Prof. Dr. V. Schmidt
O. Stenzel

SS 2011
10.06.2011

Räumliche Statistik II
Übungsblatt 6

Präsentation der Lösungen: Fr. 17.06.2011

Zur Lösung der Aufgabe steht auf der Homepage der Vorlesung die Java-Klasse `Geometry2D` zur Verfügung, die für den Umgang mit geometrischen Objekten wie Punkten, Linien und Polygonen konzipiert worden ist. Von besonderem Interesse sind die Objekte `Point`, `LineSegment` und `ConvexPolygon` mit ihren zugehörigen Methoden.

Aufgabe 1

(a) Implementiere den im Skript vorgestellten Algorithmus zur Simulation der typischen Zelle eines Poisson-Voronoi-Mosaiks in $\mathbb{R}^2$. Die Zelle soll vom Typ `ConvexPolygon` sein. Ferner sollen der Flächeninhalt, die Randlänge und die Eckenanzahl berechnet werden.

(b) Was ist für das Verhalten der mittleren Randlänge, der mittleren Eckenanzahl bzw. des mittleren Flächeninhalts der typischen Zelle im Vergleich zu der den Ursprung enthaltenden Zelle zu erwarten? Begründe Deine Aussage.

(c) Überprüfe die in (b) gemachte Aussage anhand von 10000 Realisierungen der typischen Zelle für $\lambda = 5 * 10^-4$.

(d) Teste mittels eines asymptotischen Tests die Hypothese, dass die Erwartungswerte der Stichprobenvariablen aus Teil(c) (Eckenanzahl, Flächeninhalt und Randlänge) den theoretischen Erwartungswerten 6, $\frac{1}{\lambda}$ bzw. $\frac{4}{\sqrt{\lambda}}$ der typischen Zelle entsprechen.

Aufgabe 2 Sei X_ℓ ein Poissonscher Geradenprozess in $\mathbb{R}^2$, der durch einen unabhängig markierten Poisson Prozess $\{(R_n, V_n)\}$ mit Intensität λ_ℓ und $V_n \sim U([0,\pi))$ induziert wird, vgl. Abschnitt 4.2.3 (2. Beispiel) im Skript.

(a) Zeige, dass $\mathbb{E}\nu_1(X_\ell \cap B)$ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ist.

(b) Zeige, dass $\mathbb{E}\nu_1(X_\ell \cap B) = \lambda_\ell$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mit $\nu_2(B) = 1$.

(c) Zeige, dass die durch X_ℓ induzierten Polygone $\{\Xi_n, n \geq 1\}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 beschränkt sind.