Prof. Dr. V. Schmidt
O. Stenzel

SS 2011
17.06.2011

Räumliche Statistik II
Übungsblatt 7

Präsentation der Lösungen: Fr. 24.06.2011

Aufgabe 1 Sei $X_\ell = \bigcup_{n=1}^{\infty} l\,(\mathbb{R}_n, V_n)$ ein Poissonscher Geradenprozess im $\mathbb{R}^2$ mit Intensität λ_ℓ, und das stationäre zufällige Maß $\{\Lambda_B\}$ sei gegeben durch

$$\Lambda_B = \lambda^{(1)}\nu_1(X_\ell \cap B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

wobei $\lambda^{(1)} > 0$. Zeige, dass die Palmsche Verteilung P_Λ^0 von $\{\Lambda_B\}$ gegeben ist durch

$$P_\Lambda^0(A) = P(\{\Lambda_B^0\} \in A) \qquad \forall A \in \mathcal{M},$$

wobei $\Lambda_B^0 = \lambda^{(1)}\nu_1((\ell_{o,V_0} \cup X_\ell) \cap B)$ und $V_0 \sim U([0,\pi))$ eine von $\{(R_n, V_n)\}$ unabhängige Zufallsvariable ist.

Aufgabe 2 Beschreibe einen Algorithmus zur Simulation der typischen Zelle eines Voronoi-Mosaiks, das durch einen Gauß-Poisson Prozess generiert wird, wobei $S^{(1)} \sim U(b(o,r))$ für ein $r > 0$.

Aufgabe 3 Sei $\{N_B\}$ ein stationärer Poissonscher Cluster–Prozess in $\mathbb{R}^d$.

(a) Zeige, dass

$$D(r) = 1 - \bigl(1 - H(r)\bigr)\bigl(1 - G(r)\bigr) \qquad \forall\, r \geq 0\,, \tag{1}$$

wobei $H : [0,\infty) \to [0,1]$ die sphärische Kontaktverteilungsfunktion von $\{N_B\}$ ist. Die in (1) betrachtete Verteilungsfunktion $G : [0,\infty) \to [0,1]$ ist gegeben durch

$$G(r) = P\Bigl(\min_{n:\widetilde{S}_n \neq o} |\widetilde{S}_n| \leq r\Bigr)\,, \tag{2}$$

wobei $\{\widetilde{S}_n\}$ eine messbare Indizierung der Atome eines zufälligen Zahlmaßes mit der Verteilung $\widetilde{P}$ ist.

(b) Sei nun $\{N_B\}$ ein Gauss-Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d$. Die Sekundärprozesse $\{N_B^{(1)}\}$, $\{N_B^{(2)}\}$, ... seien gegeben durch

$$N_B^{(n)} = \delta_o(B) + \delta_{S^{(n)}}(B) \qquad \forall\, n \geq 1,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\,, \tag{3}$$

wobei $P(S^{(n)} = \infty) = 0.5$ und $P^{S^{(n)} | S^{(n)} \neq \infty} = \mathcal{N}(0, \Sigma)$ mit

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Berechne $G(r)$.