



---

# Räumliche Statistik

für Punktprozesse und weitere Modelle der stochastischen Geometrie

---

Universität Ulm  
Institut für Stochastik

Vorlesungsskript  
Prof. Dr. Volker Schmidt  
Stand: Sommersemester 2011

ULM, IM APRIL 2011

Dieses Exemplar wurde aus Studiengebühren finanziert.

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>  | <b>9</b>  |
| <b>2</b> | <b>Poissonsche Zählmaße</b>  | <b>11</b> |
| 2.1      | Definitionen und grundlegende Eigenschaften . . . . .                                    | 11        |
| 2.1.1    | Existenz und Eindeutigkeit von zufälligen Zählmaßen . . . . .                            | 11        |
| 2.1.2    | Poisson-Prozesse als zufällige Zählmaße . . . . .  | 12        |
| 2.1.3    | Messbare Indizierung der Atome . . . . .   | 16        |
| 2.1.4    | Simulationsalgorithmus; Akzeptanz- und Verwerfungsmethode . . . . .                      | 18        |
| 2.1.5    | Transformationssätze . . . . .   | 19        |
| 2.2      | Homogene Poisson-Prozesse . . . . .  | 22        |
| 2.2.1    | Radiale Simulation . . . . .   | 22        |
| 2.2.2    | Schätzung der Intensität; Signifikanztests . . . . .                                     | 23        |
| 2.3      | Poisson-Prozesse mit absolutstetigem Intensitätsmaß . . . . .                            | 25        |
| 2.3.1    | Ortsabhängige Verdünnung von Poisson-Prozessen; Simulationsalgorithmus . . . . .         | 25        |
| 2.3.2    | Nichtparametrische Schätzung der Intensitätsfunktion; Randkorrektur . . . . .            | 27        |
| <b>3</b> | <b>Zufällige Punktprozesse</b>   | <b>30</b> |
| 3.1      | Definitionen und grundlegende Eigenschaften . . . . .                                    | 30        |
| 3.1.1    | Intensitätsmaß und Campbellsches Theorem . . . . .                                       | 30        |
| 3.1.2    | Erzeugendes Funktional . . . . .   | 31        |
| 3.1.3    | Laplace-Funktional . . . . .   | 34        |
| 3.1.4    | Stationarität und Isotropie . . . . .  | 35        |
| 3.2      | Cox-Prozesse . . . . .   | 37        |
| 3.2.1    | Simulationsalgorithmus und grundlegende Eigenschaften . . . . .                          | 37        |
| 3.2.2    | Absolutstetiges zufälliges Intensitätsmaß; Schätzung der Intensität . . . . .            | 40        |
| 3.2.3    | Gemischte Poisson-Prozesse, Neyman-Scott-Prozesse, modulierte Poisson-Prozesse . . . . . | 41        |
| 3.2.4    | Varianz und asymptotische Normalverteiltheit des Intensitätsschätzers . . . . .          | 45        |
| 3.3      | Cluster-Prozesse . . . . .   | 53        |
| 3.3.1    | Definition und erzeugendes Funktional . . . . .  | 53        |
| 3.3.2    | Poissonsche Cluster-Prozesse; Eigenschaften des Intensitätsschätzers . . . . .           | 57        |
| 3.3.3    | Beispiele: Gauß-Poisson-Prozesse, Neyman-Scott-Prozesse . . . . .                        | 60        |
| 3.4      | Ergodizität; starke Konsistenz des Intensitätsschätzers . . . . .                        | 62        |
| 3.4.1    | Dynamische Systeme; individueller Ergodensatz . . . . .                                  | 62        |
| 3.4.2    | Ergodizitätskriterien . . . . .  | 66        |
| 3.4.3    | Ergodizität von Cox-Prozessen; Beispiele . . . . .                                       | 69        |
| 3.4.4    | Ergodische Cluster-Prozesse . . . . .  | 72        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.5      | Gibbs-Prozesse . . . . .  | 73         |
| 3.5.1    | Endliche Gibbs-Prozesse . . . . .   | 73         |
| 3.5.2    | Bedingte Gibbs-Prozesse . . . . .   | 76         |
| 3.5.3    | Potenzialfunktionen höherer Ordnung; bedingte Intensität . . . . .                              | 79         |
| 3.5.4    | Parametrische Familien von Gibbs-Prozessen; Pseudolikelihood-Funktion . . . . .                 | 82         |
| 3.5.5    | Maximum-Pseudolikelihood-Schätzer; Exponentialfamilien . . . . .                                | 87         |
| 3.6      | Markov-Ketten von Gibbs-Prozessen . . . . .   | 90         |
| 3.6.1    | Definition und grundlegende Eigenschaften . . . . .   | 91         |
| 3.6.2    | Harris-Rekurrenz und Drift-Kriterien für Ergodizität . . . . .                                  | 94         |
| 3.6.3    | MCMC-Simulation; Metropolis-Hastings-Algorithmus . . . . .                                      | 97         |
| 3.6.4    | Monte-Carlo-Likelihood-Inferenz . . . . .   | 100        |
| <b>4</b> | <b>Palmsche Verteilung und weitere Kenngrößen von Punktprozessen</b>                            | <b>105</b> |
| 4.1      | Palmsche Verteilung . . . . .   | 105        |
| 4.1.1    | Definition durch Intensitätsquotienten; typischer Punkt . . . . .                               | 105        |
| 4.1.2    | Lokale Charakterisierung . . . . .  | 108        |
| 4.1.3    | Reduzierte Palmsche Verteilung; Satz von Slivnyak . . . . .                                     | 112        |
| 4.1.4    | Typische Zelle von Poisson-Voronoi-Mosaiken; Simulationsalgorithmus . . . . .                   | 113        |
| 4.2      | Campbellsche Maße; Beispiele von Palmschen Verteilungen . . . . .                               | 115        |
| 4.2.1    | Produktdarstellung des reduzierten Campbellschen Maßes von Poisson-Prozessen . . . . .          | 115        |
| 4.2.2    | Palmsche Verteilung von zufälligen Maßen; Cox-Prozesse . . . . .                                | 118        |
| 4.2.3    | Beispiele: modulierte Poisson-Prozesse, Cox-Prozesse auf Poissonschen Geradensystemen . . . . . | 121        |
| 4.2.4    | Typische Zelle von Cox-Voronoi-Mosaiken; Simulationsalgorithmen . . . . .                       | 124        |
| 4.2.5    | Poissonsche Cluster-Prozesse . . . . .  | 126        |
| 4.2.6    | Gibbs-Prozesse . . . . .  | 129        |
| 4.3      | Weitere Kenngrößen von Punktprozessen und ihre Schätzer . . . . .                               | 129        |
| 4.3.1    | Kontaktverteilungsfunktion; Minus-Sampling . . . . .  | 130        |
| 4.3.2    | Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion; randkorrigiertes Minus-Sampling . . . . .         | 132        |
| 4.3.3    | Höhere Momentenmaße . . . . .   | 136        |
| 4.3.4    | Zweites reduziertes Momentenmaß; Ripleysche K-Funktion . . . . .                                | 138        |
| 4.3.5    | Produktdichte und Paarkorrelationsfunktion; randkorrigierte Kernschätzer . . . . .              | 141        |
| 4.3.6    | Beispiele: Poisson-, Cox- und Cluster-Prozesse; Matérn-Hardcore-Prozesse . . . . .              | 142        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>5</b> | <b>Markierte Punktprozesse</b>   | <b>147</b> |
| 5.1      | Definitionen und grundlegende Eigenschaften . . . . .  | 147        |
| 5.1.1    | Markenraum; unabhängige Markierung . . . . .   | 147        |
| 5.1.2    | Intensitätsmaß und Campbellsches Theorem . . . . .   | 148        |
| 5.1.3    | Stationarität und Ergodizität . . . . .  | 149        |
| 5.2      | Palmsche Verteilungen . . . . .  | 151        |
| 5.2.1    | Definition durch Intensitätsquotienten; typischer Punkt . . . . .                            | 151        |
| 5.2.2    | Lokale Charakterisierung; Zwei-Punkt-Palm-Verteilung . . . . .                               | 153        |
| 5.2.3    | Palmsche Markenverteilung . . . . .  | 156        |
| 5.3      | Weitere Kenngrößen von markierten Punktprozessen und ihre Schätzer . . . . .                 | 157        |
| 5.3.1    | Markenkovarianzfunktion . . . . .  | 158        |
| 5.3.2    | Bedingte K-Funktionen und bedingte Paarkorrelationsfunktionen . . . . .                      | 160        |
| 5.3.3    | Diversitätsindizes . . . . .   | 164        |
| 5.4      | Eigenschaften von Palmschen Verteilungen bei allgemeinem Markenraum . . . . .                | 166        |
| 5.4.1    | Umkehrformel; Mittelwertformel für Voronoi-Mosaik . . . . .                                  | 166        |
| 5.4.2    | Austausch-Formel von Neveu . . . . .   | 168        |
| <b>6</b> | <b>Keim-Korn-Modelle</b>   | <b>170</b> |
| 6.1      | Mengensysteme des $\mathbb{R}^d$ und ihre topologischen Eigenschaften . . . . .              | 171        |
| 6.1.1    | Offene und abgeschlossene Mengen; Kompaktheit und Konvexität . . . . .                       | 171        |
| 6.1.2    | Schnitt- $\sigma$ -Algebra; Fell-Topologie . . . . .   | 172        |
| 6.1.3    | Hausdorff-Metrik der kompakten Mengen . . . . .  | 174        |
| 6.1.4    | Messbarkeit und Halbstetigkeit von Abbildungen in allgemeinen topologischen Räumen . . . . . | 177        |
| 6.1.5    | Konvergenzkriterien; Stetigkeitseigenschaften von Abbildungen in $\mathcal{F}$ . . . . .     | 179        |
| 6.2      | Zufällige abgeschlossene Mengen . . . . .  | 183        |
| 6.2.1    | Definition und Beispiele . . . . .   | 183        |
| 6.2.2    | Verteilung und Kapazitätsfunktional . . . . .  | 186        |
| 6.2.3    | Stationarität und Isotropie; Ergodizität . . . . .   | 189        |
| 6.2.4    | Kenngrößen von stationären ZAM und ihre Schätzer . . . . .                                   | 191        |
| 6.3      | Innere Volumina . . . . .  | 196        |
| 6.3.1    | Additive Funktionale; Steiner-Formel . . . . .   | 196        |
| 6.3.2    | Intensitäten der inneren Volumina von stationären ZAM . . . . .                              | 201        |
| 6.3.3    | Kinematische Hauptformel; Schätzung der $j$ -Intensitäten . . . . .                          | 205        |
| 6.4      | Gewichtete Mittelwertschätzer für stationäre Zufallsfelder . . . . .                         | 208        |
| 6.4.1    | Regularitätsbedingungen an Beobachtungsfenster und Gewichtsfunktion . . . . .                | 208        |
| 6.4.2    | Erwartungstreue und Schätzvarianz; $L_2$ -Konsistenz . . . . .                               | 211        |
| 6.4.3    | Schätzung der asymptotischen Kovarianzmatrix . . . . .                                       | 213        |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 6.5   | Boolesches Modell . . . . .  | 214 |
| 6.5.1 | Definitionen und grundlegende Eigenschaften . . . . .                                    | 214 |
| 6.5.2 | Formeln für Kapazitätsfunktional, Volumenanteil und Kontaktverteilungsfunktion . . . . . | 217 |
| 6.5.3 | Boolesches Modell mit konvexen Körnern . . . . .   | 220 |
| 6.5.4 | Minimum-Kontrast-Schätzer . . . . .  | 224 |

## Literatur

- [1] Baddeley, A., Bárány, I., Schneider, R., Weil, W. (Hrsg.)  
Stochastic Geometry. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1892, Springer, Berlin 2007
- [2] Baddeley, A., Gregori, P., Mateu, J., Stoica, R., Stoyan, D. (Hrsg.)  
Case Studies in Spatial Point Process Modeling. Lecture Notes in Statistics, Vol. 185, Springer, New York 2006
- [3] Baddeley, A., Vedel-Jensen, E.B.  
Stereology for Statisticians. Chapman & Hall / CRC, Boca Raton 2005
- [4] Barndorff-Nielsen, O.E., Kendall, W.S., van Lieshout, M.N.M. (Hrsg.)  
Stochastic Geometry; Likelihood and Computation. Chapman & Hall / CRC, Boca Raton 1999
- [5] Benes, J., Rataj, J.  
Stochastic Geometry. Kluwer, Boston 2004
- [6] Bolobás, B.  
Random Graphs. Cambridge University Press, Cambridge 2001
- [7] Bolobás, B., Riordan, O.  
Percolation. Cambridge University Press, Cambridge 2006
- [8] Cressie, N.A.C.  
Statistics for Spatial Data. Revised ed., J. Wiley & Sons, New York 1993
- [9] Daley, D.J., Vere-Jones, D.  
An Introduction to the Theory of Point Processes, Vol. I/II. Springer, New York 2005/08
- [10] Diggle, P.J.  
Statistical Analysis of Spatial Point Patterns. Arnold, London 2003
- [11] Durrett, R.  
Random Graph Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge 2007
- [12] Franceschetti, M., Meester, R.  
Random Networks for Communication. Cambridge University Press, Cambridge 2008
- [13] Gelfand, A.E., Diggle, P.J., Fuentes, M., Guttorp, P.  
Handbook of Spatial Statistics. Chapman & Hall / CRC, Boca Raton 2010
- [14] Hall, P.  
Introduction to the Theory of Coverage Processes. J. Wiley & Sons, New York 1988
- [15] Harding, E.F., Kendall, D.G. (Hrsg.)  
Stochastic Geometry. A Tribute to the Memory of Rollo Davidson. J. Wiley & Sons, London 1974
- [16] Illian, J., Penttinen, A., Stoyan, H., Stoyan, D.  
Statistical Analysis and Modelling of Spatial Point Patterns. J. Wiley & Sons, Chichester 2008
- [17] Janson, S., Luczak, T., Rucinski, A.  
Random Graphs. J. Wiley & Sons, New York 2000
- [18] Jeulin, D. (Hrsg.)  
Advances in Theory and Applications of Random Sets. World Scientific Publishers, Singapore 1997
- [19] Kallenberg, O.  
Foundations of Modern Probability. Springer, New York 2001

- [20] Kendall, W.S., Molchanov, I. (Hrsg.)  
New Perspectives in Stochastic Geometry. Springer, Berlin 2010
- [21] Kingman, J.F.C.  
Poisson Processes. Oxford University Press, Oxford 1993
- [22] König, D., Schmidt, V.  
Zufällige Punktprozesse. Teubner, Stuttgart 1992
- [23] Kroese, D.P., Taimre, T., Botev, Z.I.  
Handbook of Monte Carlo Methods. J. Wiley & Sons, Hoboken (N.J.) 2011
- [24] Lawson, A.B.  
Statistical Methods in Spatial Epidemiology. J. Wiley & Sons, Chichester 2006
- [25] Matheron, G.  
Random Sets and Integral Geometry. J. Wiley & Sons, New York 1975
- [26] Mecke, K. Stoyan, D. (Hrsg.)  
Statistical Physics and Spatial Statistics. The Art of Analyzing and Modeling Spatial Structures and Pattern Formation. Springer, Berlin 2000
- [27] Mecke, K. Stoyan, D. (Hrsg.)  
Morphology of Condensed Matter, Physics and Geometry of Spatially Complex Systems. Springer, Berlin 2002
- [28] Meester, R., Roy, R.  
Continuum Percolation. Cambridge University Press, Cambridge 1996
- [29] Molchanov, I.  
Statistics of the Boolean Model for Practitioners and Mathematicians. J. Wiley & Sons, Chichester 1997
- [30] Molchanov, I.  
Theory of Random Sets. Springer, London 2005
- [31] Møller, J. (Ed.)  
Spatial Statistics and Computational Methods. Springer, New York 2003
- [32] Møller, J., Waagepetersen, R.P.  
Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes. Chapman & Hall / CRC, Boca Raton 2004
- [33] Ohser, J., Mücklich, F.  
Statistical Analysis of Microstructures in Materials Science. J. Wiley & Sons, Chichester 2000
- [34] Ohser, J., Schladitz, K.  
3D Images of Materials Structures – Processing and Analysis. Wiley – VCH, Weinheim 2009
- [35] Penrose, M.D.  
Random Geometric Graphs. Oxford University Press, Oxford 2003
- [36] Ripley, B.D.  
Spatial Statistics. J. Wiley & Sons, New York 1981
- [37] Schneider, R., Weil, W.  
Stochastic and Integral Geometry. Springer, Heidelberg 2008
- [38] Serra, J.  
Image Analysis and Mathematical Morphology. Academic Press, London 1982

- [39] Soille, P.  
Morphological Image Analysis. Springer, Berlin 1999
- [40] Stoyan, D., Kendall, W.S., Mecke, J.  
Stochastic Geometry and its Applications. J. Wiley & Sons, Chichester 1995
- [41] Stoyan, D., Stoyan, H.  
Fractals, Random Shapes and Point Fields. J. Wiley & Sons, Chichester 1994
- [42] Torquato, S.  
Random Heterogeneous Materials. Microstructure and Macroscopic Properties. Springer, New York 2002
- [43] van Lieshout, M.N.M.  
Markov Point Processes and Their Applications. Imperial College Press, London 2000

## 1 Einleitung

Die Vorlesung gibt eine Einführung in einige grundlegende Ansätze der räumlichen Statistik, die auf Modellen der stochastischen Geometrie beruhen. Dabei werden Eigenschaften dieser Modelle, Algorithmen zu ihrer Simulation sowie hierauf aufbauende statistische Methoden diskutiert.

Schwerpunkte der Vorlesung sind die folgenden Modelle:

- Poissonsche Punktprozesse
- Stationäre zufällige Mengen, insbesondere
- Stationäre Punktprozesse und deren Palmische Verteilung
- Zufällige Mosaike
- Keim–Korn–Modelle

Typische Realisierungen dieser Modelle sind in den Abbildungen 1 – 3 dargestellt.

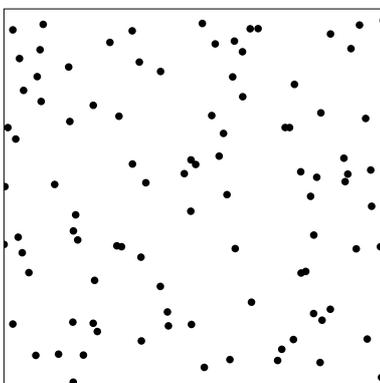


Abbildung 1: Poissonscher Punktprozess

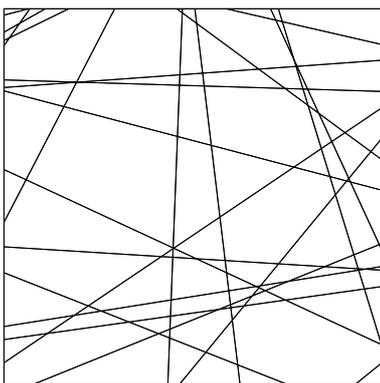


Abbildung 2: Poissonsches Geraden-Mosaik

Die Kapitel 1 – 4 des Skriptes betreffen vorwiegend denjenigen Teil der Vorlesung, der zum ersten Mal im Wintersemester 2006/07 für Studenten und Doktoranden der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften der Universität Ulm gehalten wurde.

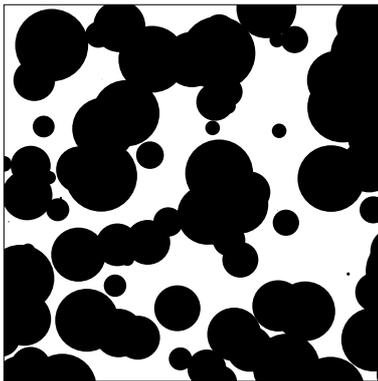


Abbildung 3: Boolesches (Keim-Korn-) Modell

Das Hauptanliegen dieser ersten 4 Kapitel ist es, eine Einführung in die Modellierung, Simulation und Statistik von unregelmäßigen Punktmustern zu geben. Dabei werden verschiedene grundlegende Klassen von zufälligen Punktprozessen zur Illustration der Ergebnisse diskutiert. Insbesondere wird dies für homogene und inhomogene Poissonsche Punktprozesse getan. Darüber hinaus werden weitergehende Ergebnisse für einige ausgewählte Beispiele von Cox-Prozessen und von Poissonschen Cluster- bzw. Hardcore-Prozessen vorgestellt. Die Abschnitte 3.5 und 3.6 über Gibbssche Punktprozesse sind erst später (im Wintersemester 2007/08) hinzugekommen.

Für die Vorlesungen zur räumlichen Statistik, die zum erstem Mal im Sommersemester 2007 gehalten wurden, sind das Kapitel 5 sowie die bisher vorliegenden Abschnitte 6.1 – 6.4 von Kapitel 6 des Skriptes erarbeitet worden. Sie betreffen vor allem Fragestellungen zur Modellierung, Simulation und Statistik für markierte Punktprozesse bzw. Keim-Korn-Modelle und zufällige Mosaik vom Poisson-Typ behandelt. Diese Modellklassen sind für praktische Anwendungen besonders relevant, z.B. bei der statistischen Analyse der geometrischen Struktureigenschaften von makroskopisch-geographischen Bilddaten bzw. von mikroskopischen Bilddaten in 2D oder 3D.

Verweise auf die Vorlesungsmanuskripte „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ bzw. „Wahrscheinlichkeitstheorie“ werden wir mit dem Zusatz „WR“ bzw. „WT“ vor der Nummer der zitierten Abschnitte, Lemmata, Theoreme, Korollare bzw. Formeln kennzeichnen.

Gelegentlich werden wir auch auf Abschnitte, Lemmata, Theoreme, Korollare bzw. Formeln aus dem Skript zur Vorlesung „Markov Chains and Monte-Carlo Simulation“ verweisen, wobei diese Verweise dann mit dem Zusatz „MC“ gekennzeichnet werden.

## 2 Poissonsche Zählmaße

### 2.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

#### 2.1.1 Existenz und Eindeutigkeit von zufälligen Zählmaßen

- Zur Erinnerung: Sei  $d \geq 1$  eine beliebige natürliche Zahl. Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  der Borel-Mengen im  $d$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$  ist die kleinste Familie  $\mathcal{G}$  von Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ , die
  - alle Quader der Form  $B = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]$  für beliebige  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  mit  $a_i \leq b_i$  für  $i = 1, \dots, d$  enthält und
  - die abgeschlossen ist bezüglich der Bildung des Komplementes sowie der Vereinigung von abzählbar vielen Mengen aus  $\mathcal{G}$ , d.h., für beliebige  $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}$  gilt  $\mathbb{R}^d \setminus A \in \mathcal{G}$  und  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{G}$ .
- Das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß  $\nu_d : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  wird eindeutig bestimmt durch seine Werte  $\nu_d(B) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$  für alle Borel-Mengen der Form  $B = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d] \in \mathcal{Q}^d$ , wobei  $\mathcal{Q}^d$  die Familie der (beschränkten) halboffenen  $d$ -dimensionalen Quader in  $\mathbb{R}^d$  ist, d.h.,

$$\mathcal{Q}^d = \{B \subset \mathbb{R}^d : B = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d], a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i \forall i = 1, \dots, d\}. \quad (1)$$

#### Definition

- Sei  $\mathbb{N}$  die Familie aller lokal endlichen Zählmaße  $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$ , d.h., es gilt  $\varphi(B) < \infty$  für jedes  $B \in \mathcal{Q}^d$  und  $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)$  für paarweise disjunkte  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
- Außerdem sei  $\mathcal{N}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\mathbb{N}$ , so dass  $\varphi \mapsto \varphi(B)$  für jedes beschränkte  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  eine  $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Abbildung ist.
- Ein *zufälliges Zählmaß*  $N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  ist eine Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Werten in dem messbaren Raum  $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ , d.h.,  $N$  ist ein (mengen-indizierter) stochastischer Prozess  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  über  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , so dass  $\{N_B(\omega), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  für jedes  $\omega \in \Omega$  ein lokal endliches Zählmaß aus  $\mathbb{N}$  ist.

**Theorem 2.1** Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein zufälliges Zählmaß. Dann ist die Verteilung von  $\{N_B\}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß über  $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ , das eindeutig bestimmt ist durch die Familie der „endlich-dimensionalen“ Wahrscheinlichkeiten  $\{P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) : n \geq 1, k_1, \dots, k_n \geq 0, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d\}$ , wobei

$$P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) = P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n).$$

Der *Beweis* von Theorem 2.1 kann mit Hilfe des Satzes über monotone Klassen (vgl. Lemma 3.5) geführt werden. Dabei genügt es, die Wahrscheinlichkeiten  $P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n)$  für paarweise disjunkte Quader  $B_1, \dots, B_n$  zu betrachten. Außerdem gilt der folgende (Existenz-) Satz von Kolmogorov für zufällige Zählmaße, wenn die Familie der Wahrscheinlichkeiten  $P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n)$  den Symmetrie-, Verträglichkeits-, Additivitäts- bzw. Stetigkeitsbedingungen (2) – (5) genügt.

#### Theorem 2.2

- Sei  $\{P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) : n \geq 1, k_1, \dots, k_n \geq 0, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d\}$  eine Familie von Wahrscheinlichkeiten, so dass für jedes  $n \geq 1$

$$P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) = P_{B_{\pi(1)}, \dots, B_{\pi(n)}}(k_{\pi(1)}, \dots, k_{\pi(n)}) \quad (2)$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{B_1, \dots, B_n, B_{n+1}}(k_1, \dots, k_n, k) = P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) \quad (3)$$

für jede Permutation  $\pi$  von  $\{1, \dots, n\}$ , für jedes  $n$ -Tupel  $k_1, \dots, k_n \geq 0$  von nichtnegativen ganzen Zahlen und für beliebige halboffene  $d$ -dimensionale Quader  $B_1, \dots, B_n, B_{n+1} \in \mathcal{Q}^d$ .

- Außerdem gelte

$$\sum_{k_j + \dots + k_n = k, k_j, \dots, k_n \geq 0} P_{B_1, \dots, B_{j-1}, B_j, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) = P_{B_1, \dots, B_{j-1}, \bigcup_{i=j}^n B_i}(k_1, \dots, k_{j-1}, k) \quad (4)$$

für beliebige  $j, n \geq 1$  mit  $j \leq n$ , für beliebige  $k_1, \dots, k_{j-1} \geq 0$  und paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d$ , und es gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{[x_1 - \frac{1}{n}, x_1) \times \dots \times [x_d - \frac{1}{n}, x_d)}(0) = 1 \quad (5)$$

für jedes  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ .

- Dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und ein zufälliges Zählmaß  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  über diesem Wahrscheinlichkeitsraum, so dass  $\{P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) : n \geq 1, k_1, \dots, k_n \geq 0, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d\}$  die endlich-dimensionalen Wahrscheinlichkeiten von  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  sind.

Der Beweis von Theorem 2.2 beruht ebenfalls auf Standardtechniken der Maßtheorie, vgl. z.B. Kallenberg (2001), S. 115–116.

### 2.1.2 Poisson-Prozesse als zufällige Zählmaße

Wir führen nun den Begriff des Poissonschen Zählmaßes im  $d$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$  ein.

**Definition** Sei  $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  die Familie aller beschränkten Borel-Mengen in  $\mathbb{R}^d$  und sei  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  ein beliebiges lokal-endliches Maß, d.h.,  $\mu(B) < \infty$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .

- Man sagt, dass  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein *Poissonsches Zählmaß* mit dem *Intensitätsmaß*  $\mu$  ist, wenn
  1.  $N_{B_1}, N_{B_2}, \dots$  unabhängige Zufallsvariablen sind für paarweise disjunkte  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  und
  2.  $N_B \sim \text{Poi}(\mu(B))$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .
- Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass das Intensitätsmaß  $\mu$  proportional zum  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maß  $\nu_d$  ist, d.h., für eine Konstante  $\lambda \in (0, \infty)$  gilt

$$\mu(B) = \lambda \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (6)$$

dann sagt man, dass  $\{N_B\}$  ein *homogenes Poissonsches Zählmaß* mit der *Intensität*  $\lambda$  (bzw. kurz ein *homogener Poisson-Prozess*) im  $\mathbb{R}^d$  ist.

