswerten 6, $\frac{1}{\lambda}$ bzw. $\frac{4}{\sqrt{\lambda}}$ der *typischen* Zelle entsprechen.

Aufgabe 2 Sei $\{S_n\}$ eine messbare Indizierung der Atome eines modulierten Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ in $\mathbb{R}^2$ und sei $\{\Xi_n\}$ das zugehörige Cox-Voronoi-Mosaik, d.h.,

$$\Xi_n = \{x \in \mathbb{R}^d : \ |x - S_n| \le |x - S_m| \ \forall m \neq n\}.$$

Zeige, dass die Zellen Ξ_n mit Wahrscheinlichkeit 1 beschränkte Mengen sind.

Aufgabe 3 Verallgemeinerter Satz von Campbell
Sei $f : \mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, \infty)$ messbar. Zeige, dass dann für jeden Punktprozess $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x)\varphi(dx) P_N(d\varphi) = \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} f(\varphi, x)\gamma(d(\varphi, x)).$$

Dabei sei $\gamma : \mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, \infty]$ das Campbellsche Maß.