Prof. Dr. V. Schmidt SS 2011
O. Stenzel 01.07.2011

Räumliche Statistik II
Übungsblatt 9

Präsentation der Lösungen: Fr. 08.07.2011

Aufgabe 1 Sei $\{N_B\}$ ein Cox–Prozess, so dass die Realisierungen des zufälligen Intensitätsmaßes $\{\Lambda_B\}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 absolutstetig bezüglich des d–dimensionalen Lebesgue–Maßes sind. D.h., es gibt ein zufälliges Feld $\{\lambda_x,\, x \in \mathbb{R}^d\}$, so dass

$$\Lambda_B = \int_B \lambda_x \, \mathrm{d}x \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)\,. \tag{1}$$

Das zufällige Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ sei stationär. Dann ist $\{N_B\}$ ein stationärer Cox–Prozess. Zeige mit Korollar 4.3, dass

$$\rho_2(x_1, x_2) = \mathbb{E}\left(\lambda_o \lambda_{x_2 - x_1}\right) \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d \text{ mit } x_1 \neq x_2. \tag{2}$$

Hinweis. (Darf ohne Beweis verwendet werden.)
Wir betrachten den Fall, dass das zweite faktorielle Momentenmaß α_2 des zufälligen Zählmaßes $\{N_B\}$ absolutstetig bezüglich des $2d$–dimensionalen Lebesgue–Maßes ist, d.h., α_2 hat eine Dichte $\rho_2 : \mathbb{R}^{2d} :\to [0, \infty)$, so dass

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \int_{B_1} \int_{B_2} \rho_2(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \qquad \forall\; B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)\,. \tag{3}$$

Die in (3) gegebene Funktion ρ_2 wird die *Produktdichte* zweiter Ordnung von $\{N_B\}$ genannt.

- Wenn $\{N_B\}$ ein stationäres zufälliges Zählmaß mit der Intensität $\lambda \in (0, \infty)$ ist, dann hängt die Produktdichte $\rho_2(x_1, x_2)$ nur von der Differenz $x_2 - x_1$ ab. Wenn $\{N_B\}$ stationär und isotrop ist, dann gilt

$$\rho_2(x_1, x_2) = \rho_2(r)\,, \qquad \text{wobei } r = |x_2 - x_1|. \tag{4}$$

- Im letzeren Fall wird darüber hinaus die *Paarkorrelationsfunktion* $g : [0, \infty] \to [0, \infty)$ betrachtet, wobei

$$g(r) = \frac{\rho_2(r)}{\lambda^2} \qquad \forall\, r \geq 0\,. \tag{5}$$

Aufgabe 2 Sei $\{N_B\}$ ein modulierter Poisson–Prozess ist, wobei das zufällige Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ durch

$$\lambda_x = \begin{cases} \lambda_1\,, & \text{falls } x \in \Xi, \\ \lambda_2\,, & \text{falls } x \not\in \Xi. \end{cases} \tag{6}$$

gegeben sei.

Dabei seien $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$ beliebige Zahlen mit $\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$, und für ein $r_0 > 0$ gelte $\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(S_i, r_0)$, wobei $\{S_n\}$ ein homogener Poisson–Prozess mit der Intenstität λ_0 sei. Zeige, dass die Paarkorrelationsfunktion $g(r)$ von $\{N_B\}$ gegeben ist durch

$$g(r) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 p_{o,x_2 - x_1} + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 p_o + \lambda_2^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 p_o^2 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 p_o + \lambda_2^2} \qquad \forall\, r = |x_2 - x_1| > 0\,, \tag{7}$$

wobei

$$p_o = P(o \in \Xi) \qquad \text{und} \qquad p_{o,x_2-x_1} = P(o \in \Xi, x_2 - x_1 \in \Xi).$$