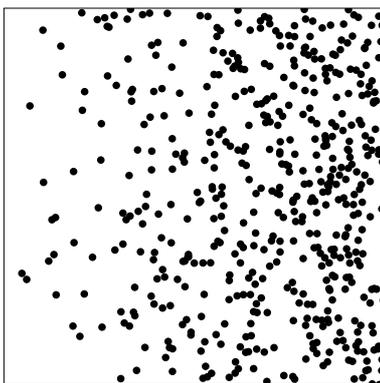


Abbildung 4: Inhomogener Poisson-Prozess

**Beachte**

- Aus Theorem 2.1 ergibt sich, dass die Bedingungen 1 und 2 in der Definition des Poisson-Prozesses durch die folgenden (scheinbar schwächeren) Bedingungen ersetzt werden können:
  - 1\*. Die Zufallsvariablen  $N_{B_1}, N_{B_2}, \dots$  sind unabhängig für paarweise disjunkte  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{Q}^d$  und
  - 2\*.  $N_B \sim \text{Poi}(\mu(B))$  gilt für jedes  $B \in \mathcal{Q}^d$ .
- Wenn das Intensitätsmaß  $\mu$  absolutstetig bezüglich des  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes ist, d.h., wenn es eine Borel-messbare Funktion  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  gibt, so dass

$$\mu(B) = \int_B \lambda(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (7)$$

dann wird  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  die *Intensitätsfunktion* des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  genannt. Die Intensitätsfunktion des Poisson-Prozesses in Abbildung 4 ist gegeben durch

$$\lambda(x_1, x_2) = 0.001 \cdot x_1 \quad \forall x_1 > 0.$$

Wir diskutieren zunächst einige elementare Eigenschaften von Poisson-Prozessen im  $\mathbb{R}^d$ .

**Theorem 2.3** Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ .

- Dann gilt

$$P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n) = \frac{\mu^{k_1}(B_1) \dots \mu^{k_n}(B_n)}{k_1! \dots k_n!} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \mu(B_i)\right) \quad (8)$$

für beliebige  $n \geq 1$ ,  $k_1, \dots, k_n \geq 0$  und paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .

- Außerdem genügen die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k)$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \mu(B) < \infty$  und für paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $\bigcup_{i=1}^n B_i = B$  einer Multinomialverteilung, d.h., es gilt

$$P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k) = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!} \frac{\mu^{k_1}(B_1) \dots \mu^{k_n}(B_n)}{\mu^k(B)} \quad (9)$$

für beliebige  $k, k_1, \dots, k_n \geq 0$  mit  $k = k_1 + \dots + k_n$ .

Der *Beweis* von Theorem 2.3 ergibt sich unmittelbar aus den Bedingungen 1 und 2 in der Definition des Poisson-Prozesses.

Mit Hilfe der Theoreme 2.1 und 2.3 lässt sich eine einfache Methode zur Konstruktion von Poisson-Prozessen mit endlichem Intensitätsmaß herleiten.

**Korollar 2.1** Sei  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$  ein beliebiges Maß mit  $0 < \mu(\mathbb{R}^d) < \infty$ , und  $N : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  bzw.  $S_1, S_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  seien unabhängige Zufallsvariablen mit

$$N \sim \text{Poi}(\mu(\mathbb{R}^d)), \quad S_i \sim \frac{\mu(\cdot)}{\mu(\mathbb{R}^d)} \quad \forall i \geq 1. \quad (10)$$

Dann ist das zufällige Zählmaß  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit

$$N_B = \#\{i : 1 \leq i \leq N, S_i \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (11)$$

ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ .

**Beweis**

- Mit der Schreibweise

$$p(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\mathbb{R}^d)} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (12)$$

ergibt sich aus (10) und (11), dass

$$P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n \mid N = k) = \frac{k!}{k_0!k_1! \dots k_n!} p^{k_0}(B_0) p^{k_1}(B_1) \dots p^{k_n}(B_n)$$

für jedes  $n \geq 1$ , für beliebige, paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und für  $k_0, k_1, \dots, k_n \geq 0$  mit  $k = k_0 + k_1 + \dots + k_n$ , wobei  $B_0 = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i$ .

- Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n) &= \sum_{k=k_1+\dots+k_n}^{\infty} P(N = k) P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n \mid N = k) \\ &= \sum_{k=k_1+\dots+k_n}^{\infty} \frac{e^{-\mu(\mathbb{R}^d)} \mu^k(\mathbb{R}^d)}{k!} \frac{k!}{(k-k_1-\dots-k_n)!k_1! \dots k_n!} p^{k-k_1-\dots-k_n}(B_0) p^{k_1}(B_1) \dots p^{k_n}(B_n) \\ &= \sum_{k=k_1+\dots+k_n}^{\infty} \frac{e^{-\mu(B_0)} \mu^{k-k_1-\dots-k_n}(B_0)}{(k-k_1-\dots-k_n)!} \frac{e^{-\mu(\mathbb{R}^d \setminus B_0)}}{k_1! \dots k_n!} \mu^{k_1}(B_1) \dots \mu^{k_n}(B_n) \\ &= \frac{e^{-\mu(\mathbb{R}^d \setminus B_0)}}{k_1! \dots k_n!} \mu^{k_1}(B_1) \dots \mu^{k_n}(B_n) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\mu(B_i)} \mu^{k_i}(B_i)}{k_i!}. \end{aligned}$$

- Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Formel (8) in Theorem 2.3, dann erkennt man, dass das in (11) gegebene zufällige Zählmaß die gleichen endlich-dimensionalen Verteilungen hat wie ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ .
- Hieraus und aus Theorem 2.1 ergibt sich nun die Behauptung.  $\square$

**Beachte**

- Wenn das Intensitätsmaß  $\mu$  in Korollar 2.1 die Form  $\mu(B) = \lambda \nu_d(B \cap C)$  hat für ein  $\lambda < \infty$  und eine beschränkte Borel-Menge  $C \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(C) < \infty$ , dann sind die in (10) betrachteten (unabhängigen) Zufallsvektoren  $S_1, S_2, \dots$  gleichverteilt in  $C$ .
- Wenn zusätzlich angenommen wird, dass die Menge  $C$  ein  $d$ -dimensionaler Quader der Form

$$C = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d] \quad (13)$$

ist, dann hat der Zufallsvektor  $S_i = (S_{i1}, \dots, S_{id})$  für jedes  $i = 1, \dots, n$  unabhängige Komponenten  $S_{i1}, \dots, S_{id}$ , wobei  $S_{ij} \sim U(a_j, b_j)$  für jedes  $j = 1, \dots, d$ .

- Die Aussage von Korollar 2.1 wird deshalb manchmal die *bedingte Gleichverteilungseigenschaft* von homogenen Poisson-Prozessen in beschränkten Borel-Mengen genannt.

Das folgende Resultat über die Summation von unabhängigen Poisson-Prozessen ist ein Analogon der Faltungstabilität von Poisson-Verteilungen.

**Theorem 2.4** Sei  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  eine Folge unabhängiger Poisson-Prozesse in  $\mathbb{R}^d$  mit den Intensitätsmaßen  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , so dass das Maß  $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$  lokal endlich ist. Dann ist das zufällige Zählmaß  $\{N_B\}$  mit  $N_B = \sum_{i=1}^{\infty} N_B^{(i)}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ .

**Beweis**

- Wir zeigen zunächst, dass

$$N_B \sim \text{Poi}(\mu(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (14)$$

- Weil  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  unabhängige Zählmaße sind, sind die Zufallsvariablen  $N_B^{(1)}, N_B^{(2)}, \dots$  unabhängig, wobei  $N_B^{(i)} \sim \text{Poi}(\mu_i(B))$  für jedes  $i \geq 1$  und für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .
- Aus der Faltungsstabilität von Poisson-Verteilungen ergibt sich somit, dass für jedes  $n \geq 1$  und für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$

$$\sum_{i=1}^n N_B^{(i)} \sim \text{Poi}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i(B)\right).$$

- Hieraus und aus der Monotonie von Wahrscheinlichkeitsmaßen ergibt sich, dass für beliebige  $k \geq 0$  und  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} P(N_B \leq k) &= P\left(\sum_{i=1}^{\infty} N_B^{(i)} \leq k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{i=1}^n N_B^{(i)} \leq k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{\exp(-\sum_{i=1}^n \mu_i(B)) (\sum_{i=1}^n \mu_i(B))^j}{j!} = \sum_{j=0}^k \frac{\exp(-\mu(B)) (\mu(B))^j}{j!}. \end{aligned}$$

- Damit ist (14) bewiesen.

- Um den Beweis zu beenden, ist noch zu zeigen, dass die Zufallsvariablen  $N_{B_1}, N_{B_2}, \dots, N_{B_n}$  für jedes  $n \geq 2$  und paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  unabhängig sind.

- Weil die Zufallsvariablen  $\{N_{B_j}^{(i)}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$  für beliebige  $m, n \geq 1$  unabhängig sind, ergibt sich aus dem Satz über die Unabhängigkeit zusammengesetzter Abbildungen (vgl. Theorem WR-3.18), dass auch die Zufallsvariablen  $\{\sum_{i=1}^m N_{B_j}^{(i)}, j = 1, \dots, n\}$  unabhängig sind.
- Wegen der Monotonie von Wahrscheinlichkeitsmaßen kann man nun leicht zeigen, dass die Zufallsvariablen

$$\{N_{B_j}, j = 1, \dots, n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} N_{B_j}^{(i)}, j = 1, \dots, n \right\}$$

ebenfalls unabhängig sind. □

Wir zeigen nun noch, dass die Einschränkung von Poisson-Prozessen auf Borelsche Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  erneut zu Poisson-Prozessen führt.

**Theorem 2.5** *Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ , und sei  $B_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  eine beliebige Borel-Menge. Dann ist das zufällige Zählmaß  $\{\tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit  $\tilde{N}_B = N_{B \cap B_0}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\tilde{\mu}$ , wobei  $\tilde{\mu}(B) = \mu(B \cap B_0)$  für jedes  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .*

**Beweis**

- Weil  $\{N_B\}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$  ist, gilt

$$\tilde{N}_B = N_{B \cap B_0} \sim \text{Poi}(\mu(B \cap B_0)) = \text{Poi}(\tilde{\mu}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d).$$

- Weil für beliebige paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  auch die Mengen  $B_1 \cap B_0, \dots, B_n \cap B_0$  paarweise disjunkt sind, sind die Zufallsvariablen  $\tilde{N}_{B_1} = N_{B_1 \cap B_0}, \dots, \tilde{N}_{B_n} = N_{B_n \cap B_0}$  unabhängig. □

### 2.1.3 Messbare Indizierung der Atome

In diesem Abschnitt betrachten wir den Begriff der messbaren Indizierung der (zufälligen) Atome von Poisson-Prozessen, der einen konstruktiven Zugang zu Poisson-Prozessen im  $\mathbb{R}^d$  und somit die mathematische Grundlage von Simulationsalgorithmen bildet, vgl. auch die Abschnitte 2.1.4 und 2.1.5.

**Beachte** Man sagt, dass die Folge  $\{\tilde{S}_i\}$  von Zufallsvektoren  $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  mit

$$\tilde{S}_i = \begin{cases} S_i, & \text{falls } N \geq i, \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \quad (15)$$

eine *messbare Indizierung* der (zufälligen) Atome des in (11) gegebenen zufälligen Zählmaßes  $\{N_B\}$  ist.

Von nun an werden wir stets voraussetzen, dass das Intensitätsmaß  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  *diffus* ist, d.h., es gelte

$$\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (16)$$

Der folgende Hilfssatz wird manchmal *Disjunktheitstheorem* genannt. Wir nutzen dieses Ergebnis, um zu zeigen, dass man auch für Poissonsche Zählmaße mit einem beliebigen (diffusen und lokal endlichen) Intensitätsmaß eine messbare Indizierung der Atome konstruieren kann.

#### Lemma 2.1

- Seien  $\{N_B^{(1)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  und  $\{N_B^{(2)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  zwei unabhängige Poisson-Prozesse mit den Intensitätsmaßen  $\mu_1$  bzw.  $\mu_2$ , so dass  $0 < \mu_1(\mathbb{R}^d), \mu_2(\mathbb{R}^d) < \infty$ .
- Außerdem seien  $\{\tilde{S}_i^{(1)}\}$  und  $\{\tilde{S}_i^{(2)}\}$  unabhängige messbare Indizierungen der Atome von  $\{N_B^{(1)}\}$  bzw.  $\{N_B^{(2)}\}$ , die gemäß (15) gegeben sind.
- Dann gilt für beliebige  $i, j \geq 1$

$$P(\{\tilde{S}_i^{(1)} \neq \tilde{S}_j^{(2)}\} \cup \{\tilde{S}_i^{(1)} = \tilde{S}_j^{(2)} = \infty\}) = 1. \quad (17)$$

#### Beweis

- Es genügt zu zeigen, dass für beliebige  $i, j \geq 1$  mit  $i \neq j$

$$P(\{\tilde{S}_i^{(1)} = \tilde{S}_j^{(2)}\} \cap \{\tilde{S}_j^{(2)} \neq \infty\}) = 0.$$

- Mit der Schreibweise  $p^{(k)}(B) = \mu_k(B)/\mu_k(\mathbb{R}^d)$  für  $k = 1, 2$  und  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  ergibt sich aus der Unabhängigkeit der Zufallsvektoren  $\tilde{S}_i^{(1)}$  und  $\tilde{S}_j^{(2)}$ , dass

$$\begin{aligned} P(\{\tilde{S}_i^{(1)} = \tilde{S}_j^{(2)}\} \cap \{\tilde{S}_j^{(2)} \neq \infty\}) &= P(\{S_i^{(1)} = S_j^{(2)}\} \cap \{N^{(2)} \geq j\}) \\ &= P(N^{(2)} \geq j) P(S_i^{(1)} = S_j^{(2)}) = P(N^{(2)} \geq j) \int_{\mathbb{R}^d} P(S_i^{(1)} = S_j^{(2)} \mid S_j^{(2)} = s) P(S_j^{(2)} \in ds) \\ &= P(N^{(2)} \geq j) \int_{\mathbb{R}^d} P(S_i^{(1)} = s) p^{(2)}(ds) = P(N^{(2)} \geq j) \int_{\mathbb{R}^d} p^{(1)}(\{s\}) p^{(2)}(ds) = 0, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichheit die Tatsache genutzt wurde, dass das Intensitätsmaß  $\mu_1$  diffus ist und dass somit  $p^{(1)}(\{s\}) = 0$  für jedes  $s \in \mathbb{R}^d$ .  $\square$

**Beachte** Aus Lemma 2.1 ergibt sich insbesondere, dass durch  $\{\tilde{S}_i\}$  mit

$$\tilde{S}_i = \begin{cases} S_i^{(1)}, & \text{falls } N_{\mathbb{R}^d}^{(1)} \geq i, \\ S_{i-N_{\mathbb{R}^d}^{(1)}}^{(2)}, & \text{falls } N_{\mathbb{R}^d}^{(1)} + N_{\mathbb{R}^d}^{(2)} \geq i > N_{\mathbb{R}^d}^{(1)}, \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (18)$$

eine messbare Indizierung der Atome des zufälligen Maßes  $\{N_B\}$  mit  $N_B = N_B^{(1)} + N_B^{(2)}$  gegeben ist.

Wir übertragen nun den in (18) gegebenen Ansatz auf den Fall von beliebigen (endlichen bzw. abzählbar unendlichen) Summen unabhängiger Poisson-Prozesse.

**Theorem 2.6** Sei  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  ein beliebiges diffuses und lokal endliches Maß. Dann gibt es eine Folge  $S_1, S_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  von Zufallsvektoren, so dass das zufällige Zählmaß  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit

$$N_B = \#\{i : S_i \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (19)$$

ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$  ist.

**Beweis**

- Man kann sich leicht überlegen, dass sich  $\mu$  als (abzählbar unendliche) Summe von endlichen Mäßen  $\mu_1, \mu_2, \dots : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$  darstellen lässt, so dass

$$\mu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (20)$$

- Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $\mu_j(\mathbb{R}^d) > 0$  für jedes  $j \geq 1$ .
- Gemäß Korollar 2.1 gibt es dann für jedes  $j \geq 1$  unabhängige Zufallsvariablen  $N^{(j)}, S_1^{(j)}, S_2^{(j)}, \dots$  mit

$$N^{(j)} \sim \text{Poi}(\mu_j(\mathbb{R}^d)), \quad S_i^{(j)} \sim \frac{\mu_j(\cdot)}{\mu_j(\mathbb{R}^d)} \quad \forall i \geq 1,$$

– so dass durch den Ansatz

$$N_B^{(j)} = \#\{i : 1 \leq i \leq N^{(j)}, S_i^{(j)} \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

ein Poisson-Prozess  $\{N_B^{(j)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit dem Intensitätsmaß  $\mu_j$  gegeben ist.

- Dabei können die Folgen  $\{N^{(1)}, S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \dots\}, \{N^{(2)}, S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \dots\}, \dots$  so gewählt werden, dass sie ihrerseits unabhängig sind.
- Damit sind auch die Poisson-Prozesse  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  unabhängig.
- Aus Theorem 2.4 ergibt sich nun, dass das zufällige Zählmaß  $\{N_B\}$  mit  $N_B = \sum_{i=1}^{\infty} N_B^{(i)}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$  ist.
- Darüber hinaus ergibt sich aus Lemma 2.1, dass durch die Folge  $\{S_i\}$  von Zufallsvektoren mit

$$S_i = \begin{cases} S_i^{(1)}, & \text{falls } N^{(1)} \geq i, \\ S_{i-N^{(1)}}^{(2)}, & \text{falls } N^{(1)} + N^{(2)} \geq i > N^{(1)}, \\ \vdots \\ S_{i-N^{(1)}-\dots-N^{(j-1)}}^{(j)}, & \text{falls } N^{(1)} + \dots + N^{(j)} \geq i > N^{(1)} + \dots + N^{(j-1)} \text{ für ein } j > 2, \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N_B\}$  gegeben ist, so dass (19) gilt.  $\square$

### 2.1.4 Simulationsalgorithmus; Akzeptanz- und Verwerfungsmethode

Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein Poisson-Prozess mit dem (diffusen und lokal endlichen) Intensitätsmaß  $\mu$ , und seien  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d$  paarweise disjunkte Quader mit der in (1) gegebenen Form, so dass  $\mu(B_i) > 0$  für jedes  $i = 1, \dots, n$ .

Um den Poisson-Prozess  $\{N_B\}$  in der beschränkten Borel-Menge  $C = \bigcup_{i=1}^n B_i$  zu simulieren, genügt es zu beachten,

- dass das zufällige Zählmaß  $\{\tilde{N}_B\}$  mit  $\tilde{N}_B = N_{B \cap C}$  gemäß Theorem 2.5 ein Poisson-Prozess mit dem endlichen Zählmaß  $\tilde{\mu}$  ist wobei  $\tilde{\mu}(B) = \mu(B \cap C)$ ,
- und dass man deshalb gemäß Theorem 2.3 bzw. Korollar 2.1 wie folgt vorgehen kann:

**Schritt 0** Generiere eine Realisierung von  $N_C \sim \text{Poi}(\mu(C))$ .

**Schritt 1** Falls  $N_C = k$ , dann generiere eine Realisierung des multinomial verteilten Zufallsvektors

$$(N_1, \dots, N_n) \sim \text{Mult}(k; p_1, \dots, p_n),$$

wobei  $p_i = \mu(B_i)/\mu(C)$  für jedes  $i = 1, \dots, n$ .

**Schritt 2** Falls  $(N_1, \dots, N_n) = (k_1, \dots, k_n)$ , dann generiere

$$k_1 \text{ unabhängige Zufallsvektoren } S_1^{(1)}, \dots, S_{k_1}^{(1)} \sim \mu(\cdot \cap B_1)/\mu(B_1),$$

⋮

$$k_n \text{ unabhängige Zufallsvektoren } S_1^{(n)}, \dots, S_{k_n}^{(n)} \sim \mu(\cdot \cap B_n)/\mu(B_n),$$

wobei die Zufallsvektoren  $(S_1^{(1)}, \dots, S_{k_1}^{(1)}), \dots, (S_1^{(n)}, \dots, S_{k_n}^{(n)})$  ebenfalls unabhängig sind.

#### Beachte

- Seien  $(s_1^{(1)}, \dots, s_{k_1}^{(1)}), \dots, (s_1^{(n)}, \dots, s_{k_n}^{(n)})$  Realisierungen von  $(S_1^{(1)}, \dots, S_{k_1}^{(1)}), \dots, (S_1^{(n)}, \dots, S_{k_n}^{(n)})$ .
- Dann ist die (nichtgeordnete) Menge  $\{s_1^{(1)}, \dots, s_{k_1}^{(1)}, \dots, s_1^{(n)}, \dots, s_{k_n}^{(n)}\}$  von Punkten im  $\mathbb{R}^d$  eine Realisierung der Atome des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  in der Menge  $C = \bigcup_{i=1}^n B_i$ .

Wenn die Anzahl  $n$  der Quader  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d$  groß ist, aus denen die Menge  $C = \bigcup_{i=1}^n B_i$  besteht, dann kann die praktische Umsetzung der Simulationsschritte 1 und 2 mit einem großen Rechenaufwand verbunden sein.

- In diesem Fall kann es effizienter sein, den Poisson-Prozess  $\{N_B\}$  mit der folgenden *Akzeptanz- und Verwerfungsmethode* in  $C$  zu simulieren.
- Diese Methode hat darüber hinaus den Vorteil, dass das Gebiet  $C \subset \mathbb{R}^d$ , in dem Poisson-Prozess  $\{N_B\}$  simuliert wird, eine *beliebige* beschränkte Borel-Menge sein kann.
  - Sei also  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  eine beliebiges (diffuses und lokal endliches) Maß, sei  $C \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  eine beliebige beschränkte Borel-Menge mit  $0 < \mu(C) < \infty$ , und sei

$$\tilde{C} = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]$$

ein (beschränkter)  $d$ -dimensionaler Quader mit  $C \subset \tilde{C}$ .

- Um den Poisson–Prozess  $\{N_B\}$  in der Menge  $C$  zu simulieren, kann man nun gemäß Theorem 2.5 wie folgt vorgehen:

**Schritt 0** Generiere eine Realisierung von  $N_C \sim \text{Poi}(\mu(C))$ .

**Schritt 1** Falls  $N_C = k$ , dann generiere so lange Realisierungen  $s_1, s_2, \dots$  der unabhängigen Zufallsvektoren  $S_1, S_2, \dots \sim \mu(\cdot \cap C)/\mu(C)$ , bis  $k$  der Pseudozufallszahlen  $s_1, \dots, s_n$  in der Menge  $C$  liegen, wobei

$$n = \min_{j \geq 1} \{ \#\{i : s_i \in C, 1 \leq i \leq j\} \geq k \}.$$

**Schritt 2** Dann ist die (nichtgeordnete) Menge  $\{s_i : s_i \in C, 1 \leq i \leq n\}$  von Punkten im  $\mathbb{R}^d$  eine Realisierung der Atome des Poisson–Prozesses  $\{N_B\}$  in der Menge  $C$ .

### 2.1.5 Transformationssätze

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei verschiedene Arten von Transformationen von Poisson–Prozessen im  $\mathbb{R}^d$ . Für beliebige  $d, d' \geq 1$  seien die Borel–Mengen  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $E' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'})$  gegeben.

- Außerdem sei  $\mathbf{T} : E \rightarrow E'$  eine Borel–messbare Abbildung, d.h., es gelte

$$\mathbf{T}^{-1}(B') = \{x \in E : \mathbf{T}(x) \in B'\} \in \mathcal{B}(E) \quad \forall B' \in \mathcal{B}(E'),$$

- wobei die Urbilder von beschränkten Borel–Mengen beschränkt seien, d.h., es gelte

$$\mathbf{T}^{-1}(B') \in \mathcal{B}_0(E) \quad \forall B' \in \mathcal{B}_0(E').$$

**Beachte** Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$  ein beliebiges Zählmaß in  $E$  mit dem Intensitätsmaß  $\mu : \mathcal{B}(E) \rightarrow [0, \infty]$ . Man kann sich leicht überlegen, dass dann durch den Ansatz

$$N'_{B'} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B')} \quad \forall B' \in \mathcal{B}(E') \tag{21}$$

ein zufälliges Zählmaß  $\{N'_{B'}, B' \in \mathcal{B}(E')\}$  in  $E'$  gegeben ist, wobei das Intensitätsmaß  $\mu' : \mathcal{B}(E') \rightarrow [0, \infty]$  von  $\{N'_{B'}\}$  gegeben ist durch

$$\mu'(B') = \mathbb{E} N'_{B'} \stackrel{(21)}{=} \mathbb{E} N_{\mathbf{T}^{-1}(B')} = \mu(\mathbf{T}^{-1}(B')) \quad \forall B' \in \mathcal{B}(E'). \tag{22}$$

**Theorem 2.7** Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$  ein Poisson–Prozess in  $E$  mit dem (diffusen und lokal endlichem) Intensitätsmaß  $\mu$ .

- Dann ist das in (21) gegebene zufällige Zählmaß  $\{N'_{B'}, B' \in \mathcal{B}(E')\}$  ein Poisson–Prozess in  $E'$ , dessen Intensitätsmaß  $\mu'$  durch (22) gegeben ist.
- Wenn  $\{S_i\}$  eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N_B\}$  ist und wenn die Abbildung  $\mathbf{T} : E \rightarrow E'$  eineindeutig ist, dann ist durch

$$S'_i = \mathbf{T}'(S_i) \tag{23}$$

eine messbare Indizierung  $\{S'_i\}$  der Atome von  $\{N'_{B'}\}$  gegeben, wobei die Abbildung  $\mathbf{T}' : E \cup \{\infty\} \rightarrow E' \cup \{\infty\}$  gegeben ist durch

$$\mathbf{T}'(x) = \begin{cases} \mathbf{T}(x), & \text{falls } x \in E, \\ \infty, & \text{falls } x = \infty. \end{cases}$$

**Beweis**

- Offenbar gilt  $N'_{B'} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B')} \sim \text{Poi}(\mu(\mathbf{T}^{-1}(B')))$ .
- Wenn  $B'_1, \dots, B'_n \in \mathcal{B}_0(E')$  paarweise disjunkte Borel-Mengen sind, dann sind auch die Urbilder  $\mathbf{T}^{-1}(B'_1), \dots, \mathbf{T}^{-1}(B'_n)$  paarweise disjunkt und die Zufallsvariablen

$$N'_{B'_1} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B'_1)}, \dots, N'_{B'_n} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B'_n)}$$

sind somit unabhängig.

- Außerdem ist die Abbildung  $S'_i = \mathbf{T}'(S_i) : \Omega \rightarrow E' \cup \{\infty\}$  für jedes  $i \geq 1$  messbar, weil die Abbildungen  $S_i : \Omega \rightarrow E \cup \{\infty\}$  und  $\mathbf{T}' : E \cup \{\infty\} \rightarrow E' \cup \{\infty\}$  messbar sind, und es gilt für jedes  $B' \in \mathcal{B}(E')$

$$N'_{B'} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B')} = \#\{i : S_i \in \mathbf{T}^{-1}(B')\} = \#\{i : \mathbf{T}'(S_i) \in B'\}.$$

- Also ist  $\{\mathbf{T}'(S_i)\}$  eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N'_{B'}\}$ . □

**Beispiele** Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$  ein homogener Poisson-Prozess in  $E = (0, \infty)$  mit der Intensität  $\lambda = 1$ .

1. Sei  $E' = E = (0, \infty)$  und  $\mathbf{T}(x) = x^2$ .

- Dann ist  $\{N'_{B'}\}$  ein Poisson-Prozess in  $(0, \infty)$ .
- Das Intensitätsmaß  $\mu'$  von  $\{N'_{B'}\}$  ist absolutstetig bezüglich dem (1-dimensionalen) Lebesgue-Maß  $\nu_1(\cdot \cap (0, \infty))$ , wobei die Dichte gegeben ist durch

$$\frac{d\mu'}{dx}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x > 0.$$

2. Sei  $E' = E \times E$  und die Abbildung  $\mathbf{T} : E \rightarrow E \times E$  sei gegeben durch  $\mathbf{T}(x) = (x, x^2)$ .

