Prof. Dr. V. Schmidt
O. Stenzel SS 2011
24.06.2011

Räumliche Statistik II
Übungsblatt 8

Präsentation der Lösungen: Fr. 01.07.2011

Aufgabe 1

(a) Zeige: Wenn $\{N_B\}$ ein Poisson–Prozess mit dem Intensitätsmaß μ ist, dann gilt $\alpha_2 = \mu \times \mu$, d.h.,

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \mu(B_1)\,\mu(B_2) \tag{1}$$

für beliebige $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

(b) Zeige: Wenn $\{N_B,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Cox–Prozess mit dem zufälligen Intensitätsmaß $\{\Lambda_B,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ist, dann gilt

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \int_{\mathbb{M}} \eta(B_1)\,\eta(B_2)\,P_\Lambda(\mathrm{d}\eta) \qquad \forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\,. \tag{2}$$

Aufgabe 2 Bestimme die Paarkorrelationsfunktion $g : [0,\infty] \to [0,\infty)$ für einen homogenen Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$.

Hinweis. (Darf ohne Beweis verwendet werden.)
Sei $\{N_B,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein stationärer Punktprozess mit der Intensität $\lambda \in (0,\infty)$, so dass $\mathbb{E}\, N_B^2 < \infty$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.

Das Maß $K : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ mit

$$K(B) = \frac{\mu^!(B)}{\lambda} \tag{3}$$

wird das *zweite reduzierte Momentenmaß* von $\{N_B\}$ genannt, wobei $\mu^! : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ das Intensitätsmaß der reduzierten Palmschen Verteilung $P_N^!$ von $\{N_B\}$ ist, d.h.,

$$\mu^!(B) = \int_{\mathbb{N}} \varphi(B)\,P_N^!(\mathrm{d}\varphi) \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\,. \tag{4}$$

Die Funktion $K : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $K(r) = K(B(o,r))$ heißt die *Ripleysche* K–*Funktion*. Wenn die Ripleysche K–Funktion differenzierbar ist, dann ergibt sich unmittelbar aus den entsprechenden Definitionsgleichungen, dass sich die Paarkorrelationsfunktion $g(r)$ durch die Ableitung $\mathrm{d}K(r)/\mathrm{d}r$ der K–Funktion ausdrücken lässt. Und zwar gilt dann

$$g(r) = \frac{\mathrm{d}K(r)/\mathrm{d}r}{d\,\kappa_d r^{d-1}} \qquad \forall\, r > 0\,. \tag{5}$$

Aufgabe 3

(a) Zeige, dass die K–Funktion eines Matérn-Cluster-Prozesses differenzierbar ist.

(b) Erzeuge auf dem Beobachtungsfenster $W = [0, 250]^2$ mit dem `R`-Paket Spatstat eine Realisierung eines Matérn-Cluster-Prozesses und plotte die geschätzte Paarkorrelationsfunktion (ebenfalls mit Spatstat). Dabei sei der Primärprozess ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda_0 = 0.001$, der Radius sei $R = 10$ und die Intensität der Sekundärprozesse sei $\lambda^{(1)} = 0.03$ Interpretiere das Ergebnis.