- Dann ist die Folge  $\{S_i\}$  der Sprungzeitpunkte des (Poissonschen) Zählprozesses  $\{N_t, t > 0\}$  mit  $N_t = N_{(0,t]}$  eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N_B\}$ .
- Außerdem ist  $\{S'_i\} = \{(S_i, S_i^2)\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses  $\{N'_{B'}\}$  in  $(0, \infty)^2$ ,
- dessen Intensitätsmaß  $\mu'$  auf dem Funktionsgraphen  $\{(x, x^2) : x > 0\}$  konzentriert ist.
- Beachte: Das heißt insbesondere, dass die Atome von  $\{N'_{B'}\}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 in einer 1-dimensionalen Teilmenge von  $(0, \infty)^2$  liegen; vgl. Abbildung 5.

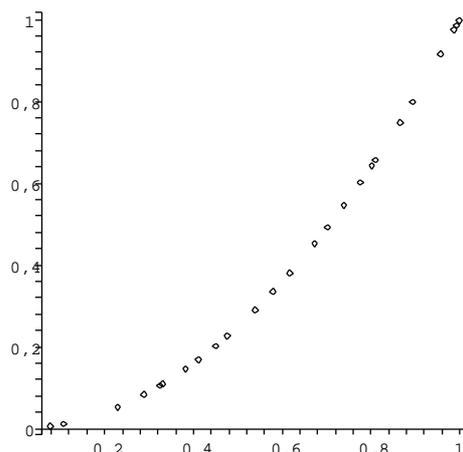
Wir betrachten nun noch eine andere Art der Transformation von Poisson-Prozessen im  $\mathbb{R}^d$ , mit deren Hilfe man Poisson-Prozesse  $\{N'_{B'}\}$  in höherdimensionalen Räumen  $E' \subset \mathbb{R}^{d'}$  mit  $d' > d$  konstruieren kann, so dass der Träger des Intensitätsmaßes  $\mu'$  von  $\{N'_{B'}\}$  eine  $d'$ -dimensionale Menge ist.

**Theorem 2.8**

- Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$  ein Poisson-Prozess in  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ , so dass  $\mu(E) > 0$ , und sei  $\{S_i\}$  eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N_B\}$ .
- Außerdem sei  $m \geq 1$  eine beliebige natürliche Zahl und  $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren mit der Verteilung  $P_U$ , die von  $\{S_i\}$  unabhängig sind.
- Dann ist durch

$$N'_{B \times C} = \#\{i : (S_i, U_i) \in B \times C\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(E), C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad (24)$$

ein Poisson-Prozess  $\{N'_{B'}\}$  in  $E' = E \times \mathbb{R}^m$  mit dem Intensitätsmaß  $\mu' = \mu \times P_U$  gegeben.

Abbildung 5: Poisson-Prozess auf der Parabel  $\mathbf{T}(x) = (x, x^2)$ **Beweis**

- Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $\mu$  ein endliches Maß ist.
  - Dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass die messbare Indizierung  $\{S_i\}$  der Atome von  $\{N_B\}$  durch (10) und (15) gegeben ist.
  - Dann sind die Zufallsvektoren  $S'_1, S'_2, \dots$  mit  $S'_i = (S_i, U_i)$  unabhängig, und es gilt

$$S'_i \sim \frac{\mu(\cdot)}{\mu(E)} \times P_U \quad \forall i \geq 1.$$

- Aus Korollar 2.1 ergibt sich nun, dass durch den Ansatz

$$N'_{B'} = \#\{i : 1 \leq i \leq N, S'_i \in B'\} \quad \forall B' \in \mathcal{B}(E \times \mathbb{R}^m)$$

ein Poisson-Prozess  $N'_{B'}$  in  $E' = E \times \mathbb{R}^m$  mit dem Intensitätsmaß  $\mu'$  gegeben ist, wobei

$$\mu'(B \times C) = \mu(E) \left( \frac{\mu(B)}{\mu(E)} \times P_U(C) \right) = \mu(B) \times P_U(C) \quad \forall B \in \mathcal{B}(E), C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

- Damit ist die Behauptung unter der zusätzlichen Annahme bewiesen, dass  $\mu$  endlich ist.
- Wenn  $\mu$  ein beliebiges (diffuses und lokal endliches) Maß ist,
  - dann können wir  $\mu' = \mu \times P_U$  als (abzählbar unendliche) Summe von endlichen Maßen  $\mu'_1, \mu'_2, \dots$  darstellen
  - und anschließend so wie im Beweis von Theorem 2.6 vorgehen. □

**Beachte**

- Ähnlich wie bei zusammengesetzten Poisson-Prozessen in  $[0, \infty)$ , die in Abschnitt WT-2.2.2 eingeführt worden sind, können die in Theorem 2.8 betrachteten Zufallsvariablen  $U_i$  als „Marken“ der Atome  $S_i$  aufgefasst werden.
- Dabei sagt man, dass die Folge  $\{(S_i, U_i)\}$  der markierten Atome eine messbare Indizierung eines *unabhängig markierten* Poisson-Prozesses ist.

## 2.2 Homogene Poisson-Prozesse

### 2.2.1 Radiale Simulation

Mit Hilfe der Theoreme 2.7 und 2.8 konstruieren wir einen Algorithmus zur *radialen Simulation* von homogenen Poisson-Prozessen im  $\mathbb{R}^2$ .

- Sei  $T_1, T_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit  $T_i \sim \text{Exp}(1)$  für jedes  $i \geq 1$ .
- Für jedes  $\lambda > 0$  ergibt sich dann aus Theorem 2.7, dass durch

$$N_B = \# \left\{ i : \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{T_k}{\pi\lambda}} \in B \right\} \quad \forall B \in \mathcal{B}([0, \infty))$$

ein Poisson-Prozess  $\{N_B, B \in \mathcal{B}([0, \infty))\}$  in  $[0, \infty)$  gegeben ist, dessen Intensitätsmaß  $\mu$  absolutstetig ist mit der Dichte

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = 2\pi\lambda x \quad \forall x \geq 0.$$

- Dabei ist durch

$$S_i = \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{T_k}{\pi\lambda}} \quad \forall i \geq 1$$

eine messbare Indizierung  $\{S_i\}$  der Atome von  $\{N_B\}$  gegeben.

- Außerdem sei  $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, 2\pi)$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit  $U_i \sim U([0, 2\pi))$ , die unabhängig von  $\{T_i\}$  ist.
- Dann ergibt sich aus Theorem 2.8, dass  $\{(S_i, U_i)\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses in  $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$  ist, dessen Intensitätsmaß durch  $\mu \times U(0, 2\pi)$  gegeben ist.
- Die erneute Anwendung von Theorem 2.7 auf die Abbildung  $\mathbf{T} : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\mathbf{T}(s, u) = (s \cos u, s \sin u) \quad \forall s \geq 0, u \in [0, 2\pi) \quad (25)$$

ergibt schließlich, dass  $\{\mathbf{T}(S_i, U_i)\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses im  $\mathbb{R}^2$  mit der Intensität  $\lambda$  ist.

Um einen homogenen Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$  im Kreis  $B(o, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r\}$  mit Radius  $r > 0$  zu simulieren, kann man also wie folgt vorgehen:

**Schritt 0** Generiere die Pseudozufallszahlen  $t_1, t_2, \dots, t_{n(r)}$  gemäß der Verteilung  $\text{Exp}(1)$ , wobei

$$n(r) = \max \left\{ i : \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \leq r \right\}.$$

**Schritt 1** Generiere die Pseudozufallszahlen  $u_1, u_2, \dots, u_{n(r)}$  gemäß der Verteilung  $U(0, 2\pi)$ .

**Schritt 2** Berechne die Vektoren  $(s_1, u_1), \dots, (s_{n(r)}, u_{n(r)})$ , wobei

$$s_i = \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \quad \forall i \geq 1.$$

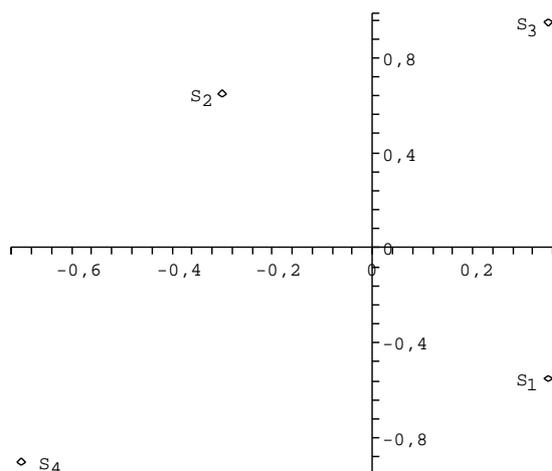


Abbildung 6: Radiale Simulation von homogenen Poisson-Prozessen

**Schritt 3** Transformiere die Vektoren  $(s_1, u_1), \dots, (s_{n(r)}, u_{n(r)})$  mit Hilfe der in (25) gegebenen Abbildung  $\mathbf{T} : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Schritt 4** Generiere so die Realisierung  $\mathbf{T}(s_1, u_1), \dots, \mathbf{T}(s_{n(r)}, u_{n(r)})$  eines (2-dimensionalen) homogenen Poisson-Prozesses im Kreis  $B(o, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r\}$ ; vgl. Abbildung 6.

### 2.2.2 Schätzung der Intensität; Signifikanztests

Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda \in (0, \infty)$ . Aus der Definitionsgleichung (6) von  $\lambda$  ergibt sich dann unmittelbar, dass

$$\hat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_d(W)} \quad (26)$$

für jedes  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\lambda$  ist. Außerdem hat der Schätzer  $\hat{\lambda}_W$  die folgenden Güteeigenschaften.

#### Theorem 2.9

- Sei  $W_1, W_2, \dots$  eine Folge von Beobachtungsfenstern  $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann ist der erwartungstreue Schätzer  $\hat{\lambda}_{W_n}$

1. schwach konsistent, d.h., für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0, \quad (27)$$

2. asymptotisch normalverteilt, d.h., für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\lambda}} (\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda) \leq x\right) = \Phi(x), \quad (28)$$

wobei  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

- Wenn  $W_1 \subset W_2 \subset \dots$  eine monotone Folge von Beobachtungsfenstern  $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  ist, dann ist der Schätzer  $\hat{\lambda}_{W_n}$  stark konsistent, d.h., es gilt

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{W_n} = \lambda\right) = 1. \quad (29)$$

### Beweis

- Die Gültigkeit von (27) ergibt sich aus der Tschebyschew-Ungleichung (vgl. Theorem WR-4.18), denn es gilt für  $n \rightarrow \infty$

$$P(|\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var} \hat{\lambda}_{W_n}}{\varepsilon^2} = \frac{\lambda}{\varepsilon^2 \cdot \nu_d(W_n)} \rightarrow 0.$$

- Beim Beweis von (28) kann man die Charakterisierung der Verteilungskonvergenz durch charakteristische Funktionen nutzen (vgl. Theorem WR-5.7). Es genügt also zu zeigen, dass die charakteristische Funktion von  $\sqrt{|W_n|/\lambda} (\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda)$  punktweise gegen die charakteristische Funktion der  $N(0, 1)$ -Verteilung strebt.
- Wenn  $W_1 \subset W_2 \subset \dots$  eine monotone Folge von Beobachtungsfenstern  $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  ist, dann gibt es
  - eine Folge von paarweise disjunkten Borel-Mengen  $U_1, U_2, \dots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $\nu_d(U_n) = 1$  für  $n \geq 1$
  - und eine monotone Folge  $k_1, k_2, \dots$  natürlicher Zahlen mit  $k_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , so dass

$$\bigcup_{i=1}^{k_n} U_i \subset W_n \quad \text{und} \quad \nu_d\left(W_n \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} U_i\right) \leq 1 \quad \forall n \geq 1.$$

- Darüber hinaus gibt es
  - eine Folge von paarweise disjunkten Borel-Mengen  $V_1, V_2, \dots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $\nu_d(V_n) = 1$  für jedes  $n \geq 1$
  - und eine monotone Folge  $\ell_1, \ell_2, \dots$  natürlicher Zahlen mit  $\ell_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , so dass

$$\bigcup_{i=1}^{\ell_n} V_i \supset W_n \quad \text{und} \quad \nu_d\left(\bigcup_{i=1}^{\ell_n} V_i \setminus W_n\right) \leq 1 \quad \forall n \geq 1.$$

- Somit gilt

$$\frac{k_n}{\nu_d(W_n)} \frac{\sum_{i=1}^{k_n} N_{U_i}}{k_n} \leq \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)} \leq \frac{\ell_n}{\nu_d(W_n)} \frac{\sum_{i=1}^{\ell_n} N_{V_i}}{\ell_n} \quad \forall n \geq 1. \quad (30)$$

- Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen für Summen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen (vgl. Theorem WR-5.15) ergibt sich nun, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{k_n} N_{U_i}}{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{\ell_n} N_{V_i}}{\ell_n} = \lambda.$$

- Weil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\nu_d(W_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_n}{\nu_d(W_n)} = 1,$$

ergibt sich hieraus und aus (30), dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)} = \lambda. \quad \square$$

**Beachte**

- Aus Theorem 2.9 ergibt sich der folgende asymptotische *Signifikanztest* zur Verifizierung des Hypothesenpaars  $H_0 : \lambda = \lambda_0$  vs.  $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$ .
  - Mit Hilfe des Satzes von Slutsky (vgl. Theorem WR-5.11) ergibt sich aus (28) und (29), dass die Testgröße

$$T = \sqrt{\frac{|W|}{\widehat{\lambda}_W}} (\widehat{\lambda}_W - \lambda_0) \quad (31)$$

- näherungsweise standardnormalverteilt ist, wenn das Beobachtungsfenster  $W$  hinreichend groß ist.
  - Somit wird  $H_0$  abgelehnt, wenn  $|T| > z_{1-\alpha/2}$ , wobei  $z_\alpha$  das  $\alpha$ -Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnet.
- Wenn  $W$  nicht groß genug ist, so dass die Verteilung der in (31) betrachteten Testgröße  $T$  zu stark von der Standardnormalverteilung abweicht, dann kann der folgende *Monte-Carlo-Test* betrachtet werden, um das Hypothesenpaar  $H_0 : \lambda = \lambda_0$  vs.  $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$  zu verifizieren.
  - Für  $\alpha = 0.05$  werden 99 Realisierungen eines homogenen Poisson-Prozesses mit der (hypothetischen) Intensität  $\lambda_0$  in  $W$  generiert und die zugehörigen Realisierungen  $t_1, \dots, t_{99}$  der Testgröße  $|T|$  berechnet.
  - Sei  $t_0$  diejenige Realisierung von  $|T|$ , die sich für die (eentlichen) Daten ergibt, und sei  $\rho_0$  der Rang von  $t_0$  in der (geordneten) Stichprobe  $t_0, t_1, \dots, t_{99}$ .
  - Wenn  $\rho_0 > 95$ , dann wird  $H_0$  abgelehnt.
  - Für  $\alpha = 0.01$  werden 999 Realisierungen  $t_1, \dots, t_{999}$  der Testgröße  $|T|$  generiert, wobei dann  $H_0$  abgelehnt wird, wenn  $\rho_0 > 990$ .

**2.3 Poisson-Prozesse mit absolutstetigem Intensitätsmaß**

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass das Intensitätsmaß  $\mu$  des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  absolutstetig bezüglich des  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes ist, d.h., es gibt eine Borel-messbare Funktion  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ , so dass

$$\mu(B) = \int_B \lambda(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (32)$$

wobei  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  die *Intensitätsfunktion* von  $\{N_B\}$  genannt wird.

**2.3.1 Ortsabhängige Verdünnung von Poisson-Prozessen; Simulationsalgorithmus**

Aus den Transformationssätzen, die in Abschnitt 2.1.5 hergeleitet worden sind, ergibt sich die folgende Invarianzeigenschaft von Poisson-Prozessen bezüglich ortsabhängiger Verdünnung, vgl. Abbildung 7.

**Theorem 2.10**

- Seien  $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  zwei Borel-messbare und lokal-integrierbare Funktionen, so dass

$$\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (33)$$

- Sei  $\{S_n\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses mit der Intensitätsfunktion  $\lambda_1$ .
- Außerdem sei  $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, 1]$  eine Folge von unabhängigen und im Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilten Zufallsvariablen, die von  $\{S_n\}$  unabhängig ist.

- Dann ist das zufällige Zählmaß  $\{\tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit

$$\tilde{N}_B = \#\{n : S_n \in B, U_n \leq \lambda_2(S_n)/\lambda_1(S_n)\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (34)$$

ein Poisson-Prozess mit der Intensitätsfunktion  $\lambda_2$ .

### Beweis

- Aus Theorem 2.8 ergibt sich, dass  $\{(S_n, U_n)\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses in  $\mathbb{R}^d \times [0, 1]$  mit der Intensitätsfunktion  $\lambda(x, u) = \lambda_1(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(u)$  ist.
- Aus Theorem 2.7 ergibt sich nun, dass  $\{(S_n, U'_n)\}$  mit

$$U'_n = \begin{cases} U_n, & \text{falls } U_n \leq \lambda_2(S_n)/\lambda_1(S_n), \\ 2, & \text{falls } U_n > \lambda_2(S_n)/\lambda_1(S_n) \end{cases}$$

eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses in  $\mathbb{R}^d \times ([0, 1] \cup \{2\})$  ist, dessen Intensitätsmaß  $\mu'$  gegeben ist durch

$$\mu'(B \times [0, 1]) = \int_B \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{[0, \lambda_2(x)/\lambda_1(x)]}(u) du \lambda_1(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

- Hieraus folgt, dass

$$\mu'(B \times [0, 1]) = \int_B \frac{\lambda_2(x)}{\lambda_1(x)} \lambda_1(x) dx = \int_B \lambda_2(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

- Damit ist gezeigt, dass  $\{\tilde{N}_B\}$  ein Poisson-Prozess mit der Intensitätsfunktion  $\lambda_2$  ist. □

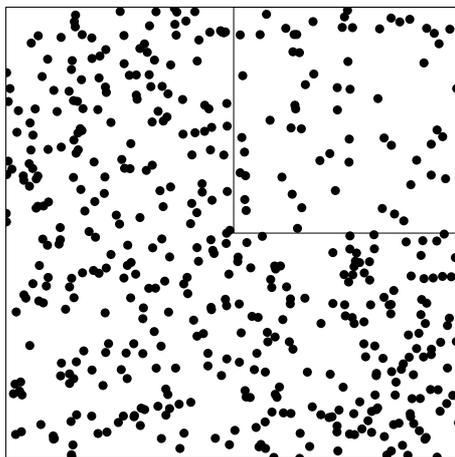


Abbildung 7: Ortsabhängige Verdünnung der Punkte;  $p(x) = 1$  bzw.  $p(x) = 0.5$

Mit Hilfe von Theorem 2.10 lässt sich ein Algorithmus zur Simulation von Poisson-Prozessen angeben, deren Intensitätsfunktion eine beschränkte Funktion ist. Hierfür ist das folgende Korollar nützlich, dass sich unmittelbar aus Theorem 2.10 ergibt.

**Korollar 2.2**

- Sei  $\{S_n\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses mit der Intensität  $\lambda$ .
- Sei  $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, 1]$  eine Folge von unabhängigen und in  $[0, 1]$  gleichverteilten Zufallsvariablen, die von  $\{S_n\}$  unabhängig ist, und sei  $p : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  eine Borel-messbare Funktion.
- Dann ist das zufällige Zählmaß  $\{\tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit

$$\tilde{N}_B = \#\{n : S_n \in B, U_n \leq p(S_n)\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (35)$$

ein Poisson-Prozess, dessen Intensitätsfunktion  $\tilde{\lambda} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  gegeben ist durch

$$\tilde{\lambda}(x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (36)$$

Um einen Poisson-Prozess mit einer vorgegebenen beschränkten Intensitätsfunktion  $\lambda : C \rightarrow [0, \infty)$  in einer beschränkten Borel-Menge  $C \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  zu simulieren, kann man also wie folgt vorgehen, vgl. auch Abbildung 7:

**Schritt 0** Generiere die Realisierungen  $s_1, s_2, \dots, s_k \in C$  der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$  in  $C$ , dessen Intensität  $\lambda_{\max}$  gegeben ist durch

$$\lambda_{\max} = \sup_{x \in C} \lambda(x) < \infty.$$

**Schritt 1** Generiere die Realisierungen  $u_1, u_2, \dots, u_k \in [0, 1]$  der unabhängigen und in  $[0, 1]$  gleichverteilten Zufallsvariablen  $U_1, U_2, \dots, U_k$ .

**Schritt 2** Eliminiere diejenigen Punkte  $s_n$ , für die  $u_n > \lambda(s_n)/\lambda_{\max}$  gilt.

**Schritt 3** Die verbleibenden Punkte  $\{s_{i_1}, \dots, s_{i_m}\} \subset \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  bilden dann eine Realisierung eines Poisson-Prozesses mit der Intensitätsfunktion  $\lambda : C \rightarrow [0, \infty)$  in der Menge  $C$ .

**2.3.2 Nichtparametrische Schätzung der Intensitätsfunktion; Randkorrektur**

- Sei  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  eine offene Menge mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$ , und sei  $S_1, S_2, \dots$  eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  im Beobachtungsfenster  $W$  mit der Intensitätsfunktion  $\lambda : W \rightarrow [0, \infty)$ .
- Ein erster (nicht randkorrigierter) Ansatz zur Schätzung des Intensitätswertes  $\lambda(x)$  für  $x \in W$  ist gegeben durch

$$\tilde{\lambda}_h(x) = \frac{N_{B(x,h) \cap W}}{\kappa_d h^d} \quad \forall x \in W, \quad (37)$$

wobei  $B(x, h) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| \leq h\}$  die Kugel mit Mittelpunkt  $x \in \mathbb{R}^d$  und Radius  $h > 0$  ist und  $\kappa_d = \nu_d(B(o, 1))$  das Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

**Beachte**

- Der in (37) gegebene Schätzer  $\tilde{\lambda}_h(x)$  für  $\lambda(x)$  ist im allgemeinen *nicht* erwartungstreu.
  - Wenn  $\lambda : W \rightarrow [0, \infty)$  eine stetige Funktion ist, dann gilt jedoch für jedes  $x \in W$

$$\lim_{h \downarrow 0} \mathbb{E} \tilde{\lambda}_h(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{E} N_{B(x,h) \cap W}}{\kappa_d h^d} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\int_{B(x,h) \cap W} \lambda(y) dy}{\kappa_d h^d} = \lambda(x), \quad (38)$$

d.h.,  $\tilde{\lambda}_h(x)$  ist asymptotisch erwartungstreu.

– Andererseits gilt aber

$$\lim_{h \downarrow 0} \text{Var} \tilde{\lambda}_h(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\text{Var} N_{B(x,h) \cap W}}{\kappa_d^2 h^{2d}} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\int_{B(x,h) \cap W} \lambda(y) dy}{\kappa_d^2 h^{2d}} = \infty \quad \forall x \in W. \quad (39)$$

- Der Radius  $h > 0$  sollte deshalb so gewählt werden, dass der *mittlere quadratische Fehler*  $e_h(x)$  des Schätzers  $\tilde{\lambda}_h(x)$  möglichst klein ist, wobei

$$e_h(x) = \mathbb{E} \left( (\tilde{\lambda}_h(x) - \lambda(x))^2 \right). \quad (40)$$

- Ein weiteres Problem des in (37) gegebenen Schätzers  $\tilde{\lambda}_h(x)$  besteht darin, dass er *Randeffekte* aufweist,
  - weil im allgemeinen  $\nu_d(B(x,h) \cap W) < \kappa_d h^d$  für Lokationen  $x \in W$  gilt, die nahe am Rand  $\partial W$  des Beobachtungsfensters  $W$  liegen,
  - und dass dann die Normierung  $\kappa_d h^d$  in (37) zu groß ist.
- Deshalb wird anstelle von  $\tilde{\lambda}_h(x)$  ein *randkorrigierter Schätzer*  $\hat{\lambda}_h(x)$  für  $\lambda(x)$  betrachtet, wobei

$$\hat{\lambda}_h(x) = \frac{N_{B(x,h) \cap W}}{\nu_d(B(x,h) \cap W)} \quad \forall x \in W. \quad (41)$$

Die in (37) bzw. (41) betrachteten Schätzer  $\tilde{\lambda}_h(x)$  und  $\hat{\lambda}_h(x)$  können als spezielle *Kernschätzer* für  $\lambda(x)$  aufgefasst werden.

**Definition** Unter einer *Kernfunktion*  $k : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  versteht man eine radial-symmetrische Funktion mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} k(x) dx = 1.$$

### Beispiele

1. *Dichte der multivariaten Standardnormalverteilung* (vgl. Abbildung 8)

$$k(x) = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^d}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^\top x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

2. *Epanechnikov-Kern* (vgl. Abbildung 9)

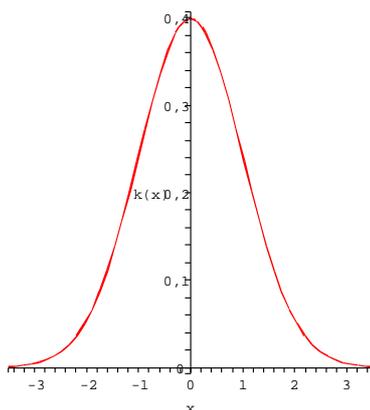
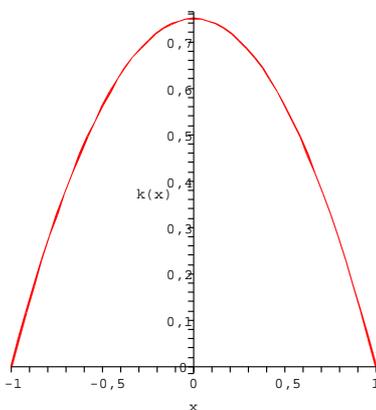
$$k(x) = \begin{cases} \frac{d+2}{2\kappa_d} (1 - x^\top x), & \text{falls } x^\top x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

### Beachte

- Die in (37) bzw. (41) betrachteten Schätzer  $\tilde{\lambda}_h(x)$  und  $\hat{\lambda}_h(x)$  können in der Form

$$\tilde{\lambda}_h(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N_W} k((x - S_i)/h)}{\int_{\mathbb{R}^d} k((x - y)/h) dy} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\lambda}_h(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N_W} k((x - S_i)/h)}{\int_W k((x - y)/h) dy} \quad (42)$$

geschrieben werden,

Abbildung 8: Dichte der Standardnormalverteilung;  $d = 1$ Abbildung 9: Epanechnikov-Kern;  $d = 1$ 

– wobei die Kernfunktion  $k : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  gegeben ist durch

$$k(x) = \kappa_d^{-1} \mathbb{1}_{B(0,1)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

– Der Parameter  $h > 0$  in (42) heißt *Bandbreite* des Kernschätzers.

- In den meisten Fällen ist die optimale Wahl der Bandbreite (z.B. im Sinne der Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers, vgl. (40)) wesentlich wichtiger hinsichtlich der Güteeigenschaften von Kernschätzern, als die Wahl der einen oder anderen spezifischen Kernfunktion  $k : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ .
- Ein populäres Verfahren zur Bestimmung einer optimalen Bandbreite  $h > 0$  ist die Methode der *Likelihood-Cross-Validation*. Dabei wird ein (von der Lage der Punkte  $S_1, \dots, S_{N_W}$  abhängender) Schätzer  $\hat{h}$  für  $h$  bestimmt, der Lösung des folgenden Maximierungsproblems ist.
  - Für jedes  $i = 1, \dots, N_W$  wird die Teilstichprobe  $S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_{N_W}$  betrachtet und der Wert  $\hat{\lambda}_h^{(i)}(S_i)$  von  $\hat{\lambda}_h(x)$  an der Stelle  $x = S_i$  auf der Basis dieser Teilstichprobe berechnet.
  - Wenn die Loglikelihood-Funktion

$$L(h) = \sum_{i=1}^{N_W} \log(\hat{\lambda}_h^{(i)}(S_i))$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 ein eindeutig bestimmtes Maximum im Intervall  $(0, \infty)$  hat,

– dann ist der Schätzer  $\hat{h}$  derjenige Wert  $h > 0$ , für den die Funktion  $L(h)$  dieses Maximum annimmt.

### 3 Zufällige Punktprozesse

#### 3.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

- Sei  $S_1, S_2, \dots \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  eine beliebige Folge von Zufallsvektoren über einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , so dass

$$\#\{n : S_n \in B\} < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (1)$$

- Dann sagt man, dass  $\{S_n\}$  ein *zufälliger Punktprozess* in  $\mathbb{R}^d$  ist, wobei durch den Ansatz

$$N_B = \#\{n : S_n \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (2)$$

ein (lokal endliches) zufälliges Zählmaß  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  gegeben ist.

- Wenn zusätzlich zu der lokalen Endlichkeitsbedingung (1) gilt, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$S_i \neq S_j \quad \forall i, j \geq 1 \text{ mit } i \neq j, \quad (3)$$

dann wird  $\{S_n\}$  ein *einfacher* zufälliger Punktprozess genannt.

- *Beachte.* Für einfache Punktprozesse kann die Folge  $\{S_n\}$  als eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N_B\}$  aufgefasst werden.

##### 3.1.1 Intensitätsmaß und Campbellsches Theorem

- Ähnlich wie bei Poisson-Prozessen (vgl. Abschnitt 2.1) kann man auch für beliebige Punktprozesse  $\{S_n\}$  bzw. für die zugehörigen Zählmaße  $\{N_B\}$  den Begriff des *Intensitätsmaßes*  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  einführen, wobei

$$\mu(B) = \mathbb{E} N_B \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (4)$$

- Dabei wird stets vorausgesetzt, dass das Intensitätsmaß  $\mu$  lokal endlich ist.

Das folgende Resultat wird in der Literatur das *Campbellsche Theorem* genannt. Es ist eine spezielle Version des Satzes von Fubini über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge.

##### Theorem 3.1

- Sei  $\{S_n\}$  ein Punktprozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ , und sei  $f : \mathbb{R}^d \cup \{\infty\} \rightarrow [0, \infty)$  eine nichtnegative Borel-messbare Funktion mit  $f(\infty) = 0$ .
- Dann gilt

$$\mathbb{E} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f(S_n) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu(dx), \quad (5)$$

d.h.,  $\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)$  ist ein erwartungstreuer Schätzer des Integrals  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu(dx)$ .

##### Beweis

- Die Gültigkeit von (5) lässt sich mit algebraischer Induktion zeigen.
- Wenn  $f$  eine Indikatorfunktion ist, dann ergibt sich (5) unmittelbar aus der Definitionsgleichung (4) des Intensitätsmaßes  $\mu$ .
- Somit gilt (5) auch für Linearkombinationen von Indikatorfunktionen.
- Weil sich jede nichtnegative Borel-messbare Funktion durch eine monoton wachsende Folge solcher Linearkombinationen von Indikatorfunktionen approximieren lässt, ergibt sich die Behauptung nun aus dem Satz von B. Levi über die monotone Konvergenz.  $\square$

### 3.1.2 Erzeugendes Funktional

Ein wichtiges analytisches Tool bei der Untersuchung von Punktprozessen ist das erzeugende Funktional, das eine Verallgemeinerung der erzeugenden Funktion von nichtnegativen ganzzahligen Zufallsvariablen ist.

#### Definition

- Sei  $\mathcal{H}$  die Familie aller Borel-messbaren Funktionen  $f : \mathbb{R}^d \cup \{\infty\} \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(x) = 1$ , wenn  $x$  außerhalb einer beschränkten (i.a. von  $f$  abhängigen) Borel-Menge  $B_f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  liegt.
- Die Abbildung  $\mathbf{G} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \left( \prod_{n=1}^{\infty} f(S_n) \right) \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad (6)$$

wird *erzeugendes Funktional* des Punktprozesses  $\{S_i\}$  genannt.

#### Beachte

- Das Produkt in (6) hat mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich viele Faktoren, die von 1 verschieden sind, denn es gilt

$$\mathbb{E} \left( \prod_{n=1}^{\infty} f(S_n) \right) = \mathbb{E} \left( \prod_{n: S_n \in B_f} f(S_n) \right).$$

- Wenn die Funktion  $f \in \mathcal{H}$  in (6) gegeben ist durch

$$f(x) = 1 + (z - 1)\mathbb{1}_B(x), \quad 0 \leq z \leq 1, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d), \quad (7)$$

dann ergibt sich als Spezialfall die erzeugende Funktion  $\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} z^{N_B}$  der Zufallsvariablen  $N_B$ .

Außerdem gilt der folgende *Eindeutigkeitssatz* für erzeugende Funktionale.

**Theorem 3.2** *Die Verteilung der Punktprozesses  $\{S_n\}$  ist eindeutig durch das erzeugende Funktional  $\mathbf{G}$  von  $\{S_n\}$  bestimmt.*

#### Beweis

- In Verallgemeinerung von (7) betrachten wir die folgende Funktion  $f \in \mathcal{H}$  mit

$$f(x) = \prod_{i=1}^k \left( 1 + (z_i - 1)\mathbb{1}_{B_i}(x) \right),$$

wobei  $k \geq 1$ ,  $0 \leq z_1, \dots, z_k \leq 1$  und  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  beliebige (beschränkte) Borel-Mengen sind.

- Dann kann man sich leicht überlegen, dass  $\mathbf{G}(f)$  die erzeugende Funktion

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \left( z_1^{N_{B_1}} \dots z_k^{N_{B_k}} \right) \quad (8)$$

des Zufallsvektors  $(N_{B_1}, \dots, N_{B_k})$  ist.

- Aus (8) folgt wegen des Eindeutigkeitssatzes für erzeugende Funktionen (vgl. Korollar WR-5.5), dass die Verteilung von  $(N_{B_1}, \dots, N_{B_k})$  eindeutig durch das erzeugende Funktional  $\mathbf{G}$  von  $\{S_n\}$  bestimmt ist.
- Hieraus und aus Theorem 2.1 ergibt sich die Behauptung. □

Für das erzeugende Funktional von Poisson-Prozessen lässt sich die folgende einfache Formel herleiten.

**Theorem 3.3** Sei  $\{S_n\}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ . Dann gilt

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - 1) \mu(dx)\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (9)$$

**Beweis**

- Die Gültigkeit von (9) lässt sich mit algebraischer Induktion zeigen, wobei wir zunächst zeigen, dass (9) für Linearkombinationen von Indikatorfunktionen gilt.
- Für  $k \geq 1$ ,  $0 \leq z_1, \dots, z_k \leq 1$  und  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  sei

$$f(x) = 1 - \sum_{i=1}^k (1 - z_i) \mathbb{1}_{B_i}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (10)$$

wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass die beschränkten Borel-Mengen  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  paarweise disjunkt sind.

- Dann sind die Zufallsvariablen  $N_{B_1}, \dots, N_{B_k}$  mit  $N_B = \#\{n : S_n \in B\}$  unabhängig, und es gilt somit für die in (10) gegebene Funktion  $f \in \mathcal{H}$ , dass

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E}\left(\prod_{n=1}^{\infty} f(S_n)\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^k z_i^{N_{B_i}}\right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{E} z_i^{N_{B_i}}. \quad (11)$$

- Weil die erzeugende Funktion  $\mathbb{E} z_i^{N_{B_i}}$  der poissonverteilten Zufallsvariablen  $N_{B_i}$  gegeben ist durch

$$\mathbb{E} z_i^{N_{B_i}} = \exp(\mu(B_i)(z_i - 1)) \quad \forall z_i \in (0, 1),$$

ergibt sich aus (10) und (11), dass

$$\mathbf{G}(f) = \prod_{i=1}^k \exp(\mu(B_i)(z_i - 1)) = \exp\left(\sum_{i=1}^k (\mu(B_i)(z_i - 1))\right) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - 1) \mu(dx)\right). \quad (12)$$

- Damit ist (9) für Linearkombinationen von Indikatorfunktionen bewiesen.
- Für beliebige  $f \in \mathcal{H}$  ergibt sich (9) nun aus der Tatsache, dass sich jede Funktion  $f \in \mathcal{H}$  durch eine Folge  $\{f_n\}$  von Funktionen der Gestalt (10) approximieren lässt, so dass

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

und

$$f_n(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus B, n \geq 1,$$

wobei  $B \in \mathcal{Q}^d$  ein beschränkter Quader ist, der nicht von  $n$  abhängt.

- Aus (6) und (12) ergibt sich dann mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{G}(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f_n(x) - 1) \mu(dx)\right) \\ &= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - 1) \mu(dx)\right) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - 1) \mu(dx)\right). \quad \square \end{aligned}$$

Aus den Theoremen 2.8 und 3.3 ergibt sich die folgenden *Invarianzeigenschaft* von Poisson-Prozessen bezüglich unabhängiger Verschiebung der Punkte, vgl. Abbildung 10.

**Korollar 3.1**

- Sei  $\{S_n\}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$ , und sei  $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  sei eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren mit der Verteilung  $P_U$ , die von  $\{S_n\}$  unabhängig sind.
- Dann ist  $\{S_n + U_n\}$  ein Poisson-Prozess, dessen Intensitätsmaß  $\mu'$  gegeben ist durch

$$\mu'(B) = \int_{\mathbb{R}^d} P_U(B - x) \mu(dx) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (13)$$

- Wenn  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$  ist, dann ist auch  $\{S_n + U_n\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$ .

**Beweis**

- Aus Theorem 2.8 folgt, dass  $\{(S_n, U_n)\}$  ein Poisson-Prozess im  $\mathbb{R}^{2d}$  mit Intensitätsmaß  $\mu \times P_U$  ist.
- Für  $f \in \mathcal{H}$  und  $f' : \mathbb{R}^{2d} \cup \{\infty\} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$f'(x, u) = f(x + u)$$

ergibt sich somit aus Theorem 3.3, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \prod_{n=1}^{\infty} f(S_n + U_n) \right) &= \exp \left( \int_{\mathbb{R}^{2d}} (f(x + u) - 1) \mu \times P_U(d(x, u)) \right) \\ &= \exp \left( \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x + u) - 1) \mu(dx) P_U(du) \right) \\ &= \exp \left( \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x + u) - 1) P_U(du) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left( \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (f(u) - 1) P_U(du - x) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left( \int_{\mathbb{R}^d} (f(u) - 1) \mu'(dx) \right), \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit durch algebraische Induktion bezüglich  $f - 1$  ergibt.

- Hieraus folgt (durch die erneute Anwendung von Theorem 3.3), dass das erzeugende Funktional des Punktprozesses  $\{S_n + U_n\}$  mit dem erzeugenden Funktional eines Poisson-Prozess übereinstimmt, dessen Intensitätsmaß durch (13) gegeben ist.
- Die erste Teilaussage von Korollar 3.1 ergibt sich nun aus dem Eindeutigkeitsatz für erzeugende Funktionale (vgl. Theorem 3.2).
- Wenn  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$  ist, d.h.,  $\mu(dx) = \lambda dx$ , dann ergibt sich aus (13), dass für jedes  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \mu'(B) &= \int_{\mathbb{R}^d} P_U(B - x) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B-x}(y) P_U(dy) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x + y) \mu(dx) P_U(dy) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x + y) dx P_U(dy) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) dx P_U(dy) = \lambda \nu_d(B). \quad \square \end{aligned}$$

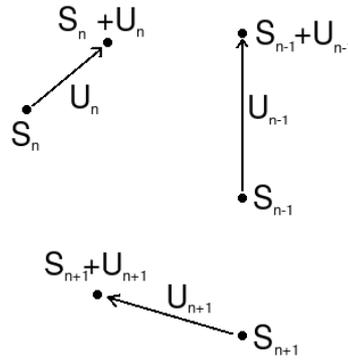


Abbildung 10: Unabhängige Verschiebung der Punkte

### 3.1.3 Laplace-Funktional

Analog zum Begriff des erzeugenden Funktional für Punktprozesse bzw. zufällige Zählmaße lässt sich das Laplace-Funktional für beliebige (nicht notwendig ganzzahlige) zufällige Maße einführen.

#### Definition

- Sei  $\mathbb{M}$  die Familie aller lokal endlichen Maße  $\eta : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ , d.h., es gilt  $\eta(B) < \infty$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  und  $\eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(B_n)$  für paarweise disjunkte  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
- Außerdem sei  $\mathcal{M}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\mathbb{M}$ , so dass  $\eta \mapsto \eta(B)$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  eine  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Abbildung ist.
- Ein *zufälliges Maß*  $\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{M}$  ist eine Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Werten in dem messbaren Raum  $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ , d.h.,  $\Lambda$  ist ein (mengen-indizierter) stochastischer Prozess  $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  über  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , so dass  $\{\Lambda_B(\omega), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  für jedes  $\omega \in \Omega$  ein lokal endliches Maß aus  $\mathbb{M}$  ist.

#### Definition

- Sei  $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein beliebiges zufälliges Maß. Außerdem sei  $\mathcal{H}'$  die Familie aller beschränkten Borel-messbaren Funktionen  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  mit  $f(x) = 0$ , wenn  $x$  außerhalb einer beschränkten (i.a. von  $f$  abhängigen) Borel-Menge  $B_f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  liegt.
- Die Abbildung  $\mathbf{L} : \mathcal{H}' \rightarrow [0, 1]$  mit

$$\mathbf{L}(f) = \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Lambda_{dx}\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}' \quad (14)$$

wird *Laplace-Funktional* des zufälligen Maßes  $\{\Lambda_B\}$  genannt.

#### Beachte

- Ähnlich wie für zufällige Zählmaße kann auch für zufällige Maße der Begriff der endlich-dimensionalen Wahrscheinlichkeiten eingeführt und eine (den Theoremen 2.1 und 2.2 entsprechende) Existenz- und Eindeutigkeitsaussage bewiesen werden; vgl. O. Kallenberg (1986), *Random Measures*, Academic Press, London, Kapitel 3 und 5.
- Hieraus ergibt sich insbesondere,
  - dass zwischen der Verteilung des zufälligen Maßes  $\{\Lambda_B\}$  und seinem Laplace-Funktional  $\mathbf{L}$  ein eindeutiger Zusammenhang besteht,

- denn für jedes  $k$ -Tupel von paarweise disjunkten Borel-Mengen  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  ist die Laplace-Stieltjes-Transformierte des Zufallsvektors  $(\Lambda_{B_1}, \dots, \Lambda_{B_k})$  gegeben durch

$$\mathbb{E} \exp\left(-\sum_{i=1}^k s_i \Lambda_{B_i}\right) = \mathbf{L}(f) \quad \forall s_1, \dots, s_k > 0,$$

wobei  $f(x) = \sum_{i=1}^k s_i \mathbb{1}_{B_i}(x)$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Für Punktprozesse (d.h. für zufällige Zählmaße) kann sowohl das erzeugende Funktional als auch das Laplace-Funktional betrachtet werden. Dabei sind diese beiden Charakteristiken wie folgt miteinander verknüpft.

**Theorem 3.4** Sei  $\{S_n\}$  ein beliebiger Punktprozess mit dem erzeugenden Funktional  $\mathbf{G}$  und dem Laplace-Funktional  $\mathbf{L}$ . Dann gilt

$$\mathbf{L}(f) = \mathbf{G}(\exp(-f)) \quad \forall f \in \mathcal{H}'. \quad (15)$$

**Beweis**

- Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (6) und (14) von  $\mathbf{G}$  bzw.  $\mathbf{L}$ .
- Denn für jedes  $f \in \mathcal{H}'$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(f) &\stackrel{(14)}{=} \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} f(x) N_{dx}\right) = \mathbb{E} \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)\right) \\ &= \mathbb{E} \left( \prod_{n=1}^{\infty} \exp(-f(S_n)) \right) \stackrel{(6)}{=} \mathbf{G}(\exp(-f)). \quad \square \end{aligned}$$

### 3.1.4 Stationarität und Isotropie

Unter der Stationarität bzw. Isotropie eines Punktprozesses versteht man die folgende Invarianzeigenschaften seiner endlich-dimensionalen Wahrscheinlichkeiten bezüglich beliebiger Verschiebungen des Nullpunktes bzw. Drehungen um den Nullpunkt.

**Definition**

- Für beliebige  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  bezeichne  $B+x = \{y+x : y \in B\}$  die Verschiebung der Borel-Menge  $B$  um den Vektor  $x$ . Ein Punktprozess  $\{S_n\}$  in  $\mathbb{R}^d$  bzw. das zugehörige Zählmaß  $\{N_B\}$  heißt *stationär*, wenn

$$(N_{B_1}, \dots, N_{B_n}) \stackrel{D}{=} (N_{B_1+x}, \dots, N_{B_n+x}) \quad (16)$$

für beliebige  $n \geq 1$ ,  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ .

- Ein Punktprozess  $\{S_n\}$  in  $\mathbb{R}^d$  bzw. das zugehörige Zählmaß  $\{N_B\}$  heißt *isotrop*, wenn

$$(N_{B_1}, \dots, N_{B_n}) \stackrel{D}{=} (N_{\delta(B_1)}, \dots, N_{\delta(B_n)}) \quad (17)$$

für beliebige  $n \geq 1$ ,  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und für jede Drehung  $\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  um den Nullpunkt.

**Beachte**

- Man kann zeigen, dass stationäre Punktprozesse mit Wahrscheinlichkeit 1 entweder aus unendlich vielen Punkten bestehen oder überhaupt keinen Punkt besitzen, d.h., es gilt dann

$$P(\{N_{\mathbb{R}^d} = \infty\} \cup \{N_{\mathbb{R}^d} = 0\}) = 1. \quad (18)$$

- Dabei kann die Aussage (18) sogar noch wie folgt verschärft werden, indem wir für jeden Vektor  $u \in \mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$  der Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^d$  den Halbraum

$$H_u^+ = \{x \in \mathbb{R}^d : [x, u] \geq 0\}$$

betrachten, wobei  $[x, u] = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$  das Skalarprodukt der Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $u = (u_1, \dots, u_n)$  bezeichnet;  $|x| = \sqrt{[x, x]}$ .

**Theorem 3.5** Sei  $\{N_B\}$  ein stationäres zufälliges Zählmaß. Dann gilt

$$P(\{N_{H_u^+} = \infty\} \cup \{N_{\mathbb{R}^d} = 0\}) = 1 \quad \forall u \in \mathbb{S}^{d-1}. \quad (19)$$

**Beweis**

- Für beliebige  $s, t \in \mathbb{R}$  mit  $s < t$  und  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  sei  $H_{u,s,t} = \{x \in \mathbb{R}^d : s \leq [x, u] \leq t\}$ .
- Dann kann man sich leicht überlegen, dass

$$H_{u,t,t+h} = H_{u,0,h} + tu \quad \forall t \in \mathbb{R}, h > 0.$$

- Hieraus und aus der Stationarität von  $\{N_B\}$  ergibt sich, dass

$$P(N_{H_{u,t,t+h}} > 0) = P(N_{H_{u,0,h}} > 0) \quad \forall t \in \mathbb{R}, h > 0.$$

- Somit gilt

$$\begin{aligned} P(N_{H_{u,t,t+h}} > 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(N_{H_{u,n,n+h}} > 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \mathbb{I}(N_{H_{u,n,n+h}} > 0) \\ &\leq \mathbb{E} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{I}(N_{H_{u,n,n+h}} > 0) \\ &\leq \mathbb{E} \mathbb{I}(N_{H_{u,n,n+h}} > 0 \text{ für unendlich viele } n \geq 1) \\ &\leq P(N_{H_u^+} = \infty), \end{aligned}$$

wobei sich die erste Ungleichung aus dem Lemma von Fatou ergibt.

- Für  $h \rightarrow \infty$  ergibt sich hieraus, dass

$$P(N_{\{x \in \mathbb{R}^d : t \leq [x, u]\}} > 0) \leq P(N_{H_u^+} = \infty),$$

und somit für  $t \rightarrow -\infty$ , dass

$$P(N_{\mathbb{R}^d} > 0) \leq P(N_{H_u^+} = \infty). \quad (20)$$

- Aus (20) folgt, dass

$$\begin{aligned} P(N_{\mathbb{R}^d} > 0, N_{H_u^+} < \infty) &= P(\{N_{\mathbb{R}^d} > 0\} \setminus \{N_{H_u^+} = \infty\}) \\ &= P(N_{\mathbb{R}^d} > 0) - P(N_{H_u^+} = \infty) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

- Somit gilt  $P(N_{\mathbb{R}^d} > 0, N_{H_u^+} < \infty) = 0$  bzw. äquivalent hierzu

$$P(\{N_{\mathbb{R}^d} = 0\} \cup \{N_{H_u^+} = \infty\}) = 1. \quad \square$$

**Theorem 3.6** Sei  $\{N_B\}$  ein stationäres zufälliges Zählmaß. Dann gibt es eine Konstante  $\lambda < \infty$ , so dass

$$\mu(B) = \lambda \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (21)$$

**Beweis**

- Aus der Stationarität von  $\{N_B\}$  ergibt sich, dass

$$\mu(B) = \mathbb{E} N_B = \mathbb{E} N_{B+x} = \mu(B+x) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d,$$

d.h., das Intensitätsmaß  $\mu$  ist translationsinvariant.

- Weil außerdem vorausgesetzt wird, dass  $\mu$  lokal endlich ist, ergibt sich aus dem Lemma von Haar,
  - dass  $\mu$  ein Vielfaches des  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes  $\nu_d$  sein muss,
  - d.h., es gibt eine Konstante  $\lambda \geq 0$ , so dass

$$\mu(B) = \lambda \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

- Insbesondere gilt also, dass  $\mu([0, 1]^d) = \lambda$  und somit dass  $\lambda < \infty$ . □

**Korollar 3.2** Für jedes stationäre zufällige Zählmaß  $\{N_B\}$  gilt

$$P(N_{\{x\}} > 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (22)$$

**Beweis** Aus Theorem 3.6 folgt, dass  $\mu(\{x\}) = 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ . Hieraus ergibt sich, dass

$$P(N_{\{x\}} = 0) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \square$$

**Beachte**

- Genauso wie bei homogenen Poisson-Prozessen wird die Konstante  $\lambda$  in Theorem 3.6 die *Intensität* des stationären Punktprozesses  $\{S_n\}$  bzw. des stationären zufälligen Zählmaßes  $\{N_B\}$  genannt.
- Aus (21) ergibt sich, dass

$$\hat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_d(W)} \quad (23)$$

für jedes  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\lambda$  ist.

- Wenn  $W_1, W_2, \dots$  eine Folge von Beobachtungsfenstern  $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  ist und wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } N_{W_n}}{\nu_d^2(W_n)} = 0, \quad (24)$$

dann ergibt sich aus der Tschebyschew-Ungleichung (vgl. Theorem WR-4.18), dass der erwartungstreue Schätzer  $\hat{\lambda}_{W_n}$  schwach konsistent ist.

- Im allgemeinen muss  $\hat{\lambda}_{W_n}$  jedoch weder asymptotisch normalverteilt noch stark konsistent sein. Dabei gibt es sogar Beispiele (vgl. Abschnitt 3.2.2), für die

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{W_n} \neq \lambda\right) = 1.$$

**3.2 Cox-Prozesse****3.2.1 Simulationsalgorithmus und grundlegende Eigenschaften**

Außer den in Kapitel 2 betrachteten Poissonschen Zählmaßen gibt es noch weitere Klassen von zufälligen Punktprozessen.

Ein zufälliges Zählmaß  $\{N_B\}$  wird Cox-Prozess genannt, wenn sich seine Verteilung als eine Mischung der Verteilungen von (nicht notwendig homogenen) Poisson-Prozessen darstellen lässt. Deshalb wird für diese Klasse von Punktprozessen auch der Begriff *doppelt-stochastischer Poisson-Prozess* verwendet.

**Definition**

- Sei  $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein beliebiges zufälliges Maß, das mit Wahrscheinlichkeit 1 lokal–endlich ist.
- Das zufällige Zählmaß  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  wird *Cox–Prozess* mit dem zufälligen Intensitätsmaß  $\Lambda$  genannt, wenn

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N_{B_i} = k_i\}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \frac{\Lambda_{B_i}^{k_i}}{k_i!} \exp(-\Lambda_{B_i})\right) \quad (25)$$

für beliebige  $n \geq 1$ ,  $k_1, \dots, k_n \geq 0$  und für paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .

**Beachte**

- Aus den Theoremen 2.1 und 2.2 ergibt sich, dass die Verteilung des Cox–Prozesses  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  durch die in (25) gegebenen „endlich–dimensionalen“ Wahrscheinlichkeiten wohldefiniert und eindeutig bestimmt ist.
  - Dabei lässt sich das zufällige Zählmaß  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit den in (25) gegebenen Wahrscheinlichkeiten als ein mengen–indizierter stochastischer Prozess über dem folgenden Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  definieren mit

$$\Omega = \mathbb{N} \times \mathbb{M}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$$

und  $N_B(\omega) = \varphi(B)$  für beliebige  $\omega = (\varphi, \eta) \in \Omega$  und  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

- Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P : \mathcal{N} \otimes \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$  wird durch die Verteilung  $P_\Lambda : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$  des zufälligen Intensitätsmaßes  $\{\Lambda_B\}$  induziert, wobei

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N_{B_i} = k_i\}\right) = \int_{\mathbb{M}} \prod_{i=1}^n \frac{\eta^{k_i}(B_i)}{k_i!} \exp(-\eta(B_i)) P_\Lambda(d\eta) \quad (26)$$

für beliebige  $n \geq 1$ ,  $k_1, \dots, k_n \geq 0$  und für paarweise disjunkte  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .

- Eine zu (25) bzw. (26) äquivalente Schreibweise ist die folgende (kontinuierliche Version) der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N_{B_i} = k_i\}\right) = \int_{\mathbb{M}} P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N_{B_i} = k_i\} \mid \Lambda = \eta\right) P(\Lambda \in d\eta), \quad (27)$$

wobei

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N_{B_i} = k_i\} \mid \Lambda = \eta\right) = \prod_{i=1}^n \frac{\eta^{k_i}(B_i)}{k_i!} \exp(-\eta(B_i)).$$

- Die Verteilung des Cox–Prozesses  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  lässt sich somit als eine Mischung von Verteilungen (nicht notwendig homogener) Poisson–Prozesse darstellen.
- Hieraus ergibt sich ein Algorithmus zur Simulation von Cox–Prozessen in einer vorgegebenen Borel–Menge  $C \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ :
  1. Generiere eine Realisierung  $\eta(\cdot \cap C)$  des zufälligen Maßes  $\Lambda$  in  $C$ . (Beispiele, für die das auf einfache Weise möglich ist, werden in Abschnitt 3.2.3 diskutiert.)
  2. Generiere eine Realisierung eines (i.a. inhomogenen) Poisson–Prozesses mit dem Intensitätsmaß  $\eta(\cdot \cap C)$ . (Algorithmen hierfür wurden in den Abschnitten 2.1.4 bzw. 2.2.1 bzw. 2.3.1 betrachtet.)

Wir leiten nun die folgenden grundlegenden Eigenschaften von Cox–Prozessen her.

**Theorem 3.7** Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein Cox–Prozess mit dem zufälligen Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ .

- Dann besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den Verteilungen von  $\{N_B\}$  und  $\{\Lambda_B\}$ .
- Außerdem gilt

$$\mathbf{G}(f) = \mathbf{L}(1 - f) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (28)$$

wobei  $\mathbf{G}$  das erzeugende Funktional des Cox-Prozesses  $\{N_B\}$  und  $\mathbf{L}$  das Laplace-Funktional von  $\{\Lambda_B\}$  ist.

- D.h., es gilt

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - f(x)) \Lambda_{dx}\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (29)$$

### Beweis

- Wir zeigen zunächst die Gültigkeit von (28).
  - Aus (26) ergibt sich mit Hilfe von Theorem 3.3, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(f) &\stackrel{(26)}{=} \int_{\mathbb{M}} \mathbf{G}_\eta(f) P(\Lambda \in d\eta) \\ &\stackrel{(9)}{=} \int_{\mathbb{M}} \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - 1) \eta(dx)\right) P(\Lambda \in d\eta) \\ &= \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - f(x)) \Lambda_{dx}\right) \\ &= \mathbf{L}(1 - f), \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{G}_\eta$  das erzeugende Funktional eines Poisson-Prozesses mit dem Intensitätsmaß  $\eta$  ist.

- Der eindeutige Zusammenhang zwischen den Verteilungen von  $\{N_B\}$  und  $\{\Lambda_B\}$  lässt sich wie folgt zeigen.
  - Das Laplace-Funktional  $\mathbf{L}$  des zufälligen Maßes  $\{\Lambda_B\}$  ist eindeutig bestimmt durch seine Werte  $\mathbf{L}(f)$  für Funktionen  $f \in \mathcal{H}'$  mit  $0 \leq f(x) \leq 1$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ ,
  - und es besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Laplace-Funktional  $\mathbf{L}$  und der Verteilung von  $\{\Lambda_B\}$ , vgl. Abschnitt 3.1.2.
  - Außerdem ergibt sich aus (28), dass der Zusammenhang zwischen  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{G}$  eindeutig ist.
  - Schließlich ergibt sich aus Theorem 3.2, dass die Verteilung des Cox-Prozesses  $\{N_B\}$  eindeutig durch sein erzeugendes Funktional  $\mathbf{G}$  bestimmt wird.  $\square$

### Theorem 3.8

- Das Intensitätsmaß  $\mu$  eines Cox-Prozesses  $\{N_B\}$  ist gegeben durch

$$\mu(B) = \mathbb{E} \Lambda_B \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (30)$$

- Der Cox-Prozess  $\{N_B\}$  ist genau dann stationär, wenn sein zufälliges Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B\}$  stationär ist, d.h., wenn

$$(\Lambda_{B_1}, \dots, \Lambda_{B_n}) \stackrel{D}{=} (\Lambda_{B_1+x}, \dots, \Lambda_{B_n+x}) \quad (31)$$

für beliebige  $n \geq 1$ ,  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ .

- Die Intensität  $\lambda$  eines stationären Cox-Prozesses ist gegeben durch

$$\lambda = \mathbb{E} \Lambda_{[0,1]^d}. \quad (32)$$

**Beweis**

- Die Gültigkeit von (30) ergibt sich unmittelbar aus der Mischungsdarstellung (26) von Cox-Prozessen, denn es gilt

$$\mu(B) = \mathbb{E} N_B = \int_{\mathbb{M}} \mathbb{E}(N_B | \Lambda = \eta) P(\Lambda \in d\eta) = \int_{\mathbb{M}} \eta(B) P(\Lambda \in d\eta) = \mathbb{E} \Lambda(B).$$

- Wenn  $\{\Lambda_B\}$  stationär ist, dann ergibt sich die Stationarität von  $\{N_B\}$  unmittelbar aus der Definitionsgleichung (25) von Cox-Prozessen.
- Außerdem ist für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  das (um  $x$  verschobene) zufällige Maß  $\{\Lambda_{B+x}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  das zufällige Intensitätsmaß des (entsprechend verschobenen) Cox-Prozesses  $\{N_{B+x}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ .
- Wenn umgekehrt  $\{N_B\}$  stationär ist, dann ergibt sich somit die Stationarität von  $\{\Lambda_B\}$  aus dem eindeutigen Zusammenhang zwischen Cox-Prozessen und ihren zufälligen Intensitätsmaßen, der in Theorem 3.7 gezeigt wurde.
- Die Darstellungsformel (32) für die Intensität  $\lambda$  von stationären Cox-Prozessen ergibt sich aus (30) für  $B = [0, 1]^d$ .  $\square$

**3.2.2 Absolutstetiges zufälliges Intensitätsmaß; Schätzung der Intensität**

Ein wichtiger Spezialfall eines Cox-Prozesses liegt dann vor,

- wenn die Realisierungen des zufälligen Intensitätsmaßes  $\{\Lambda_B\}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 absolutstetig bezüglich des  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes sind, d.h.,
- wenn es ein zufälliges Feld  $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  gibt, dessen Realisierungen Borel-messbare und lokal-integrierbare nichtnegative Funktionen sind, so dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\Lambda_B = \int_B \lambda_x dx < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (33)$$

- Das zufällige Feld  $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  wird dann das *Intensitätsfeld* von  $\{N_B\}$  genannt.

**Theorem 3.9** *Das in (33) gegebene zufällige Maß  $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ist stationär, wenn das zufällige Feld  $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  stationär ist. Wenn zusätzlich  $\mathbb{E} \lambda_o < \infty$ , dann gilt*

$$\mathbb{E} \Lambda_B = \nu_d(B) \mathbb{E} \lambda_o < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (34)$$

**Beweis**

- Wenn  $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  stationär ist, d.h., wenn

$$\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{D}{=} \{\lambda_{x+y}, x \in \mathbb{R}^d\} \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad (35)$$

dann ergibt sich aus (33), dass

$$(\Lambda_{B_1}, \dots, \Lambda_{B_n}) \stackrel{D}{=} (\Lambda_{B_1+y}, \dots, \Lambda_{B_n+y}) \quad \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

- Außerdem ergibt sich aus (33) und (35), dass

$$\mathbb{E} \Lambda_B \stackrel{(33)}{=} \mathbb{E} \int_B \lambda_x dx = \int_B \mathbb{E} \lambda_x dx \stackrel{(35)}{=} \int_B \mathbb{E} \lambda_o dx = \mathbb{E} \lambda_o \int_B dx = \mathbb{E} \lambda_o \nu_d(B). \quad \square$$

**Beachte**

- Wenn umgekehrt das zufällige Maß  $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  stationär ist und wenn

$$(\lambda_{x_1}, \dots, \lambda_{x_n}) \stackrel{D}{=} \left( \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Lambda_{B(x_1, r)}}{\kappa_d r^d}, \dots, \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Lambda_{B(x_n, r)}}{\kappa_d r^d} \right) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d, \quad (36)$$

dann ist das auch das zufällige Feld  $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  stationär.

- Aus den Theoremen 3.8 und 3.9 ergibt sich, dass ein Cox-Prozess  $\{N_B\}$  stationär ist, wenn sein zufälliges Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B\}$  durch (33) gegeben ist und wenn das zugrundeliegende zufällige Feld  $\{\lambda_x\}$  stationär ist.

- Für die Intensität  $\lambda$  des stationären Cox-Prozesses  $\{N_B\}$  ergibt sich dann aus (32) und (34), dass

$$\lambda = \mathbb{E} \lambda_o. \quad (37)$$

- Wenn das stationäre Intensitätsfeld  $\{\lambda_x\}$  von  $\{N_B\}$  in dem Fenster  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  beobachtbar ist, dann ergibt sich aus (37), dass durch

$$\tilde{\lambda}_W = \frac{1}{\nu_d(W)} \int_W \lambda_x \, dx \quad \text{mit } 0 < \nu_d(W) < \infty \quad (38)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für die Intensität  $\lambda$  von  $\{N_B\}$  gegeben ist.

**3.2.3 Gemischte Poisson-Prozesse, Neyman-Scott-Prozesse, modulierte Poisson-Prozesse**

In diesem Abschnitt führen wir einige Beispiele von Cox-Prozessen mit absolutstetigem zufälligen Intensitätsmaß ein.

1. *Gemischte Poisson-Prozesse*

Eine elementare Klasse von Cox-Prozessen mit absolutstetigen Realisierungen des zufälligen Intensitätsmaßes  $\{\Lambda_B\}$  sind die *gemischten Poisson-Prozesse*, deren Intensitätsfeld  $\{\lambda_x\}$  durch  $\lambda_x = Z$  gegeben ist, wobei  $Z : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  eine beliebige nichtnegative Zufallsvariable mit  $\mathbb{E} Z < \infty$  ist.

- Aus den Theoremen 3.8 bzw. 3.9 ergibt sich, dass jeder gemischte Poisson-Prozess ein stationärer Punktprozess ist. Seine Intensität  $\lambda$  ist gegeben durch

$$\lambda = \mathbb{E} Z. \quad (39)$$

- Außerdem gilt in diesem Fall

$$\text{Var } N_B = \nu_d(B) \mathbb{E} Z + \nu_d^2(B) \text{Var } Z, \quad (40)$$

- denn aus der Definitionsgleichung (25) von Cox-Prozessen ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \text{Var } N_B &= \mathbb{E} N_B^2 - (\mathbb{E} N_B)^2 \\ &= \int_0^\infty (z \nu_d(B) + (z \nu_d(B))^2) P(Z \in dz) - \left( \int_0^\infty z \nu_d(B) P(Z \in dz) \right)^2 \\ &= \nu_d(B) \mathbb{E} Z + \nu_d^2(B) \text{Var } Z. \end{aligned}$$

- Wenn  $\text{Var } Z > 0$ , d.h., die Zufallsvariable  $Z$  nimmt nicht nur einen Wert an,
  - dann folgt aus (40), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } N_{W_n}}{\nu_d^2(W_n)} = \text{Var } Z > 0, \quad (41)$$

- wenn  $W_1, W_2, \dots$  eine Folge von Beobachtungsfenstern  $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  ist mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) = \infty. \quad (42)$$

- Es kann dann also nicht so wie in (24) auf die schwache Konsistenz des Intensitätsschätzers

$$\widehat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_d(W)}$$

geschlossen werden.

- Wenn  $\text{Var } Z > 0$ , dann kann man sich darüber hinaus leicht überlegen, dass  $\widehat{\lambda}_W$  im allgemeinen weder asymptotisch normalverteilt noch konsistent ist.

- Denn aus Theorem 2.9 ergibt sich, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)} = Z,$$

- wenn  $W_1 \subset W_2 \subset \dots$  eine monotone Folge von Beobachtungsfenstern  $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  ist, für die (42) gilt.

- Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass  $Z$  absolutstetig ist, dann gilt also sogar

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)} \neq \lambda\right) = 1.$$

## 2. Neyman–Scott–Prozesse

Wir betrachten nun eine Klasse von Cox–Prozessen, die auch als Poissonsche Cluster–Prozesse aufgefasst werden können; vgl. Abschnitt 3.3.

- Sei  $\{S_n\}$  ein Poisson–Prozess mit der (lokal integrierbaren) Intensitätsfunktion  $\{\lambda_0(x), x \in \mathbb{R}^d\}$ , und sei  $Z = \#\{n : S_n \in \mathbb{R}^d\}$  die (zufällige) Anzahl der Atome von  $\{S_n\}$  in  $\mathbb{R}^d$ .
- Außerdem sei  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Poissonschen Zählmaßen, die von  $\{S_n\}$  unabhängig sind und die integrierbare Intensitätsfunktion  $\{\lambda^{(1)}(x), x \in \mathbb{R}^d\}$  besitzen, d.h., es gelte

$$\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx < \infty. \quad (43)$$

- In einem allgemeineren Zusammenhang werden wir später zeigen (vgl. Theorem 3.14), dass das zufällige Zählmaß  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ , wobei

$$N_B = \sum_{n=1}^Z N_{B-S_n}^{(n)} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (44)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 lokal endlich ist, wenn die folgende Integrierbarkeitsbedingung erfüllt ist:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_B \lambda^{(1)}(y-x) dy \lambda_0(x) dx < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (45)$$

Darüber hinaus kann man zeigen, dass das in (44) eingeführte zufällige Zählmaß  $\{N_B\}$  die folgenden Eigenschaften hat.

### Theorem 3.10

- Wenn (45) gilt, dann ist  $\{N_B\}$  ein Cox–Prozess, dessen Intensitätsfeld  $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  gegeben ist durch

$$\lambda_x = \sum_{n=1}^Z \lambda^{(1)}(x - S_n) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (46)$$

- Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass der Poisson-Prozess  $\{S_n\}$  stationär ist, d.h., wenn es eine Konstante  $\lambda_0 > 0$  gibt, so dass

$$\lambda(x) = \lambda_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

- dann ist auch der Cox-Prozess  $\{N_B\}$  stationär,
- und die Intensität  $\lambda = \mathbb{E} N_{[0,1]^d}$  von  $\{N_B\}$  ist gegeben durch

$$\lambda = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx. \quad (47)$$

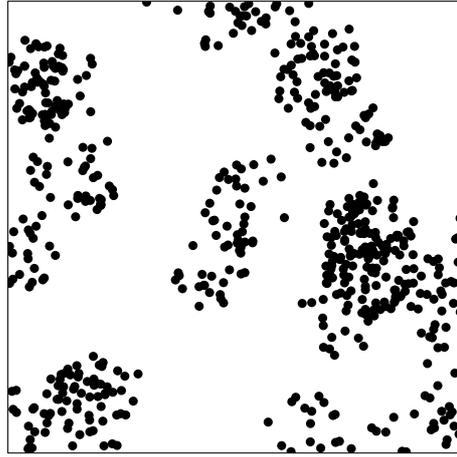


Abbildung 11: Matérn-Cluster-Prozess;  $\lambda_0 = 0.002$ ,  $\lambda^{(1)} = 0.1$ ,  $R = 10$

### Beweis

- Der erste Teil der Behauptung ergibt sich aus den allgemeinen Eigenschaften von Poissonschen Cluster-Prozessen, die wir in Abschnitt 3.3 herleiten werden.
  - Insbesondere zeigen wir in Abschnitt 3.3.3, dass das erzeugende Funktional  $\mathbf{G}$  des in (44) eingeführten Punktprozesses  $\{N_B\}$  gegeben ist durch

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} (1-f(x)) \Lambda dx\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (48)$$

- wobei  $\{\Lambda_B\}$  ein zufälliges Maß ist mit

$$\Lambda_B = \int_B \sum_{n=1}^Z \lambda^{(1)}(x - S_n) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (49)$$

- Mit Hilfe von Theorem 3.7 ergibt sich hieraus, dass  $\{N_B\}$  ein Cox-Prozess ist, dessen zufälliges Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B\}$  durch (49) gegeben ist.
- Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass  $\{S_n\}$  ein stationärer Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda_0$  ist,
  - dann ergibt sich aus (49), dass das zufällige Maß  $\{\Lambda_B\}$  stationär ist.
  - Wegen Theorem 3.8 ist somit auch der Cox-Prozess  $\{N_B\}$  stationär.
  - Außerdem ergibt sich aus (46), dass

$$\mathbb{E} \lambda_o = \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(1)}(-S_n) \stackrel{\text{Theorem 3.1}}{=} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(-x) dx = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx,$$

wobei sich die vorletzte Gleichheit aus dem Campbellschen Theorem (vgl. Theorem 3.1) ergibt.

– Hieraus und aus (32) bzw. (34) ergibt sich der zweite Teil der Behauptung.  $\square$

### Beachte

- Der in (44) eingeführte Cox-Prozess  $\{N_B\}$  wird in der Literatur *Neyman-Scott-Prozess* genannt.
- Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass

$$\lambda^{(1)}(x) = \begin{cases} \lambda^{(1)}, & \text{falls } x \in B(o, R), \\ 0, & \text{falls } x \notin B(o, R) \end{cases} \quad (50)$$

für gewisse Konstanten  $\lambda^{(1)}$ ,  $R > 0$ , dann sagt man, dass  $\{N_B\}$  ein *Matérn-Cluster-Prozess* ist, vgl. die Abbildungen 11 und 12.

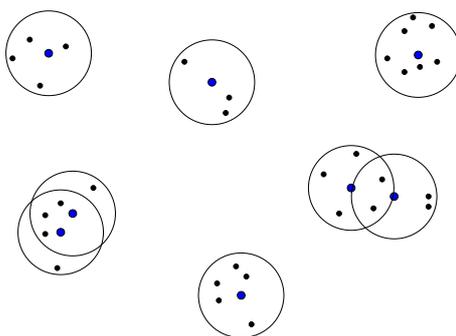


Abbildung 12: Simulation von Matérn-Cluster-Prozessen

### 3. Modulierte Poisson-Prozesse

Eine weitere Klasse von Cox-Prozessen ergibt sich, wenn das Intensitätsfeld  $\{\lambda_x\}$  durch ein so genanntes Keim-Korn-Modell induziert wird.

- Hierfür sei  $\{S_n\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses mit der Intensität  $\lambda_0 \in (0, \infty)$ , wobei  $S_n$  als Keim und die Kugel  $B(S_n, r)$  mit Mittelpunkt  $S_n$  und Radius  $r > 0$  als das zugehörige Korn aufgefasst werden.
- Sei  $\mathcal{F}$  die Familie aller abgeschlossenen Teilmengen in  $\mathbb{R}^d$ . Für eine Zahl  $r > 0$  betrachten wir die (zufällige) Menge  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ , die *Keim-Korn-Modell* genannt wird und die gegeben ist durch

$$\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(S_i, r). \quad (51)$$

- *Beachte:* Man kann sich leicht überlegen, dass die Vereinigung auf der rechten Seite von (51) mit Wahrscheinlichkeit 1 eine abgeschlossene Menge ist.
- Das Intensitätsfeld  $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  ist dann gegeben durch den Ansatz

$$\lambda_x = \begin{cases} \lambda_1, & \text{falls } x \in \Xi, \\ \lambda_2, & \text{falls } x \notin \Xi, \end{cases} \quad (52)$$

wobei  $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$  beliebige Zahlen mit  $\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$  sind.

- Ein Cox-Prozess  $\{N_B\}$ , dessen Intensitätsfeld  $\{\lambda_x\}$  durch (52) gegeben ist, wird *modulierter Poisson-Prozess* genannt, vgl. Abbildung 13.

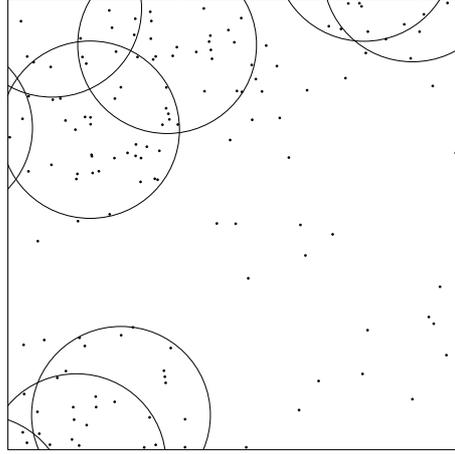


Abbildung 13: Modulierter Poisson-Prozess

- Im Spezialfall, wenn  $\lambda_1 = 0$  (und somit  $\lambda_2 > 0$ ), spricht man von einem *Swiss-Cheese-Modell*.
- Wenn umgekehrt  $\lambda_2 = 0$  (und  $\lambda_1 > 0$ ), dann sagt man, dass der Cox-Prozess  $\{N_B\}$  ein *Inner-City-Modell* ist.

**Theorem 3.11** Sei  $\kappa_d = \nu_d(B(o, 1))$  das Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel. Für die Intensität  $\lambda$  eines modulierten Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$ , dessen Intensitätsfeld  $\{\lambda_x\}$  durch (52) gegeben ist, gilt dann

$$\lambda = \lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d). \quad (53)$$

**Beweis**

- Weil das in (52) eingeführte Intensitätsfeld stationär ist, ergibt sich aus Theorem 3.8, dass der zugehörige Cox-Prozess  $\{N_B\}$  stationär ist.
- Aus der allgemeinen Darstellungsformel (34), die in Theorem 3.9 für das Intensitätsmaß von stationären Cox-Prozessen hergeleitet wurde, ergibt sich unter Berücksichtigung von (52), dass

$$\begin{aligned} \lambda &= \mathbb{E} \lambda_o = \lambda_1 P(o \in \Xi) + \lambda_2 P(o \notin \Xi) \\ &= \lambda_1 P(\#\{n : |S_n| \leq r\} > 0) + \lambda_2 P(\#\{n : |S_n| \leq r\} = 0) \\ &= \lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d). \end{aligned} \quad \square$$

### 3.2.4 Varianz und asymptotische Normalverteiltheit des Intensitätsschätzers

#### 1. Neyman-Scott-Prozesse

- Sei  $\{N_B\}$  ein Neyman-Scott-Prozess, der durch (44) gegeben ist und den Integrierbarkeitsbedingungen (43) und (45) genügt.
- Wenn  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson-Prozess ist, dann ergibt sich aus Theorem 3.10, dass  $\{N_B\}$  ein stationärer Cox-Prozess ist und dass

$$\hat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_d(W)} \quad (54)$$

für jedes  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$  ein erwartungstreuer Schätzer für die Intensität  $\lambda$  von  $\{N_B\}$  ist.

Die folgende Darstellungsformel für die Varianz von  $\widehat{\lambda}_W$  ist nützlich.

**Lemma 3.1** *Sei  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda_0$ . Dann gilt für jede Borel-Menge  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$*

$$\text{Var } \widehat{\lambda}_W = \frac{\lambda_0}{\nu_d(W)} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\nu_d(W \cap (W - (x_2 - x_1)))}{\nu_d(W)} \lambda^{(1)}(x_1) \lambda^{(1)}(x_2) dx_1 dx_2 \right). \quad (55)$$

**Beweis**

- Mit der Kurzschreibweise  $P(d\{s_n\}) = P(\{S_n\} \in d\{s_n\})$  ergibt sich aus der Definitionsgleichung (44) von  $N_W$ , dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (N_W)^2 &= \int \mathbb{E} \left( \sum_{n=1}^{\infty} N_{W-s_n}^{(n)} \right)^2 P(d\{s_n\}) \\ &= \int \mathbb{E} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( N_{W-s_n}^{(n)} - \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) dx + \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) dx \right) \right)^2 P(d\{s_n\}) \\ &= \int \left( \left( \sum_{n=1}^{\infty} \text{Var } N_{W-s_n}^{(n)} \right) + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) dx \right)^2 \right) P(d\{s_n\}), \end{aligned}$$

- wobei in der letzten Gleichheit genutzt wurde, dass  $N_{W-s_1}^{(1)}, N_{W-s_2}^{(2)}, \dots$  unabhängige Zufallsvariablen sind mit

$$N_{W-s_n}^{(n)} \sim \text{Poi} \left( \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) dx \right)$$

- und dass somit insbesondere

$$\mathbb{E} N_{W-s_n}^{(n)} = \text{Var } N_{W-s_n}^{(n)} = \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) dx.$$

- Hieraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (N_W)^2 &= \int \left( \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) dx \right) + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) dx \right)^2 \right) P(d\{s_n\}) \\ &= \int \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) dx \right) P(d\{s_n\}) + \int \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) dx \right)^2 P(d\{s_n\}) \\ &\quad + \int \sum_{n \neq m} \left( \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) dx \right) \left( \int_{W-s_m} \lambda^{(1)}(x) dx \right) P(d\{s_n\}) \\ &\stackrel{(5)}{=} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{W-y} \lambda^{(1)}(x) dx dy + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{W-y} \lambda^{(1)}(x) dx \right)^2 dy \\ &\quad + \left( \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{W-y} \lambda^{(1)}(x) dx dy \right)^2 \\ &= \lambda_0 \nu_d(W) \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \\ &\quad + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \nu_d(W \cap (W - (x_2 - x_1))) \lambda^{(1)}(x_1) \lambda^{(1)}(x_2) dx_1 dx_2 \\ &\quad + \left( \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{W-y} \lambda^{(1)}(x) dx dy \right)^2, \end{aligned}$$

wobei sich die vorletzte Gleichheit aus dem Campbellschen Theorem (vgl. Theorem 3.1) ergibt.

- Weil

$$\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{W-y} \lambda^{(1)}(x) dx dy = \lambda_0 \nu_d(W) \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \stackrel{(47)}{=} \mathbb{E} N_W,$$

ergibt sich somit, dass

$$\begin{aligned} \text{Var } N_W &= \lambda_0 \nu_d(W) \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \\ &+ \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \nu_d(W \cap (W - (x_2 - x_1))) \lambda^{(1)}(x_1) \lambda^{(1)}(x_2) dx_1 dx_2. \quad \square \end{aligned}$$

Außerdem hat der Schätzer  $\widehat{\lambda}_W$  die folgenden asymptotischen (Güte-) Eigenschaften.

### Theorem 3.12

1. Sei  $W_1, W_2, \dots$  eine Folge von Beobachtungsfenstern  $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann ist der erwartungstreue Schätzer  $\widehat{\lambda}_{W_n}$  schwach konsistent, d.h., für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0. \quad (56)$$

2. Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_d(W_n)} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (57)$$

dann existiert der Grenzwert  $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var } \widehat{\lambda}_{W_n}$ , wobei

$$\sigma^2 = \lambda_0 \left( \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx + \left( \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \right)^2 \right), \quad (58)$$

und der Schätzer  $\widehat{\lambda}_{W_n}$  ist asymptotisch normalverteilt, d.h., für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\sigma^2}} (\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda) \leq x\right) = \Phi(x), \quad (59)$$

wobei  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

### Beweis

- Aus Formel (55) in Lemma 3.1 ergibt sich, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var } \widehat{\lambda}_{W_n} = 0$ , wenn  $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$ .  
– Hieraus und aus der Tschebyschew-Ungleichung (vgl. Theorem WR-4.18) ergibt sich, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } \widehat{\lambda}_{W_n}}{\varepsilon^2} = 0,$$

– Damit ist die Gültigkeit von (56) bewiesen.

- Offenbar gilt

$$\frac{\nu_d(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_d(W_n)} \leq 1 \quad \forall n \geq 1.$$

– Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz ergibt sich deshalb aus (55) und (57), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var } \widehat{\lambda}_{W_n} = \lambda_0 \left( \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx + \left( \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \right)^2 \right).$$

– Damit ist (58) bewiesen.

- Um die Verteilungskonvergenz (59) zu beweisen, betrachten wir die entsprechenden charakteristischen Funktionen (ähnlich wie im Beweis von Theorem 2.9) und zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp\left(is \frac{N_{W_n} - \mathbb{E} N_{W_n}}{\sqrt{\nu_d(W_n)}}\right) = \exp\left(-\frac{s^2 \sigma^2}{2}\right) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (60)$$

wobei die asymptotische Varianz  $\sigma^2$  in (58) gegeben ist.

- Man kann sich leicht überlegen, dass der Erwartungswert

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \left( \prod_{n=1}^{\infty} f(S'_n) \right),$$

der in der Definitionsgleichung (6) des erzeugenden Funktionals  $\mathbf{G}$  eines (beliebigen) Punktprozesses  $\{S'_n\}$  betrachtet wurde, auch für Funktionen  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(x) = 1 + (e^{is} - 1) \mathbf{1}_B(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (61)$$

wohldefiniert ist, wobei  $s \in \mathbb{R}$  und  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .

- Dabei ist  $\mathbf{G}(f)$  für die in (61) betrachtete Funktion  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ , die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen  $N'_B = \#\{n: S'_n \in B\}$ , d.h., es gilt

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} e^{isN'_B}. \quad (62)$$

- Außerdem werden wir in Abschnitt 3.3.3 zeigen (vgl. auch (48) und (49)), dass

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} (1-f(x)) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(1)}(x-S_k) dx\right).$$

- Hieraus und aus (61) bzw. (62) folgt, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \exp(is\sqrt{\nu_d(W_n)} \widehat{\lambda}_{W_n}) \right) \\ &= \mathbb{E} \exp\left(\int_{W_n} (e^{is/\sqrt{\nu_d(W_n)}} - 1) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(1)}(x-S_k) dx\right) \\ &= \mathbb{E} \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(\int_{W_n} (e^{is/\sqrt{\nu_d(W_n)}} - 1) \lambda^{(1)}(x-S_k) dx\right) \\ &= \exp\left(\lambda_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\int_{W_n} (e^{is/\sqrt{\nu_d(W_n)}} - 1) \lambda^{(1)}(x-y) dx\right) - 1\right) dy\right), \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Darstellungsformel (9) für das erzeugende Funktional von Poisson-Prozessen ergibt.

- Somit ergibt sich durch Taylor-Reihenentwicklung der (mittleren) Exponentialfunktion des letzten Ausdruckes, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \exp(is\sqrt{\nu_d(W_n)} \widehat{\lambda}_{W_n}) \right) \\ &= \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{W_n} (e^{is/\sqrt{\nu_d(W_n)}} - 1) \lambda^{(1)}(x-y) dx dy \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda_0}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{W_n} (e^{is/\sqrt{\nu_d(W_n)}} - 1) \lambda^{(1)}(x-y) dx\right)^2 dy + o(1)\right). \end{aligned}$$

- Durch Taylor–Reihenentwicklung der beiden inneren Exponentialfunktionen ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \exp \left( i s \sqrt{\nu_d(W_n)} \widehat{\lambda}_{W_n} \right) \right) \\ &= \exp \left( i s \sqrt{\nu_d(W_n)} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \right. \\ & \quad \left. - \frac{s^2}{2} \lambda_0 \left( \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx + \left( \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \right)^2 \right) + o(1) \right). \end{aligned}$$

- Hieraus und aus (47) folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \exp \left( i s \sqrt{\nu_d(W_n)} (\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda) \right) \right) = \exp \left( - \frac{s^2}{2} \lambda_0 \left( \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx + \left( \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \right)^2 \right) \right).$$

- Wegen (58) ist dies gleichbedeutend mit (60).  $\square$

## 2. Modulierte Poisson–Prozesse

- Sei nun  $\{N_B\}$  ein modulierter Poisson–Prozess, dessen Intensitätsfeld  $\{\lambda_x\}$  durch (52) gegeben ist.
- Dann ist klar, dass

$$\widehat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_d(W)} \quad (63)$$

für jedes  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$  ein erwartungstreuer Schätzer für die Intensität  $\lambda$  von  $\{N_B\}$  ist.

- Außerdem gilt die folgende Darstellungsformel für die Varianz von  $\widehat{\lambda}_W$ , die sich auf ähnliche Weise herleiten lässt, wie die Varianzformel (55) für Neyman–Scott–Prozesse in Lemma 3.1.

**Lemma 3.2** *Sei  $\{N_B\}$  ein modulierter Poisson–Prozess. Dann gilt für jede Borel–Menge  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$*

$$\text{Var } \widehat{\lambda}_W = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbb{E} \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \text{Var } \nu_d(W \cap \Xi)}{\nu_d^2(W)}. \quad (64)$$

### Beweis

- Mit der Kurzschreibweise  $P(d\xi) = P(\Xi = d\xi)$  ergibt sich ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.1, dass

$$\begin{aligned} \text{Var } N_W &= \int_{\mathcal{F}} \left( \lambda_1 \nu_d(W \cap \xi) + \lambda_2 \nu_d(W \cap \xi^c) + (\lambda_1 \nu_d(W \cap \xi) + \lambda_2 \nu_d(W \cap \xi^c))^2 \right) P(d\xi) \\ & \quad - \left( \int_{\mathcal{F}} (\lambda_1 \nu_d(W \cap \xi) + \lambda_2 \nu_d(W \cap \xi^c)) P(d\xi) \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \left( \lambda_1 \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W \cap \Xi^c) \right) + \text{Var} \left( \lambda_1 \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W \cap \Xi^c) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( (\lambda_1 - \lambda_2) \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W) \right) + \text{Var} \left( (\lambda_1 - \lambda_2) \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W) \right) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbb{E} \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \text{Var } \nu_d(W \cap \Xi). \end{aligned}$$

- Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \text{Var } \widehat{\lambda}_W &= \text{Var } \frac{N_W}{\nu_d(W)} \\ &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbb{E} \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \text{Var } \nu_d(W \cap \Xi)}{\nu_d^2(W)}. \quad \square \end{aligned}$$

### Beachte

- Für das in (51) eingeführte Keim–Korn–Modell  $\Xi$  ergibt sich aus der Stationarität des zugrunde liegenden Poisson–Prozesses  $\{S_n\}$ , dass

$$P(o \in \Xi) = P(x \in \Xi) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (65)$$

und

$$\mathbb{E} \nu_d(B \cap \Xi) = \mathbb{E} \nu_d((B + x) \cap \Xi) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (66)$$

- Man kann sich leicht überlegen, dass der *Volumenanteil*  $\mathbb{E} \nu_d([0, 1]^d \cap \Xi)$  mit der sogenannten „Einpunkt–Überdeckungswahrscheinlichkeit“  $p_o = P(o \in \Xi)$  von  $\Xi$  übereinstimmt.
- Außerdem sind die folgenden Eigenschaften des Keim–Korn–Modells  $\Xi$  nützlich.

### Lemma 3.3

1. Es gilt

$$\mathbb{E} \nu_d([0, 1]^d \cap \Xi) = P(o \in \Xi) = 1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d). \quad (67)$$

2. Für jedes  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$  ist durch

$$\widehat{p}_W = \frac{\nu_d(W \cap \Xi)}{\nu_d(W)} \quad (68)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für  $p_o = P(o \in \Xi)$  gegeben.

3. Sei  $W_1, W_2, \dots$  eine Folge von Beobachtungsfenstern  $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_d(W_n)} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (69)$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var } \widehat{p}_{W_n} = \int_{\mathbb{R}^d} (p_{o,x} - p_o^2) dx, \quad (70)$$

wobei  $p_{o,x} = P(\{o, x\} \subset \Xi)$ .

### Beweis

- Aus (65) und aus dem Satz von Fubini über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \nu_d([0, 1]^d \cap \Xi) &= \mathbb{E} \int_{[0, 1]^d} \mathbb{1}_\Xi(x) dx \stackrel{\text{Satz von Fubini}}{=} \int_{[0, 1]^d} \mathbb{E} \mathbb{1}_\Xi(x) dx \\ &= \int_{[0, 1]^d} P(x \in \Xi) dx \stackrel{(65)}{=} \int_{[0, 1]^d} P(o \in \Xi) dx = P(o \in \Xi). \end{aligned}$$

- Außerdem ergibt sich so wie im Beweis von Theorem 3.11, dass

$$P(o \in \Xi) = P(\#\{n : |S_n| \leq r\} > 0) = 1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d).$$

- Damit ist (67) bewiesen.
- Aus der Invarianzeigenschaft (66) ergibt sich mit Hilfe des Lemmas von Haar, dass

$$\mathbb{E} \nu_d(W \cap \Xi) = \nu_d(W) \mathbb{E} \nu_d([0, 1]^d \cap \Xi) \quad \forall W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$$

und somit

$$\mathbb{E} \widehat{p}_W = \frac{\mathbb{E} \nu_d(W \cap \Xi)}{\nu_d(W)} = \mathbb{E} \nu_d([0, 1]^d \cap \Xi) \stackrel{(67)}{=} p_o.$$

- Um die Gültigkeit von (70) zu zeigen, überlegen wir uns zunächst, dass für jedes  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \nu_d^2(W) \text{Var} \widehat{p}_W &= \mathbb{E} \left( (\nu_d(W \cap \Xi) - \nu_d(W) p_o)^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \int_W (\mathbb{1}_\Xi(u) - p_o) du \int_W (\mathbb{1}_\Xi(v) - p_o) dv \right) \\ &= \int_W \int_W \mathbb{E} \left( (\mathbb{1}_\Xi(u) - p_o)(\mathbb{1}_\Xi(v) - p_o) \right) du dv \\ &= \int_W \int_W \left( \mathbb{E} (\mathbb{1}_\Xi(u) \mathbb{1}_\Xi(v)) - p_o^2 \right) du dv \\ &= \int_W \int_W (p_{o, u-v} - p_o^2) du dv \\ &= \int_W \int_{W-v} (p_{o, x} - p_o^2) dx dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_W \mathbb{1}_{W-v}(x) dv (p_{o, x} - p_o^2) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \nu_d(W \cap (W - x)) (p_{o, x} - p_o^2) dx. \end{aligned}$$

- Hieraus und aus (69) ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var} \widehat{p}_{W_n} = \int_{\mathbb{R}^d} (p_{o, x} - p_o^2) dx,$$

weil

$$\frac{\nu_d(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_d(W_n)} (p_{o, x} - p_o^2) \leq p_o \mathbb{1}_{B(o, r)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

und weil somit die Funktion  $x \mapsto p_o \mathbb{1}_{B(o, r)}(x)$  eine integrierbare Majorante ist.

- Damit ist (70) bewiesen. □

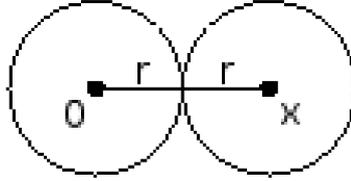


Abbildung 14: Bestimmung der Zweipunkt-Überdeckungswahrscheinlichkeit  $p_{o,x}$  für  $|x| \geq 2r$

#### Beachte

- Die „Zweipunkt-Überdeckungswahrscheinlichkeit“  $p_{o,x} = P(\{o, x\} \in \Xi)$  in (70) ist gegeben durch

$$p_{o,x} = \begin{cases} 2p_o - 1 + (1 - p_o)^2 \exp(\lambda_0 \nu_d(B(o, r) \cap B(x, r))) & \text{für } |x| < 2r, \\ p_o^2 & \text{für } |x| \geq 2r, \end{cases} \quad (71)$$

denn es gilt (vgl auch die Abbildungen 14 und 15)

$$\begin{aligned}
p_{o,x} &= P(\{o, x\} \subset \Xi) = 1 - P(\{o \notin \Xi\} \cup \{x \notin \Xi\}) \\
&= 1 - P(o \notin \Xi) - P(x \notin \Xi) + P(\{o, x\} \cap \Xi = \emptyset) \\
&= 1 - 2P(o \notin \Xi) + P(\#\{n : S_n \in B(o, r) \cup B(x, r)\} = 0) \\
&= 1 - 2P(o \notin \Xi) + \left(1 - \exp(-\lambda_0 \nu_d(B(o, r) \cup B(x, r)))\right) \\
&= 1 - 2P(o \notin \Xi) + \left(1 - \exp(-\lambda_0 \nu_d(B(o, r) \cup B(x, r)))\right) \\
&= 2p_o - 1 + (1 - p_o)^2 \exp(\lambda_0 \nu_d(B(o, r) \cap B(x, r))),
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichheit genutzt wurde, dass

$$P(o \notin \Xi) = 1 - p_o = \exp(-\lambda_0 \nu_d(B(0, r)))$$

und

$$\nu_d(B(o, r) \cup B(x, r)) = 2\nu_d(B(o, r)) - \nu_d(B(o, r) \cap B(x, r)).$$

- Wenn  $d = 2$ , dann ergibt sich für den Ausdruck  $\nu_d(B(o, r) \cap B(x, r))$  in (71), dass

$$\nu_d(B(o, r) \cap B(x, r)) = \begin{cases} 2r^2 \arccos \frac{|x|}{2r} - \frac{|x|}{2} \sqrt{4r^2 - |x|^2} & \text{für } |x| < 2r, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 2r. \end{cases}$$

- Für  $d = 3$  gilt

$$\nu_d(B(o, r) \cap B(x, r)) = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi r^3 \left(1 - \frac{3|x|}{4r} + \frac{|x|^3}{16r^3}\right) & \text{für } |x| < 2r, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 2r. \end{cases}$$

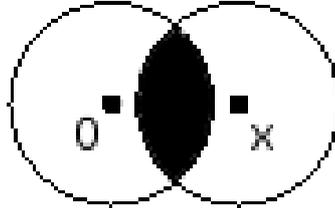


Abbildung 15: Darstellung der Schnittfläche  $B(o, r) \cap B(x, r)$

Mit Hilfe von Lemma 3.2 und 3.3 lässt sich nun ähnlich wie in Theorem 3.12 zeigen, dass der Intensitätsschätzer  $\hat{\lambda}_W$  die folgenden Eigenschaften hat.

### Theorem 3.13

1. Sei  $W_1, W_2, \dots$  eine Folge von Beobachtungsfenstern  $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann ist der erwartungstreue Schätzer  $\hat{\lambda}_{W_n}$  schwach konsistent, d.h., für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0. \quad (72)$$

2. Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_d(W_n)} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (73)$$

dann existiert der Grenzwert  $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var} \widehat{\lambda}_{W_n}$ , wobei

$$\sigma^2 = \lambda_1 p_o + \lambda_2 (1 - p_o) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \int_{\mathbb{R}^d} (p_{o,x} - p_o^2) dx \quad (74)$$

und die Überdeckungswahrscheinlichkeiten  $p_o = P(o \in \Xi)$  und  $p_{o,x} = P(\{o, x\} \in \Xi)$  in (67) bzw. (71) gegeben sind.

3. Außerdem ist dann der Schätzer  $\widehat{\lambda}_{W_n}$  asymptotisch normalverteilt, d.h., für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\sigma^2}} (\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda) \leq x\right) = \Phi(x). \quad (75)$$

### Beweis

- Weil  $\nu_d(W_n \cap \Xi) / \nu_d(W_n) \leq 1$  für jedes  $n \geq 1$ , ergibt sich aus Lemma 3.2, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \widehat{\lambda}_{W_n} = 0.$$

- Hieraus ergibt sich die Gültigkeit von (72) mit Hilfe der Tschebyschew–Ungleichung.
- Außerdem ergibt sich aus Lemma 3.2, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var} \widehat{\lambda}_{W_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbb{E} \nu_d(W_n \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W_n) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \text{Var} \nu_d(W_n \cap \Xi)}{\nu_d(W_n)} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbb{E} \nu_d([0, 1]^d \cap \Xi) + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var} \nu_d(W_n \cap \Xi)}{\nu_d(W_n)}. \end{aligned}$$

- Hieraus und aus Lemma 3.3 ergibt sich die Gültigkeit von (74).
- Um (75) zu zeigen, kann man ähnlich wie im Beweis von Theorem 3.12 vorgehen, und zwar ergibt sich die Gültigkeit von (75)
  - mit Hilfe des Stetigkeitssatzes für charakteristische Funktionen reellwertiger Zufallsvariablen (vgl. Theorem WR–5.7)
  - und unter Verwendung der Darstellungsformel (29) des erzeugenden Funktionals von Cox–Prozessen
  - bzw. der Taylor–Reihenentwicklung der Exponentialfunktion.  $\square$

## 3.3 Cluster–Prozesse

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Modellansatz von „geclusterten“ Punktprozessen, den wir in Abschnitt 3.2.3 zunächst nur für den Spezialfall der Neyman–Scott–Prozesse bzw. der Matérn–Cluster–Prozesse betrachtet hatten.

### 3.3.1 Definition und erzeugendes Funktional

- Sei  $\{S_n\}$  ein beliebiger Punktprozess mit dem Intensitätsmaß  $\{\mu^{(0)}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ , das lokal endlich und diffus sei, und sei  $Z = \#\{n : S_n \in \mathbb{R}^d\}$  die (zufällige) Anzahl der Atome von  $\{S_n\}$  in  $\mathbb{R}^d$ .

- Außerdem sei  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Punktprozessen, die von  $\{S_n\}$  unabhängig sind und deren Intensitätsmaß  $\{\mu^{(1)}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  endlich ist, d.h.,  $\mu^{(1)}(\mathbb{R}^d) < \infty$ .

**Theorem 3.14** *Das zufällige Zählmaß  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  sei gegeben durch*

$$N_B = \sum_{n=1}^Z N_{B-S_n}^{(n)} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (76)$$

1. Wenn

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B-x) \mu^{(0)}(dx) < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d), \quad (77)$$

dann ist  $\{N_B\}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 lokal endlich, wobei das Intensitätsmaß  $\{\mu(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  von  $\{N_B\}$  gegeben ist durch

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B-x) \mu^{(0)}(dx) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (78)$$

2. Wenn der Punktprozess  $\{S_n\}$  stationär ist mit der Intensität  $\lambda_0$ , dann ist auch  $\{N_B\}$  stationär, und die Intensität  $\lambda = \mathbb{E} N_{[0,1]^d}$  von  $\{N_B\}$  ist gegeben durch

$$\lambda = \lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d). \quad (79)$$

### Beweis

- Aus der Definitionsgleichung (76) von  $\{N_B\}$  ergibt sich, dass für jedes  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathbb{E} N_B = \mathbb{E} \left( \sum_{j=1}^Z N_{B-S_j}^{(j)} \right) = \int \mathbb{E} \left( \sum_{j=1}^{Z(\{s_n\})} N_{B-s_j}^{(j)} \right) P(d\{s_n\}) = \int \sum_{j=1}^{Z(\{s_n\})} \mathbb{E} N_{B-s_j}^{(j)} P(d\{s_n\}).$$

– Mit Hilfe des Campbellschen Theorems (vgl. Theorem 3.1) ergibt sich also, dass

$$\mathbb{E} N_B = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} N_{B-x}^{(1)} \mu^{(0)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B-x) \mu^{(0)}(dx) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

– Damit ist (78) bewiesen.

- Aus (77) folgt nun, dass  $\mathbb{E} N_B < \infty$  und somit auch  $P(N_B < \infty) = 1$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .
- Sei  $\{S_n\}$  stationär. Dann ergibt sich aus der Definitionsgleichung (76) von  $\{N_B\}$ , dass

$$\begin{aligned} (N_{B_1}, \dots, N_{B_n}) &= \left( \sum_{i=1}^Z N_{B_1-S_i}^{(i)}, \dots, \sum_{i=1}^Z N_{B_n-S_i}^{(i)} \right) \\ &\stackrel{D}{=} \left( \sum_{i=1}^Z N_{B_1-(S_i-x)}^{(i)}, \dots, \sum_{i=1}^Z N_{B_n-(S_i-x)}^{(i)} \right) \\ &= (N_{B_1+x}, \dots, N_{B_n+x}) \end{aligned}$$

für beliebige  $n \geq 1$ ,  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ , d.h.,  $\{N_B\}$  ist stationär.

- Die Formel (79) für die Intensität  $\lambda$  von  $\{N_B\}$  ergibt sich unmittelbar aus (78), denn es gilt

$$\lambda = \mu([0,1]^d) \stackrel{(78)}{=} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}([0,1]^d - x) dx = \lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d). \quad \square$$

**Beachte**

- Wenn die Integrierbarkeitsbedingung (77) erfüllt ist, dann sagt man, dass das in (76) definierte zufällige Zählmaß  $\{N_B\}$  ein *Cluster-Prozess* ist.
- Der Punktprozess  $\{S_n\}$  heißt *Primärprozess*; die Punktprozesse  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  werden *Sekundärprozesse* genannt.
- Wenn  $\{S_n\}$  ein Poisson-Prozess ist, dann sagt man, dass  $\{N_B\}$  ein *Poissonscher Cluster-Prozess* ist.

Das erzeugende Funktional eines Cluster-Prozesses lässt sich durch die erzeugenden Funktionale der Primär- und Sekundärprozesse ausdrücken. Dabei setzen wir stets voraus, dass die Integrierbarkeitsbedingung (77) erfüllt ist.

**Theorem 3.15** Für das erzeugende Funktional  $\mathbf{G} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$  des Cluster-Prozesses  $\{N_B\}$  gilt

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \left( \prod_{n=1}^Z \mathbf{G}^{[S_n]}(f) \right) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (80)$$

wobei  $\mathbf{G}^{[x]} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$  das erzeugende Funktional des (um den Vektor  $x \in \mathbb{R}^d$  verschobenen Sekundär-) Punktprozesses  $\{N_{B-x}^{(1)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ist.

**Beweis**

- Sei  $\{S'_n\}$  eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N_B\}$ , und sei  $Z' = \#\{n : S'_n \in \mathbb{R}^d\}$  die Gesamtanzahl der Punkte des Cluster-Prozesses  $\{N_B\}$ .
- Dann ergibt sich aus den Definitionsgleichungen (6) und (76) des erzeugenden Funktionals bzw. des Cluster-Prozesses  $\{N_B\}$ , dass

$$\mathbf{G}(f) \stackrel{(6)}{=} \mathbb{E} \left( \prod_{n=1}^{Z'} f(S'_n) \right) \stackrel{(76)}{=} \mathbb{E} \left( \prod_{j=1}^Z \prod_{i=1}^{Z^{(j)}} f(S_i^{(j)} - S_j) \right) \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

wobei  $\{S_i^{(j)}, i \geq 1\}$  eine messbare Indizierung der Atome des Sekundärprozesses  $\{N_B^{(j)}\}$  und  $Z^{(j)} = \#\{i : S_i^{(j)} \in \mathbb{R}^d\}$  die Gesamtanzahl der Punkte von  $\{N_B^{(j)}\}$  ist.

- Wegen der Unabhängigkeit der Punktprozesse  $\{S_n\}, \{S_i^{(1)}\}, \{S_i^{(2)}\}, \dots$  ergibt sich hieraus, dass

$$\mathbf{G}(f) = \int \mathbb{E} \left( \prod_{j=1}^{Z(\{s_n\})} \prod_{i=1}^{Z^{(j)}} f(S_i^{(j)} - s_j) \right) P(d\{s_n\}) = \int \prod_{j=1}^{Z(\{s_n\})} \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^{Z^{(j)}} f(S_i^{(j)} - s_j) \right) P(d\{s_n\}).$$

- Somit gilt

$$\mathbf{G}(f) = \int \prod_{j=1}^{Z(\{s_n\})} \mathbf{G}^{[s_j]}(f) P(d\{s_n\}) = \mathbb{E} \left( \prod_{j=1}^Z \mathbf{G}^{[S_j]}(f) \right),$$

wobei

$$\mathbf{G}^{[x]}(f) = \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^{Z^{(1)}} f(S_i^{(1)} - x) \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad \square$$

**Beachte**

- Das Produkt in (80) kann aus unendlich vielen Faktoren bestehen; insbesondere dann, wenn der Primärprozess  $\{S_n\}$  stationär ist.

- Das Produkt in (80) ist dennoch stets wohldefiniert, weil die Werte sämtlicher Faktoren zwischen 0 und 1 liegen.

**Korollar 3.3** Wenn der Primärprozess  $\{S_n\}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\{\mu^{(0)}(B)\}$  ist, dann gilt für das erzeugende Funktional  $\mathbf{G} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$  des Poissonschen Cluster-Prozesses  $\{N_B\}$ , dass

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{G}^{[x]}(f) - 1) \mu^{(0)}(dx)\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (81)$$

**Beweis**

- Aus der Darstellungsformel (80) für das erzeugende Funktional des Cluster-Prozesses  $\{N_B\}$ , die in Theorem 3.15 hergeleitet wurde, ergibt sich, dass

$$\mathbf{G}(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{G}_0(f'_r) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (82)$$

wobei  $\mathbf{G}_0 : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$  das erzeugende Funktional des Poissonschen Primärprozesses  $\{S_n\}$  ist und die Funktion  $f'_r \in \mathcal{H}$  gegeben ist durch

$$f'_r(x) = \begin{cases} \mathbf{G}^{[x]}(f) & \text{für } |x| \leq r, \\ 1 & \text{für } |x| > r. \end{cases}$$

– Denn es gilt für jedes  $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(f) &\stackrel{(80)}{=} \mathbb{E}\left(\prod_{n=1}^Z \mathbf{G}^{[S_n]}(f)\right) = \mathbb{E}\left(\lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{n: S_n \in B(o,r)} \mathbf{G}^{[S_n]}(f)\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\prod_{n: S_n \in B(o,r)} \mathbf{G}^{[S_n]}(f)\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\prod_{n=1}^Z f'_r(S_n)\right) \\ &\stackrel{(6)}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{G}_0(f'_r), \end{aligned}$$

- wobei sich die letzte Gleichheit aus der Definitionsgleichung (6) des erzeugenden Funktionals von Punktprozessen ergibt
- und die Vertauschbarkeit von Erwartungswert und Grenzwertbildung in der dritten Gleichheit mit dem Satz über die monotone Konvergenz begründet werden kann.
- Mit Hilfe der Darstellungsformel (9) für das erzeugende Funktional des Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$ , die in Theorem 3.3 hergeleitet wurde, ergibt sich nun aus (82), dass für jedes  $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(f) &\stackrel{(82)}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{G}_0(f'_r) \\ &\stackrel{(9)}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f'_r(x) - 1) \mu^{(0)}(dx)\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \exp\left(\int_{B(o,r)} (\mathbf{G}^{[x]}(f) - 1) \mu^{(0)}(dx)\right) \\ &= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{G}^{[x]}(f) - 1) \mu^{(0)}(dx)\right). \end{aligned} \quad \square$$

### 3.3.2 Poissonsche Cluster-Prozesse; Eigenschaften des Intensitätsschätzers

Wir diskutieren nun zwei asymptotische Eigenschaften des Intensitätsschätzers  $\hat{\lambda}_W = N_W/\nu_d(W)$  für stationäre Poissonsche Cluster-Prozesse und verallgemeinern dabei die Ergebnisse, die in Abschnitt 3.2.4 für Neyman-Scott-Prozesse hergeleitet worden sind.

- Sei  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda_0$ . Dann ergibt sich aus Theorem 3.14,
  - dass der Poissonsche Cluster-Prozess  $\{N_B\}$  stationär ist und
  - dass

$$\hat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_d(W)} \quad (83)$$

für jedes  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$  ein erwartungstreuer Schätzer für die Intensität  $\lambda$  von  $\{N_B\}$  ist.

- Außerdem gilt die folgende Darstellungsformel für die Varianz von  $\hat{\lambda}_W$ .

**Lemma 3.4** Sei  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  eine beliebige Borel-Menge mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$ . Wenn

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W-x}^{(1)})^2 dx < \infty, \quad (84)$$

dann gilt

$$\text{Var } \hat{\lambda}_W = \frac{\lambda_0}{\nu_d^2(W)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W-x}^{(1)})^2 dx. \quad (85)$$

#### Beweis

- Um die Gültigkeit von (85) zu zeigen, gehen wir ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.1 vor.
- Mit der Kurzschreibweise  $P(d\{s_n\}) = P(\{S_n\} = d\{s_n\})$  ergibt sich aus der Definitionsgleichung (76) von  $N_W$ , dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (N_W)^2 &= \int \mathbb{E} \left( \sum_{j=1}^{\infty} N_{W-s_j}^{(j)} \right)^2 P(d\{s_n\}) \\ &= \int \mathbb{E} \left( \sum_{j=1}^{\infty} (N_{W-s_j}^{(j)} - \mathbb{E} N_{W-s_j}^{(j)} + \mathbb{E} N_{W-s_j}^{(j)}) \right)^2 P(d\{s_n\}) \\ &= \int \left( \left( \sum_{j=1}^{\infty} \text{Var } N_{W-s_j}^{(j)} \right) + \left( \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} N_{W-s_j}^{(j)} \right)^2 \right) P(d\{s_n\}). \end{aligned}$$

- Hieraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (N_W)^2 &= \int \left( \left( \sum_{j=1}^{\infty} \text{Var } N_{W-s_j}^{(j)} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \mathbb{E} N_{W-s_j}^{(j)} \right)^2 \right) P(d\{s_n\}) \\ &\quad + \int \sum_{i \neq j} \left( \mathbb{E} N_{W-s_i}^{(i)} \right) \left( \mathbb{E} N_{W-s_j}^{(j)} \right) P(d\{s_n\}) \\ &\stackrel{(5)}{=} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \text{Var } N_{W-x}^{(1)} dx + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left( \mathbb{E} N_{W-x}^{(1)} \right)^2 dx + \left( \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} N_{W-x}^{(1)} dx \right)^2, \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus dem Campbellschen Theorem (vgl. Theorem 3.1) ergibt.

- Somit ergibt sich, dass

$$\text{Var } N_W = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W-x}^{(1)})^2 dx. \quad \square$$

Mit Hilfe von Lemma 3.4 ergeben sich die folgenden asymptotischen Eigenschaften des Schätzers  $\widehat{\lambda}_W$ .

### Theorem 3.16

1. Sei  $W_1, W_2, \dots$  eine Folge von Beobachtungsfenstern  $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wenn es Konstanten  $c < \infty$  und  $\delta \in (0, 1)$  gibt, so dass

$$\nu_d^{\delta-2}(W_n) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W_n-x}^{(1)})^2 dx \leq c \quad \forall n \geq 1, \quad (86)$$

dann ist der erwartungstreue Schätzer  $\widehat{\lambda}_{W_n}$  schwach konsistent, d.h., für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0. \quad (87)$$

2. Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass der Grenzwert

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var } \widehat{\lambda}_{W_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W_n-x}^{(1)})^2 dx}{\nu_d(W_n)} \quad (88)$$

existiert, wobei  $0 < \sigma^2 < \infty$ , und wenn die Lindeberg-Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left( (N_{W_n-x}^{(1)})^2 \mathbb{1}_{(\varepsilon\sqrt{\nu_d(W_n)}, \infty)}(N_{W_n-x}^{(1)}) \right) dx = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (89)$$

erfüllt ist, dann ist der Schätzer  $\widehat{\lambda}_{W_n}$  asymptotisch normalverteilt, d.h.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\sigma^2}} (\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda) \leq x\right) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (90)$$

### Beweis

- Aus (85) und (86) folgt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var } \widehat{\lambda}_{W_n} = 0$ . Die stochastische Konvergenz in (87) ergibt sich somit auf die gleiche Weise wie im Beweis der Theoreme 3.12 bzw. 3.13.
- Um die Verteilungskonvergenz (90) zu beweisen, benutzen wir eine „Abschneidetechnik“ und betrachten zunächst die Zufallsvariablen

$$N_{W_n, \varepsilon} = \sum_{k=1}^{\infty} N_{W_n - S_{k, \varepsilon}}^{(n)}, \quad \text{wobei} \quad N_{W_n - S_{k, \varepsilon}}^{(n)} = N_{W_n - S_k}^{(n)} \mathbb{1}_{[0, \varepsilon\sqrt{\nu_d(W_n)}}(N_{W_n - S_k}^{(n)}).$$

- Dabei genügt es zu zeigen, dass es eine Nullfolge  $\varepsilon = \varepsilon(n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gibt, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp\left(i s \frac{N_{W_n, \varepsilon} - \mathbb{E} N_{W_n, \varepsilon}}{\sqrt{\text{Var } N_{W_n, \varepsilon}}}\right) \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) = 1 \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (91)$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \frac{N_{W_n} - \mathbb{E} N_{W_n} - (N_{W_n, \varepsilon} - \mathbb{E} N_{W_n, \varepsilon})}{\sqrt{\text{Var } N_{W_n}}} \right)^2 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } N_{W_n, \varepsilon}}{\text{Var } N_{W_n}} = 1. \quad (92)$$

– Denn (91) ist gleichbedeutend mit

$$\frac{N_{W_n, \varepsilon} - \mathbb{E} N_{W_n, \varepsilon}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

– und wegen (92) gilt dann auch

$$\frac{N_{W_n} - \mathbb{E} N_{W_n}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n}}} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

– Mit Hilfe von (85) und (88) ergibt sich hieraus die Gültigkeit von (90).

- Die Nullkonvergenz in (92) ergibt sich unmittelbar aus (88) und (89),  
– denn es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \frac{N_{W_n} - \mathbb{E} N_{W_n} - (N_{W_n, \varepsilon} - \mathbb{E} N_{W_n, \varepsilon})}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n}}} \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n)}{\text{Var} N_{W_n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left( (N_{W_n - x}^{(1)})^2 \mathbb{1}_{(\varepsilon \sqrt{\nu_d(W_n)}, \infty)}(N_{W_n - x}^{(1)}) \right) dx \\ &\stackrel{(88)}{=} \sigma^{-2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left( (N_{W_n - x}^{(1)})^2 \mathbb{1}_{(\varepsilon \sqrt{\nu_d(W_n)}, \infty)}(N_{W_n - x}^{(1)}) \right) dx \stackrel{(89)}{=} 0. \end{aligned}$$

– Hieraus folgt außerdem, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}{\text{Var} N_{W_n}} - 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon} - \text{Var} N_{W_n}}{\text{Var} N_{W_n}} = 0.$$

- Um die Gültigkeit von (91) zu zeigen, kann man wie folgt vorgehen.  
– Mit Hilfe von Korollar 3.3 ergibt sich so wie im Beweis von Theorem 3.12 (vgl. (61) und (62)),  
dass

$$\mathbb{E} \exp \left( i s \frac{N_{W_n, \varepsilon} - \mathbb{E} N_{W_n, \varepsilon}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} \right) = \exp \left( \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left( \exp \frac{i s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} - 1 - \frac{i s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} \right) dx \right).$$

– Wenn wir dabei die in Lemma 3.4 hergeleitete Varianzformel (85) berücksichtigen, dann erhalten wir insgesamt, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp \left( i s \frac{N_{W_n, \varepsilon} - \mathbb{E} N_{W_n, \varepsilon}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} \right) \exp \left( \frac{s^2}{2} \right) \\ &= \exp \left( \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left( \exp \frac{i s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} - 1 - \frac{i s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} + \frac{1}{2} \left( \frac{s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} \right)^2 \right) dx \right). \end{aligned}$$

– Aus der Ungleichung

$$\left| \exp(ix) - 1 - ix + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{|x|^3}{6} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ergibt sich nun die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left( \exp \frac{i s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} - 1 - \frac{i s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} + \frac{1}{2} \left( \frac{s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} \right)^2 \right) dx \right| \\ &\leq \frac{\lambda_0 |s|^3 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)})^3 dx}{6 (\text{Var} N_{W_n, \varepsilon})^{3/2}} \leq \frac{\lambda_0 |s|^3 \varepsilon \sqrt{\nu_d(W_n)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)})^2 dx}{6 (\text{Var} N_{W_n, \varepsilon})^{3/2}} \\ &= \frac{|s|^3 \varepsilon}{6} \sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}}. \end{aligned}$$

- Damit ist (91) bewiesen, weil die Nullfolge  $\varepsilon = \varepsilon(n)$  so gewählt werden kann, dass der letzte Ausdruck beliebig klein wird.  $\square$

### 3.3.3 Beispiele: Gauß–Poisson–Prozesse, Neyman–Scott–Prozesse

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei Klassen von Poissonschen Cluster–Prozessen, deren Sekundärprozesse  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  jeweils eine spezielle Struktur besitzen. Der Primärprozess  $\{S_n\}$  sei in beiden Fällen ein homogener Poisson–Prozess mit der Intensität  $\lambda_0$ .

#### 1. Gauß–Poisson–Prozesse

- Sei  $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren, die den Wert „Unendlich“ annehmen können und die von dem Poissonschen Primärprozess  $\{S_n\}$  unabhängig sind. Dabei gelte  $P(S^{(1)} = o) = 0$ .
- Die Sekundärprozesse  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  seien gegeben durch

$$N_B^{(n)} = \delta_o(B) + \delta_{S^{(n)}}(B) \quad \forall n \geq 1, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (93)$$

- Der Poissonsche Cluster–Prozess  $\{N_B\}$  mit  $N_B = \sum_{n=1}^{\infty} N_{B-S_n}^{(n)}$  wird dann *Gauß–Poisson–Prozess* genannt.

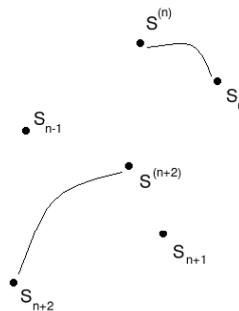


Abbildung 16: Gauss-Poisson–Prozess

#### Beachte

- Aus (93) ergibt sich, dass jeder Primärpunkt  $S_n$  auch ein Punkt des Cluster–Prozesses  $\{N_B\}$  ist und dass  $S_n$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p = P(S^{(1)} \in \mathbb{R}^d)$  einen weiteren Sekundärpunkt an der Stelle  $S_n + S^{(n)}$  erzeugt, vgl. Abbildung 16.
- Aus Korollar 3.3 folgt, dass das erzeugende Funktional  $\mathbf{G} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$  eines Gauß–Poisson–Prozesses gegeben ist durch

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left((1-p)f(x) + p \int_{\mathbb{R}^d} f(x)f(x+y) P_S(dy) - 1\right) dx\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (94)$$

wobei  $P_S : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, 1]$  mit  $P_S(B) = p^{-1}P(S^{(1)} \in B)$  die bedingte Verteilung der Abweichung des zweiten Sekundärpunktes vom auslösenden Primärpunkt ist (unter der Bedingung, dass es einen solchen zweiten Sekundärpunkt gibt).

2. Neyman–Scott–Prozesse

- Sei  $\{S_i^{(n)}, i, n \geq 1\}$  eine Doppel–Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren  $S_i^{(n)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , die von dem Poissonschen Primärprozess  $\{S_n\}$  unabhängig ist.
  - Außerdem sei  $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen (mit nichtnegativen ganzzahligen Werten), die von den Folgen  $\{S_i^{(n)}\}$  und  $\{S_n\}$  unabhängig ist.
  - Für die Gesamtanzahlen  $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots$  von Sekundärpunkten je Primärpunkt gelte  $\mathbb{E}T^{(i)} < \infty$ .
- Die Sekundärprozesse  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  seien gegeben durch

$$N_B^{(n)} = \sum_{i=1}^{T^{(n)}} \delta_{S_i^{(n)}}(B) \quad \forall n \geq 1, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (95)$$

- Der Poissonsche Cluster–Prozess  $\{N_B\}$  mit  $N_B = \sum_{n=1}^{\infty} N_{B-S_n}^{(n)}$  wird dann *Neyman–Scott–Prozess* genannt, vgl. Abbildung 17.

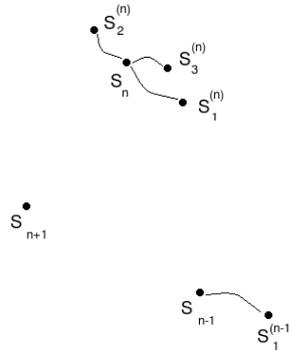


Abbildung 17: Neyman–Scott–Prozess

**Beachte**

- 1) Aus Korollar 3.3 folgt, dass das erzeugende Funktional  $\mathbf{G} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$  eines Neyman–Scott–Prozesses gegeben ist durch

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left(g\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) P_S(dy)\right) - 1\right) dx\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (96)$$

wobei  $P_S : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  die Verteilung von  $S_i^{(n)}$  ist und  $g : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$  die erzeugende Funktion der Gesamtanzahl von Sekundärpunkten ist, die von einem Primärpunkt generiert werden, d.h.,

$$g(z) = \mathbb{E}z^{T^{(1)}} \quad \forall z \in [-1, 1].$$

- 2) Wenn die Gesamtanzahl von Sekundärpunkten, die von einem Primärpunkt generiert werden, poissonverteilt ist mit dem Parameter  $\lambda_1$ , d.h., wenn  $g(z) = e^{\lambda_1(z-1)}$  für jedes  $z \in [-1, 1]$ , dann ergibt sich aus (96), dass

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\exp\left(\lambda_1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) P_S(dy) - 1\right)\right) - 1\right) dx\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (97)$$

- 3) Wenn außerdem vorausgesetzt wird, dass die Verteilung  $P_S$  des Vektors zwischen Sekundärpunkt und zugehörigem Primärpunkt absolutstetig ist, dann lässt sich (97) wie folgt umformen.

- Mit Hilfe der Darstellungsformel (9) für das erzeugende Funktional des Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$ , die in Theorem 3.3 hergeleitet wurde, ergibt sich aus (97), dass

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(f) &= \mathbb{E} \left( \prod_{n=1}^{\infty} \exp \left( \lambda_1 \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(S_n + y) P_S(dy) - 1 \right) \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left( \exp \left( \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(S_n + y) P_S(dy) - 1 \right) \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left( \exp \left( \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (f(S_n + y) - 1) P_S(dy) \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left( \exp \left( \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - 1) P_S(dx - S_n) \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left( \exp \left( - \int_{\mathbb{R}^d} (1 - f(x)) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(1)}(x - S_n) dx \right) \right),
\end{aligned}$$

wobei  $\lambda^{(1)}(x) = \lambda_1 p_S(x)$  und  $p_S : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  die Dichte von  $P_S$  ist.

- Der letzte Ausdruck stimmt mit den Formeln (48) und (49) überein, d.h., in diesem Fall kann der Neyman-Scott-Prozess  $\{N_B\}$  nicht nur als Poissonscher Cluster-Prozess, sondern gleichzeitig auch als Cox-Prozess aufgefasst werden.

### 3.4 Ergodizität; starke Konsistenz des Intensitätsschätzers

Für stationäre Cox- bzw. Cluster-Prozesse wurden in den Abschnitten 3.2 und 3.3 hinreichende Bedingungen für die schwache Konsistenz des Intensitätsschätzers  $\hat{\lambda}_W$  diskutiert.

Wir geben nun einen Ergodensatz für allgemeine dynamische Systeme an und zeigen dann, wie dieser Ergodensatz zum Nachweis der starken Konsistenz von  $\hat{\lambda}_W$  genutzt werden kann.

#### 3.4.1 Dynamische Systeme; individueller Ergodensatz

Zunächst zeigen wir, dass stationäre Punktprozesse bzw. stationäre zufällige Maße als dynamische Systeme aufgefasst werden können.

- Zur Erinnerung: Mit  $\mathbb{N}$  wird die Familie aller lokal endlichen Zählmaße  $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$  bezeichnet, d.h., es gilt  $\varphi(B) < \infty$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  und  $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)$  für paarweise disjunkte  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
- Außerdem betrachten wir
  - die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , wobei  $\mathcal{N}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\mathbb{N}$  ist, so dass  $\varphi \mapsto \varphi(B)$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  eine  $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Abbildung ist,
  - und die Familie  $\{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  von  $(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ -messbaren *Verschiebungsoperatoren*  $\mathbf{T}_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , so dass

$$(\mathbf{T}_x \varphi)(B) = \varphi(B + x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (98)$$

d.h., jedem Zählmaß  $\varphi = \sum_n a_n \delta_{s_n}$  aus  $\mathbb{N}$  wird das Zählmaß  $\mathbf{T}_x \varphi = \sum_n a_n \delta_{s_n - x}$  zugeordnet, wobei sämtliche Atome von  $\varphi$  um den Vektor  $-x$  verschoben werden.

- Die „Gewichte“  $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  der Atome  $s_n$  bleiben dabei unverändert.

- Man kann sich leicht überlegen, dass der Punktprozess  $\{N_B\}$  genau dann stationär ist,
  - wenn seine Verteilung  $P_N$  invariant bezüglich  $\{\mathbf{T}_x\}$  ist, wobei  $P_N(A) = P(N \in A)$  für jedes  $A \in \mathcal{N}$ ,
  - d.h., die in Abschnitt 3.1 betrachtete Definitionsgleichung (16) für die Stationarität von Punktprozessen gilt genau dann, wenn

$$P_N(A) = P_N(\mathbf{T}_x A) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{N}, \quad (99)$$

wobei  $\mathbf{T}_x A = \{\mathbf{T}_x \varphi : \varphi \in A\}$ .

- Die Stationarität von beliebigen (nicht notwendig ganzzahligen) zufälligen Maßen  $\{\Lambda_B\}$  lässt sich auf die gleiche Weise charakterisieren.
  - Hierfür betrachten wir die Menge  $\mathbb{M}$  der lokal endlichen Maße  $\eta : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ , d.h., es gilt  $\eta(B) < \infty$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  und  $\eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(B_n)$  für paarweise disjunkte  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
  - Außerdem sei  $\mathcal{M}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\mathbb{M}$ , so dass  $\eta \mapsto \eta(B)$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  eine  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Abbildung ist.
  - Genauso wie in (98) definieren wir die Familie  $\{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  von  $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ -messbaren *Verschiebungsoperatoren*  $\mathbf{T}_x : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ , so dass

$$(\mathbf{T}_x \eta)(B) = \eta(B + x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (100)$$

- Man kann sich leicht überlegen, dass das zufällige Maß  $\{\Lambda_B\}$  genau dann stationär ist,
  - wenn seine Verteilung  $P_\Lambda$  invariant bezüglich  $\{\mathbf{T}_x\}$  ist, wobei  $P_\Lambda(A) = P(\Lambda \in A)$  für jedes  $A \in \mathcal{M}$ ,
  - d.h., die in Abschnitt 3.2 betrachtete Definitionsgleichung (31) für die Stationarität von zufälligen Maßen gilt genau dann, wenn

$$P_\Lambda(A) = P_\Lambda(\mathbf{T}_x A) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{M}. \quad (101)$$

wobei  $\mathbf{T}_x A = \{\mathbf{T}_x \eta : \eta \in A\}$  für beliebige  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $A \in \mathcal{M}$ .

### Beachte

- Wenn die Wahrscheinlichkeitsräume  $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N)$  bzw.  $(\mathbb{M}, \mathcal{M}, P_\Lambda)$  mit der in (98) bzw. (100) eingeführten Familie  $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  von (maßerhaltenden) Verschiebungsoperatoren ergänzt werden, für die (99) bzw. (101) gilt, dann sagt man, dass  $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N, \mathbf{T})$  und  $(\mathbb{M}, \mathcal{M}, P_\Lambda, \mathbf{T})$  *dynamische Systeme* sind.
- Die in (98) bzw. (100) eingeführten Familien  $\{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  von Verschiebungsoperatoren besitzen die Eigenschaft einer (algebraischen) *Gruppe*, denn offenbar gilt

$$\mathbf{T}_{x+x'} = \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{x'} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{-x} = \mathbf{I} \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^d.$$

- In Abschnitt 4 werden wir den Begriff des dynamischen Systems auch für den Fall eines beliebigen, nicht näher spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraumes  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  benötigen.
  - Dabei wird als Indexmenge  $G$  der Operatoren-Gruppe  $\{\mathbf{T}_x, x \in G\}$  nicht nur der (kontinuierliche)  $d$ -dimensionale euklidische Raum  $\mathbb{R}^d$  betrachtet, sondern beispielsweise auch die (diskrete) Menge  $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$  der ganzen Zahlen.
  - Im letzteren Fall wird anstelle des Lebesgue-Maßes über  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , das Zählmaß über  $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$  betrachtet.
  - Deshalb führen wir nun den Begriff des dynamischen Systems noch in einem allgemeineren Kontext ein, der beide Situationen als Spezialfälle erfasst.

### Definition

- Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum, und sei  $G$  eine beliebige Abelsche lokalkompakte Hausdorffsche Gruppe, die dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt.

- Die Verknüpfungsoperation in  $G$  bezeichnen wir weiterhin mit „+“. Außerdem sei  $\mathcal{B}(G)$  die  $\sigma$ -Algebra der Borel-Mengen in  $G$ , und sei  $\nu : \mathcal{B}(G) \rightarrow [0, \infty]$  das (bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte) *Haarsche Maß*, so dass

$$\nu(B) = \nu(B + x) \quad \forall x \in G, B \in \mathcal{B}(G).$$

- Sei  $\{\mathbf{T}_x, x \in G\}$  eine Familie von eineindeutigen  $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ -messbaren Abbildungen  $\mathbf{T}_x : \Omega \rightarrow \Omega$ . Man sagt, dass  $\{\mathbf{T}_x\}$  eine *Strömung* (bzw. ein *Flow*) in  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ist, wenn

$$P(A) = P(\mathbf{T}_x A) \quad \forall x \in G, A \in \mathcal{A},$$

$$\mathbf{T}_{x+x'} = \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{x'} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{-x} = \mathbf{I} \quad \forall x, x' \in G,$$

$$\{(x, \omega) : \mathbf{T}_x \omega \in A\} \in \mathcal{B}(G) \otimes \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

- Wenn  $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_x\}$  eine Strömung in  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ist, dann sagt man, dass das Quadrupel  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  ein *dynamisches System* ist.

Die Frage nach der starken Konstistenz des Intensitätsschätzer  $\hat{\lambda}_W$ , die wir am Anfang von Abschnitt 3.4 erwähnt hatten, hängt eng mit den beiden folgenden Fragestellungen zusammen.

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  ein beliebiges dynamisches System, und sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Zufallsvariable, so dass  $\mathbb{E}|X| < \infty$ . Außerdem sei  $W_1, W_2, \dots \in \mathcal{B}(G)$  eine Folge von Borelschen Teilmengen der Index-Menge  $G$  mit  $0 < \nu(W_n) < \infty$  für jedes  $n \geq 1$ .

- 1) Unter welchen Bedingungen existiert der Grenzwert

$$\bar{X}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} X(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) \quad (102)$$

für  $P$ -fast jedes  $\omega \in \Omega$ , wobei  $\nu : \mathcal{B}(G) \rightarrow [0, \infty]$  das Haarsche Maß ist.

- 2) Wann gilt für die in (102) gegebene Zufallsvariable  $\bar{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dass

$$\bar{X} = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{I}), \quad (103)$$

wobei  $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{I})$  die bedingte Erwartung von  $X$  bezüglich der  $\sigma$ -Algebra

$$\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{A} : A = \mathbf{T}_x A \quad \forall x \in G\}.$$

aller  $\mathbf{T}$ -invarianten Mengen aus  $\mathcal{A}$  ist.

Das folgende Resultat, dass in der Literatur *individueller Ergodensatz* genannt wird, gibt eine Antwort auf diese beiden Fragen.

**Theorem 3.17** Sei  $W_1, W_2, \dots \in \mathcal{B}(G)$  eine Folge von Borelschen Teilmengen der Index-Menge  $G$ , so dass

$$W_n \subset W_{n+1} \quad \text{und} \quad 0 < \nu(W_n) < \infty \quad \forall n \geq 1, \quad (104)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(W_n \cap (W_n - x))}{\nu(W_n)} = 1 \quad \forall x \in G \quad (105)$$

und

$$\sup_{n \geq 1} \frac{\nu(W_n - W_n)}{\nu(W_n)} < \infty, \quad (106)$$

wobei  $W_n - W_n = \{x - y : x, y \in W_n\}$ . Dann existiert der Grenzwert in (102) für  $P$ -fast jedes  $\omega \in \Omega$ , und es gilt (103).

Einen Beweis von Theorem 3.17 findet man beispielsweise in dem Buch von A.A. Tempelman (1992), *Ergodic Theorems for Group Actions: Informational and Thermodynamical Aspects*, Kluwer, Dordrecht.

**Beachte** Von besonderer Bedeutung ist der Fall, dass der Grenzwert  $\overline{X}(\omega)$  in (102) existiert und  $P$ -fast sicher konstant ist. Dann ergibt sich aus (103), dass

$$\overline{X} = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{I}) = \mathbb{E}X, \quad (107)$$

d.h., das „Raummittel“  $\overline{X}$  stimmt mit dem „Scharmittel“  $\mathbb{E}X$  überein.

### Definitionen

- Eine Folge  $W_1, W_2, \dots \in \mathcal{B}(G)$  von Borelschen Teilmengen der Index-Menge  $G$ , die den Bedingungen (104) – (106) genügt, wird *mittelnde Folge* genannt.
- Man sagt, dass das dynamische System  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  *ergodisch* ist, wenn für jede integrierbare Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und für jede mittelnde Folge  $\{W_n\}$  gilt, dass die in (102) gegebene Zufallsvariable  $\overline{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 konstant ist.
- Ein stationärer Punktprozess  $\{N_B\}$  heißt *ergodisch*, wenn das dynamische System  $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N, \mathbf{T})$  ergodisch ist.

Aus Theorem 3.17 ergibt sich, dass der Intensitätsschätzer  $\widehat{\lambda}_W = N_W/\nu_d(W)$  die folgende (starke) Konsistenz-eigenschaft besitzt, wenn der Punktprozess  $\{N_B\}$  ergodisch ist. Beispiele ergodischer Punktprozesse werden wir später in Abschnitt 3.4.3 diskutieren.

**Theorem 3.18** Sei  $\{N_B\}$  ein ergodischer Punktprozess mit der Intensität  $\lambda$ . Dann gilt

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}_{[-n, n]^d} = \lambda\right) = 1. \quad (108)$$

### Beweis

- Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass der Punktprozess  $\{N_B\}$  über dem „kanonischen“ Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N)$  gegeben ist.
- Dann gilt für beliebige  $n \geq 1$  und  $\varphi \in \mathbb{N}$ , dass

$$\begin{aligned} N_{[-n, n]^d}(\varphi) &= \varphi([-n, n]^d) = \int_{[-n, n]^d} \varphi(dx) \\ &= \int_{[-n, n]^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[x-1, x]}(y) dy \varphi(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{[-n, n]^d} \mathbb{1}_{[x-1, x]}(y) \varphi(dx) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi([-n, n]^d \cap [y, y+1]) dy. \end{aligned}$$

- Hieraus ergibt sich, dass

$$\int_{[-n, n-1]^d} \varphi([y, y+1]) dy \leq N_{[-n, n]^d}(\varphi) \leq \int_{[-n-1, n]^d} \varphi([y, y+1]) dy$$

bzw.

$$\int_{[-n, n-1]^d} \mathbf{T}_y \varphi([0, 1]^d) dy \leq N_{[-n, n]^d}(\varphi) \leq \int_{[-n-1, n]^d} \mathbf{T}_y \varphi([0, 1]^d) dy.$$

- Weil  $\{W_n\}$  und  $\{W'_n\}$  mit  $W_n = [-n, n-1]^d$  bzw.  $W'_n = [-n-1, n]^d$  mittelnde Folgen sind und weil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d([-n, n-1]^d)}{\nu_d([-n, n]^d)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d([-n-1, n]^d)}{\nu_d([-n, n]^d)} = 1,$$

ergibt sich nun mit Hilfe von Theorem 3.17, dass der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}_{[-n, n]^d}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{[-n, n]^d}(\varphi)}{\nu_d([-n, n]^d)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d([-n, n]^d)} \int_{[-n, n]^d} \mathbf{T}_y \varphi([0, 1]^d) dy$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert und konstant ist.

- Somit ergibt sich mit Hilfe von (103) und (107), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}_{[-n, n]^d} = \int_{\mathbb{N}} \varphi([0, 1]^d) P_N(d\varphi) = \lambda. \quad \square$$

### Beachte

- Die Aussage von Theorem 3.18 gilt natürlich nicht nur für kubische Beobachtungsfenster der Form  $W_n = [-n, n]^d$ .
- Wenn  $\{N_B\}$  ergodisch ist mit der Intensität  $\lambda$ , dann lässt sich auf ähnliche Weise wie im Beweis von Theorem 3.18 zeigen, dass zum Beispiel auch

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}_{B(o, n)} = \lambda\right) = 1.$$

- Die Gültigkeit von Theorem 3.18 kann darüber hinaus für Folgen von Beobachtungsfenstern gezeigt werden, die nicht konvex sind und die oft bei geographischen Daten betrachtet werden.
  - Beispielsweise gilt Theorem 3.18 auch dann, wenn  $\{W_n\}$  durch die *Dilatation* einer polykonvexen Menge gebildet wird,
  - d.h., wenn

$$W_n = \left(\bigcup_{i=1}^j B_i\right) \oplus B(o, n) \quad \forall n \geq 1,$$

wobei die Mengen  $B_1, \dots, B_j \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  konvex sind mit  $o \in \text{int}B_{i_0}$  für ein  $i_0 \in \{1, \dots, j\}$  und die *Minkowski-Summe*  $A \oplus B$  gegeben ist durch  $A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ .

### 3.4.2 Ergodizitätskriterien

In der Literatur werden weitere (äquivalente) Definitionsmöglichkeiten für die Ergodizität von dynamischen Systemen betrachtet. Wir erwähnen hier zunächst zwei solcher Ergodizitätskriterien, ohne sie zu beweisen.

**Theorem 3.19** *Das dynamische System  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  ist genau dann ergodisch, wenn*

$$\max\{P(A), P(A^c)\} = 1 \quad \forall A \in \mathcal{I} \quad (109)$$

oder wenn jede Darstellung

$$P = pP' + (1-p)P'' \quad \text{mit } p \in [0, 1] \quad (110)$$

des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  als Mischung zweier  $\mathbf{T}$ -invarianter Wahrscheinlichkeitsmaße  $P', P''$  über  $\mathcal{A}$  trivial ist, d.h., wenn  $\max\{p, 1-p\} = 1$  oder  $P' = P''$ .

**Beachte**

- Die Bedingung (109) bedeutet, dass die  $\mathbf{T}$ -invarianten Teilmengen  $A \in \mathcal{I}$  eines ergodischen dynamischen Systems  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  nur die Wahrscheinlichkeiten 0 oder 1 besitzen können.
- Es ist klar, dass jede Linearkombination (110) von  $\mathbf{T}$ -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßen  $P', P''$  über  $\mathcal{A}$  erneut ein  $\mathbf{T}$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß ergibt. In diesem Sinne bildet die Familie aller  $\mathbf{T}$ -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße über  $\mathcal{A}$  einen *Simplex*.
- Die Bedingung (110) bedeutet, dass die ergodischen  $\mathbf{T}$ -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße über  $\mathcal{A}$  die *Eckpunkte* dieses Simplex bilden.

Mit Hilfe von Theorem 3.19 lässt sich auf einfache Weise noch ein drittes Ergodizitätskriterium herleiten.

**Theorem 3.20** *Das dynamische System  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  ist genau dann ergodisch, wenn es eine mittelnnde Folge  $\{W_n\}$  gibt, so dass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) = P(A) P(A') \quad \forall A, A' \in \mathcal{A}. \quad (111)$$

**Beweis**

- Wir nehmen zunächst an, dass das dynamische System  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  ergodisch ist, und zeigen, dass (111) für jede mittelnnde Folge  $\{W_n\}$  gilt.
- Aus der  $\mathbf{T}$ -Invarianz des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  ergibt sich, dass für beliebige  $A, A' \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) &= \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(\mathbf{T}_{-x} A \cap A') \nu(dx) \\ &= \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \int_{A'} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) P(d\omega) \nu(dx) = \int_{A'} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) P(d\omega) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) - P(A) P(A') \right| &= \left| \int_{A'} \left( \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) - P(A) \right) P(d\omega) \right| \\ &\leq \int_{A'} \left| \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) - P(A) \right| P(d\omega). \end{aligned}$$

- Um die Gültigkeit von (111) zu beweisen, ist zu zeigen, dass der letzte Ausdruck gegen 0 strebt für  $n \rightarrow \infty$ .
  - Dies ergibt sich aus dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, denn es gilt

$$\left| \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) - P(A) \right| \leq 1,$$

- und mit  $X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)$  ergibt sich aus (102) und (107), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) = \mathbb{E} \mathbb{1}_A = P(A).$$

- Wir nehmen nun umgekehrt an, dass (111) für eine mittelnnde Folge  $\{W_n\}$  gilt.

– Für  $A = A' \in \mathcal{I}$  gilt dann

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A) \nu(dx) = \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A) \nu(dx) \\ &= \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) \longrightarrow P(A) P(A'), \end{aligned}$$

d.h., es gilt  $P(A) = (P(A))^2$  bzw.  $\max\{P(A), P(A^c)\} = 1$ .

– Aus der Bedingung (109) in Theorem 3.19 ergibt sich somit, dass  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  ergodisch ist.  $\square$

### Beachte

- Bei Anwendungen von Theorem 3.20 kann es nützlich sein zu beachten, dass sich die Ergodizität von  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  bereits aus der Gültigkeit von (111) für alle  $A, A' \in \mathcal{R}$  ergibt, wobei  $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$  ein Halbring ist, der die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  erzeugt.
- Unter einem *Halbring*  $\mathcal{R}$  versteht man dabei ein nichtleeres Mengensystem, das die folgenden Eigenschaften besitzt:
  - Aus  $A, A' \in \mathcal{R}$  folgt, dass  $A \cap A' \in \mathcal{R}$ .
  - Für beliebige  $A, A' \in \mathcal{R}$  mit  $A \supset A'$  gibt es eine endliche Folge von paarweise disjunkten Mengen  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ , so dass  $A \setminus A' = A_1 \cup \dots \cup A_n$ .

In diesem Zusammenhang benötigen wir ein grundlegendes Resultat der Mengen–Algebra, das in der Literatur der *Satz über monotone Klassen* (bzw. *Monotone Class Theorem*) genannt wird.

### Lemma 3.5

- Sei  $\mathcal{R}$  ein Halbring von Teilmengen von  $\Omega$ , der die Ereignis– $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  erzeugt, d.h.,  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R})$ .
- Sei  $\mathcal{G}$  ein weiteres System von Teilmengen von  $\Omega$ , so dass
  - 1)  $\mathcal{R} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{A}$  und  $\Omega \in \mathcal{G}$ ,
  - 2)  $\bigcup_{i=1}^n B_i \in \mathcal{G}$  für jede endliche Folge  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{G}$ ,
  - 3)  $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{G}$  für jede monotone Folge  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{G}$  mit  $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ .
- Dann gilt  $\mathcal{G} = \mathcal{A}$ .

Mit Hilfe von Lemma 3.5 können wir nun zeigen, wie die Bedingung in Theorem 3.20 abgeschwächt werden kann.

**Theorem 3.21** Sei  $\mathcal{R}$  ein Halbring von Teilmengen von  $\Omega$  mit  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R})$ . Dann ist das dynamische System  $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbf{T})$  ergodisch, wenn es eine mittelnnde Folge  $\{W_n\}$  gibt, so dass (111) für beliebige  $A, A' \in \mathcal{R}$  gilt.

### Beweis

- Sei  $\{W_n\}$  eine mittelnnde Folge, so dass (111) für beliebige  $A, A' \in \mathcal{R}$  gilt. Wegen Theorem 3.20 genügt es zu zeigen, dass dann (111) auch für beliebige  $A, A' \in \mathcal{A}$  gilt.
- Wir zeigen zunächst, dass (111) für beliebige  $A \in \mathcal{G}$ ,  $A' \in \mathcal{R}$  gilt, wobei  $\mathcal{G}$  ein System von Teilmengen von  $\Omega$  ist, das den Bedingungen von Lemma 3.5 genügt.

- Aus der Additivität von Wahrscheinlichkeitsmaßen ergibt sich, dass (111) für beliebige  $A, A'$  mit  $A = A_1 \cup A_2$  und  $A_1, A_2, A' \in \mathcal{R}$  gilt, denn es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \left( P(A_1 \cap \mathbf{T}_x A') + P(A_2 \cap \mathbf{T}_x A') - P((A_1 \cap A_2) \cap \mathbf{T}_x A') \right) \nu(dx) \\ &= (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)) P(A') = P(A) P(A'). \end{aligned}$$

- Auf ähnliche Weise ergibt sich, dass (111) für Mengen  $A, A'$  gilt, wobei  $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$  und  $A_1, \dots, A_n, A' \in \mathcal{R}$ .
- Hieraus ergibt sich für beliebige  $A', A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$ , dass

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap \mathbf{T}_x A'\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) P(A') \nu(dx) \right| \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \left| P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap \mathbf{T}_x A'\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^j A_i \cap \mathbf{T}_x A'\right) \right| \nu(dx) \\ & \quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \left| P\left(\bigcup_{i=1}^j A_i \cap \mathbf{T}_x A'\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^j A_i\right) P(A') \right| \nu(dx) \\ & \quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \left| P\left(\bigcup_{i=1}^j A_i\right) P(A') - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) P(A') \right| \nu(dx) \\ & \leq 2 P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^j A_i\right), \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck gegen 0 strebt für  $j \rightarrow \infty$ , d.h., (111) gilt für beliebige Mengen  $A, A'$  mit  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$  und  $A', A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$ .

- Weil (111) offenbar auch für  $A, A'$  mit  $A = \Omega$  und  $A' \in \mathcal{R}$  gilt, ergibt sich aus Lemma 3.5, dass (111) für beliebige  $A, A'$  mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $A' \in \mathcal{R}$  gilt.
- Durch Vertauschung der Rollen von  $A$  und  $A'$  ergibt nun auf die gleiche Weise, dass (111) für beliebige  $A, A'$  mit  $A, A' \in \mathcal{A}$  gilt.  $\square$

### 3.4.3 Ergodizität von Cox-Prozessen; Beispiele

In diesem Abschnitt diskutieren wir Beispiele von ergodischen Cox-Prozessen, wobei wir zunächst zeigen, dass homogene Poisson-Prozesse ergodisch sind. Danach leiten wir allgemeine Bedingungen für die Ergodizität von Cox-Prozessen her. Schließlich zeigen wir, dass die in Abschnitt 3.2.3 eingeführten modulierten Poisson-Prozesse ergodisch sind.

- Zur Erinnerung: Man sagt, dass ein stationärer Punktprozess  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ergodisch ist, wenn das dynamische System  $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N, \mathbf{T})$  ergodisch ist.
- Analog hierzu sagt man, dass ein stationäres zufälliges Maß  $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ergodisch ist, wenn das dynamische System  $(\mathbb{M}, \mathcal{M}, P_\Lambda, \mathbf{T})$  ergodisch ist.
- Ein stationäres Intensitätsfeld  $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  heißt ergodisch, wenn das dynamische System  $(\mathbb{D}, \mathcal{D}, P_{\{\lambda_x\}}, \mathbf{T})$  ergodisch ist.
  - Dabei ist  $\mathbb{D}$  die Familie aller  $\nu_d$ -Äquivalenzklassen von Lebesgue-messbaren und lokal integrierbaren nichtnegativen Funktionen  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ , d.h., zwei solche Funktionen  $f, f' : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  werden als identisch erachtet, wenn  $f(x) = f'(x)$  für  $\nu_d$ -fast jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt.

- $\mathcal{D}$  ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\mathbb{D}$ , so dass sämtliche Abbildungen  $f \mapsto \eta$  von  $\mathbb{D}$  nach  $\mathbb{M}$  mit

$$\eta(B) = \int_B f(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (112)$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -messbar sind.

- Die Verschiebungsoperatoren  $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  gegeben sind durch

$$(\mathbf{T}_x f)(y) = f(x + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, f \in \mathbb{D}.$$

**Theorem 3.22** Sei  $\{N_B\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$ . Dann ist  $\{N_B\}$  ergodisch.

**Beweis**

- Wir betrachten das dynamische System  $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N, \mathbf{T})$  und zeigen, dass (111) für die mittelnende Folge  $\{W_n\}$  mit  $W_n = [-n, n]^d$  und für beliebige  $A, A' \in \mathcal{R}$  gilt, wobei das Mengensystem  $\mathcal{R} \subset \mathcal{N}$  gegeben ist durch

$$\mathcal{R} = \left\{ \varphi \in \mathbb{N} : k_i \leq \varphi(B_i) < \ell_i, i = 1, \dots, m, m \geq 1, B_i \in \mathcal{Q}^d, k_i, \ell_i \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\} \right\}. \quad (113)$$

- Für beliebige  $m, m' \geq 1, B_i, B'_i \in \mathcal{Q}^d$  und  $k_i, k'_i, \ell_i, \ell'_i \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$  sei nun

$$A = \{ \varphi \in \mathbb{N} : k_i \leq \varphi(B_i) < \ell_i, i = 1, \dots, m \} \quad \text{und} \quad A' = \{ \varphi \in \mathbb{N} : k'_i \leq \varphi(B'_i) < \ell'_i, i = 1, \dots, m' \}.$$

- Die Radius  $r > 0$  sei so gewählt, dass  $(\bigcup_{i=1}^m B_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{m'} B'_i) \subset B(o, r)$ .
- Aus der Homogenität und den Unabhängigkeitseigenschaften des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  ergibt sich dann, dass

$$P_N(A \cap \mathbf{T}_x A') = P_N(A) P_N(\mathbf{T}_x A') = P_N(A) P_N(A') \quad \forall x \in [-n, n]^d \setminus B(o, 2r). \quad (114)$$

- Somit gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d([-n, n]^d)} \int_{[-n, n]^d} P_N(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu_d(dx) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)^d} \int_{[-n, n]^d \setminus B(o, 2r)} P_N(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu_d(dx) \\ &\stackrel{(114)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)^d} \int_{[-n, n]^d \setminus B(o, 2r)} P_N(A) P_N(A') \nu_d(dx) = P_N(A) P_N(A'). \end{aligned}$$

- Weil das in (113) eingeführte Mengensystem  $\mathcal{R}$  ein Halbring ist mit  $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{N}$ , ergibt sich nun die Behauptung mit Hilfe von Theorem 3.21.  $\square$

**Theorem 3.23** Ein stationärer Cox-Prozess  $\{N_B\}$  ist genau dann ergodisch, wenn das zugehörige zufällige Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B\}$  ergodisch ist.

**Beweis**

- Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen zunächst an, dass das zufällige Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B\}$  von  $\{N_B\}$  nicht ergodisch ist.

- Wegen der Darstellungsformel (110) in Theorem 3.19 hat die Verteilung  $P_\Lambda$  von  $\{\Lambda_B\}$  die Form

$$P_\Lambda = p P'_\Lambda + (1 - p) P''_\Lambda, \quad 0 < p < 1, \quad (115)$$

wobei  $P'_\Lambda, P''_\Lambda$  zwei  $\mathbf{T}$ -invariante Wahrscheinlichkeitsmaße über  $\mathcal{M}$  sind mit  $P'_\Lambda \neq P''_\Lambda$ .

- Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Darstellungsformel (26) für die Verteilung von Cox-Prozessen, dass auch die Verteilung  $P_N$  von  $\{N_B\}$  die Form

$$P_N = p P'_N + (1 - p) P''_N$$

hat, wobei  $0 < p < 1$ .

- Dabei ergibt sich aus Theorem 3.7, dass  $P'_N \neq P''_N$ , und aus Theorem 3.8, dass  $P'_N, P''_N$  zwei  $\mathbf{T}$ -invariante Wahrscheinlichkeitsmaße über  $\mathcal{N}$  sind.
- Durch die erneute Anwendung von Theorem 3.19 ergibt sich somit, dass  $\{N_B\}$  nicht ergodisch ist.
- Wir nehmen nun umgekehrt an, dass der Cox-Prozess  $\{N_B\}$  nicht ergodisch ist, und zeigen, dass dann auch das zugehörige zufällige Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B\}$  nicht ergodisch ist.

- Wegen Theorem 3.19 gibt es eine  $\mathbf{T}$ -invariante Menge  $A \in \mathcal{N}$  mit  $0 < P_N(A) < 1$ .
- Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Darstellungsformel (26) für die Verteilung von Cox-Prozessen, dass

$$0 < P_\Lambda(\eta \in \mathbb{M} : P_N(A | \Lambda = \eta) \leq c) < 1 \quad (116)$$

für einen gewissen Schwellenwert  $c \in (0, 1)$ .

- Weil  $A \in \mathcal{N}$  eine  $\mathbf{T}$ -invariante Menge ist, gilt

$$P_N(A | \Lambda = \eta) = P_N(\mathbf{T}_x A | \Lambda = \mathbf{T}_x \eta) = P_N(A | \Lambda = \mathbf{T}_x \eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{M}, x \in \mathbb{R}^d.$$

- Dies bedeutet, dass die in (116) betrachtete Menge  $\{\eta \in \mathbb{M} : P_N(A | \Lambda = \eta) \leq c\}$  ebenfalls  $\mathbf{T}$ -invariant ist.
- Hieraus und aus (116) ergibt sich durch die erneute Anwendung von Theorem 3.19, dass  $\{\Lambda_B\}$  nicht ergodisch ist.  $\square$

**Korollar 3.4** Sei  $\{\lambda_x\}$  ein stationäres Intensitätsfeld, und sei  $\{N_B\}$  der zugehörige stationäre Cox-Prozess mit dem zufälligen Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B\}$ , wobei

$$\Lambda_B = \int_B \lambda_x dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (117)$$

Wenn das Intensitätsfeld  $\{\lambda_x\}$  ergodisch ist, dann ist auch der Cox-Prozess  $\{N_B\}$  ergodisch.

### Beweis

- Sei  $A \in \mathcal{M}$  eine  $\mathbf{T}$ -invariante Menge von absolutstetigen Maßen aus  $\mathbb{M}$ , und sei  $A_{\mathbb{D}} \in \mathcal{D}$  das Urbild von  $A$  unter der in (112) betrachteten Abbildung  $f \mapsto \eta$  von  $\mathbb{D}$  nach  $\mathbb{M}$ .
  - Weil  $\mathbf{T}_x \eta \in A$  für beliebige  $\eta \in A$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  und weil
$$(\mathbf{T}_x \eta)(B) = \eta(B - x) = \int_{B-x} f(y) dy = \int_B f(y - x) dy = \int_B (\mathbf{T}_{-x} f)(y) dy \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$
  - gilt somit auch  $\mathbf{T}_{-x} f \in A_{\mathbb{D}}$  bzw.  $\mathbf{T}_x f \in A_{\mathbb{D}}$  für beliebige  $f \in A_{\mathbb{D}}$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ .
  - D.h., das Urbild  $A_{\mathbb{D}} \in \mathcal{D}$  ist ebenfalls eine  $\mathbf{T}$ -invariante Menge.
- Das Intensitätsfeld  $\{\lambda_x\}$  sei nun ergodisch.
  - Dann ergibt sich aus Theorem 3.19, dass  $\max\{P_{\{\lambda_x\}}(A_{\mathbb{D}}), P_{\{\lambda_x\}}(A_{\mathbb{D}}^c)\} = 1$ .

- Hieraus folgt, dass  $\max\{P_\Lambda(A), P_\Lambda(A^c)\} = 1$  für jede eine  $\mathbf{T}$ -invariante Menge  $A \in \mathcal{M}$  von absolut-stetigen Maßen aus  $\mathbb{M}$ .
- Durch die erneute Anwendung von Theorem 3.19 ergibt sich nun, dass das zufällige Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B\}$  ergodisch ist.
- Aus Theorem 3.23 ergibt sich somit, dass auch der zugehörige Cox-Prozess  $\{N_B\}$  ergodisch ist.  $\square$

### Beachte

- 1) Mit Hilfe von Korollar 3.4 lässt sich sofort zeigen, dass  $\{N_B\}$  ergodisch ist, wenn  $\{N_B\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$  ist.
  - Denn für das Intensitätsfeld  $\{\lambda_x\}$  von  $\{N_B\}$  gilt dann, dass  $P(\lambda_x \equiv \lambda) = 1$  und somit  $P(A) = 0$  für alle anderen  $\mathbf{T}$ -invarianten Mengen  $A \in \mathcal{D}$ .
  - Aus Theorem 3.19 ergibt sich nun, dass  $\{\lambda_x\}$  ergodisch ist.
  - Wegen Korollar 3.4 ist also auch der Poisson-Prozess  $\{N_B\}$  ergodisch.
- 2) Auf ähnliche Weise kann man sich überlegen, dass der in Abschnitt 3.2.3 eingeführte modulierte Poisson-Prozess  $\{N_B\}$  ergodisch ist.
  - Denn das Intensitätsfeld  $\{\lambda_x\}$  von  $\{N_B\}$  kann als zufälliges Feld über dem kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P)$  des zugrundeliegenden homogenen Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$  aufgefasst werden,
    - d.h., es gibt eine  $(\mathcal{N}, \mathcal{D})$ -messbare Abbildung, die jeder Realisierung von  $\{S_n\}$  eine Realisierung von  $\{\lambda_x\}$  zuordnet.
    - Dabei besitzen die verschiebungsinvarianten Mengen von Realisierungen des zufälligen Feldes  $\{\lambda_x\}$ , deren Wahrscheinlichkeit nicht 0 ist, die Form  $\{\{\lambda_x(\varphi), x \in \mathbb{R}^d\} : \varphi \in A\}$ , wobei  $A \in \mathcal{N}$  eine  $\mathbf{T}$ -invariante Teilmenge von  $\mathbb{N}$  ist.
  - Weil
 
$$P(\{\lambda_x(\varphi), x \in \mathbb{R}^d\} : \varphi \in A) = P_N(A) \quad (118)$$
 und weil der Poisson-Prozess  $\{S_n\}$  ergodisch ist, können wegen Theorem 3.19 die in (118) betrachteten Wahrscheinlichkeiten nur die Werte 0 oder 1 annehmen.
    - Wegen Theorem 3.19 bedeutet dies, dass  $\{\lambda_x\}$  ergodisch ist.
    - Hieraus und aus Korollar 3.4 ergibt sich die Ergodizität des modulierten Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$ .

### 3.4.4 Ergodische Cluster-Prozesse

Bevor wir einige Beispiele ergodischer Cluster-Prozesse kurz diskutieren, geben wir zunächst ein allgemeines Ergodizitätskriterium für stationäre Cluster-Prozesse an.

**Theorem 3.24** *Ein stationärer Cluster-Prozess  $\{N_B\}$  ist genau dann ergodisch, wenn der zugrundeliegende Primärprozess  $\{S_n\}$  ergodisch ist.*

Der Beweis von Theorem 3.24 wird weggelassen, denn er verläuft völlig analog zum Beweis von Theorem 3.23.

### Beachte

- 1) Aus den Theoremen 3.22 und 3.24 ergibt sich sofort, dass jeder stationäre Poissonsche Cluster-Prozess ergodisch ist.

- Hieraus folgt insbesondere, dass die in Abschnitt 3.3.3 betrachteten Gauß–Poisson–Prozesse und Neyman–Scott–Prozesse ergodisch sind.
  - Wegen der am Ende von Abschnitt 3.3.3 gemachten Anmerkungen ist außerdem klar, dass auch der Matérn–Cluster–Prozess ergodisch ist, der in Abschnitt 3.2.3 eingeführt worden ist.
- 2) Mit Hilfe von Theorem 3.24 können jedoch auch ergodische Cluster–Prozesse gewonnen werden, deren Primärprozesse keine Poisson–Prozesse sind.
- Beispielsweise ergibt sich aus Theorem 3.24, dass jeder stationäre Cluster–Prozess ergodisch ist, dessen Primärprozess ein ergodischer Cox–Prozess ist.
  - Dies gilt also insbesondere dann, wenn der Primärprozess ein modulierter Poisson–Prozess ist.

### 3.5 Gibbs–Prozesse

Ausgehend von Poisson–Prozessen lässt sich noch eine weitere Klasse von Punktprozessen konstruieren, und zwar mit Hilfe von Radon–Nikodym–Dichten. Dies sind so genannte Gibbssche Punktprozesse bzw. kurz Gibbs–Prozesse.

Gibbs–Prozesse bilden dabei eine Klasse von Punktprozessen, die im allgemeinen nicht stationär sind und deren Verteilung absolutstetig bezüglich der Verteilung eines Poissonschen (Referenz–) Punktprozesses ist.

Für die mathematische Definition von Gibbs–Prozessen benötigen wir den Begriff des kanonischen Wahrscheinlichkeitsraumes von zufälligen Punktprozessen, der bereits in den Abschnitten 2.1.1 bzw. 3.4.1 betrachtet worden ist.

- Zur Erinnerung: Sei  $\mathbb{N}$  die Familie aller lokal endlichen Zählmaße  $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$ , d.h.,
  - es gilt  $\varphi(B) < \infty$  für jedes beschränkte  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$
  - und  $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)$  für paarweise disjunkte  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
- Außerdem sei  $\mathcal{N}$  die kleinste  $\sigma$ –Algebra von Teilmengen von  $\mathbb{N}$ , so dass  $\varphi \mapsto \varphi(B)$  für jedes beschränkte  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  eine  $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ –messbare Abbildung ist.
- Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $P : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  ist dann durch  $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P)$  der kanonische Wahrscheinlichkeitsraum eines Punktprozesses gegeben, d.h.,  $P$  kann als die Verteilung eines zufälligen Zählmaßes  $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  aufgefasst werden, das durch die Identität  $N(\varphi) = \varphi$  gegeben ist.

#### 3.5.1 Endliche Gibbs–Prozesse

Bei Anwendungen wird oft vorausgesetzt, dass das Intensitätsmaß  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  des zugrundeliegenden Poisson–Prozesses endlich ist. Außerdem setzen wir (so wie bisher) stets voraus, dass  $\mu$  diffus ist.

- Das bedeutet insbesondere, dass die Realisierungen eines solchen Poisson–Prozesses mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich viele Atome besitzen und dass diese Atome die Wertigkeit 1 besitzen, d.h., für die Verteilung  $P$  eines Poisson–Prozesses mit einem solchen Intensitätsmaß  $\mu$  gilt  $P(\mathbb{N}^{(e)}) = 1$ , wobei

$$\mathbb{N}^{(e)} = \left\{ \varphi = \sum_n \delta_{s_n} \in \mathbb{N} : \varphi(\mathbb{R}^d) < \infty, s_i \neq s_j \text{ für } i \neq j \right\}. \quad (119)$$

- Dann besitzt auch der zugehörige (absolutstetige) Gibbs–Prozess mit Wahrscheinlichkeit 1 nur Realisierungen aus  $\mathbb{N}^{(e)}$ .

Diese Situation soll nun genauer untersucht werden. Sie ist beispielsweise dann gegeben,

- wenn die Gibbs-Prozesse nur in einem beschränkten Beobachtungsfenster  $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$  betrachtet werden
- und wenn deshalb vorausgesetzt wird, dass der Poissonsche Referenzprozess mit Wahrscheinlichkeit 1 nur Atome in  $W$  besitzt.

In diesem Fall wird oft angenommen, dass das Intensitätsmaß  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$  des zugrunde liegenden Poisson-Prozesses die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf  $W$  ist mit

$$\mu(B) = \nu_d(B \cap W) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (120)$$

### Definition

- Sei  $Q : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  die Verteilung eines Poisson-Prozesses mit dem diffusen und endlichen Intensitätsmaß  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$ .
- Außerdem sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  eine Funktion, die den folgenden beiden Bedingungen genügt.
  1. Für beliebige  $\varphi = \sum_n \delta_{s_n}$  und  $\varphi' = \sum_n \delta_{s'_n}$  aus  $\mathbb{N}^{(e)}$ , so dass  $\varphi \geq \varphi'$ , gelte

$$f(\varphi) > 0 \quad \implies \quad f(\varphi') > 0. \quad (121)$$

2. Durch  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  sei eine Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich der Verteilung  $Q$  des Poissonschen Referenz-Punktrozesses gegeben, d.h., es gelte

$$\int_{\mathbb{N}} f(\varphi) Q(d\varphi) = 1. \quad (122)$$

- Dann kann man sich leicht überlegen, dass die Mengenfunktion  $P : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$P(A) = \int_A f(\varphi) Q(d\varphi) \quad \forall A \in \mathcal{N} \quad (123)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß über  $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$  ist und somit die Verteilung eines Punktprozesses ist.

- Ein Punktprozess, dessen Verteilung  $P$  die in (123) gegebene Form hat, wobei  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  den Bedingungen (121) und (122) genügt, wird *Gibbs-Prozess* genannt.

### Beachte

- Die Dichte  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  von Gibbs-Prozessen besitzt eine probabilistische Deutung.
  - Diejenigen Realisierungen  $\varphi \in \mathbb{N}^{(e)}$ , für die  $f(\varphi) > 1$  gilt, sind unter  $P$  „wahrscheinlicher“ als unter der Referenz-Verteilung  $Q$ .
  - Und umgekehrt: Realisierungen  $\varphi \in \mathbb{N}^{(e)}$ , für die  $f(\varphi) < 1$  gilt, treten unter  $P$  seltener als unter  $Q$  auf.
- Bei Anwendungen wird die Dichte  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  oft auf die folgende Weise konstruiert.
  - Zunächst wählt man eine explizit vorgegebene (integrierbare) Funktion  $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ , so dass

$$0 < \int_{\mathbb{N}} g(\varphi) Q(d\varphi) < \infty.$$

- Anschließend wird  $g$  so normiert, dass sich eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  bezüglich  $Q$  ergibt, wobei

$$f(\varphi) = g(\varphi) / \int_{\mathbb{N}} g(\varphi') Q(d\varphi') \quad \forall \varphi \in \mathbb{N}.$$

- Allerdings ist es in den meisten Fällen schwierig, die Normierungskonstante  $\int_{\mathbb{N}} g(\varphi) Q d\varphi$  explizit zu berechnen.
- Deshalb wird bei der statistischen Bestimmung der Gibbs-Verteilung  $P$  anstelle der Likelihood-Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  oft eine Pseudolikelihood-Funktion betrachtet, bei der diese Normierungskonstante wegfällt und die als Approximation der Likelihood-Funktion aufgefasst werden kann, vgl. Abschnitt 3.5.4.
- Dabei setzen wir (der Einfachheit wegen) stets voraus, dass das Intensitätsmaß  $\mu$  des Poissonschen Referenz-Prozesses durch (120) gegeben ist.

## Beispiele

### 1. Strauss-Prozess

- Seien  $a > 0$ ,  $b \in [0, \infty]$  und  $R > 0$  beliebige Zahlen.
- Ein Gibbs-Prozess heißt *Strauss-Prozess* in  $W$ , wenn die in (123) betrachtete Dichte die folgende Form hat:

$$f(\varphi) = c a^{\varphi(W)} \exp(-b t_R(\varphi)) \quad \forall \varphi \in \mathbb{N}. \quad (124)$$

– Dabei bezeichnet

$$t_R(\varphi) = \sum_{n,m} \mathbb{1}_{W \times W}(s_n, s_m) \mathbb{1}_{(0,R)}(|s_n - s_m|)$$

die Anzahl aller Punktepaare  $(s_n, s_m)$  von  $\varphi = \sum_n \delta_{s_n}$  in  $W$ , deren Abstand kleiner als  $R$  ist, – und  $c$  ist eine Normierungskonstante, so dass (122) gilt, d.h.,

$$c = \left( \int_{\mathbb{N}} a^{\varphi(W)} \exp(-b t_R(\varphi)) Q(d\varphi) \right)^{-1}.$$

- Die drei Parameter  $a > 0$ ,  $b \in [0, \infty]$  und  $R > 0$  des Strauss-Prozesses werden *Aktivität*, *Wechselwirkungsparameter* bzw. *Wechselwirkungsradius* genannt.
- Der Wechselwirkungsparameter  $b \in [0, \infty]$  beschreibt die Stärke der gegenseitigen „Abstoßung“ zwischen den Punkten.
  - Wenn  $b = \infty$ , dann ergibt sich aus (124) insbesondere, dass

$$f(\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t_R(\varphi) > 0, \\ c a^{\varphi(W)} & \text{wenn } t_R(\varphi) = 0, \end{cases} \quad (125)$$

wobei  $\infty \cdot 0 = 0$  gesetzt wurde. In diesem Fall sagt man, dass  $P$  die Verteilung eines *Hard-Core-Prozesses* mit dem *Hard-Core-Radius*  $R$  ist.

– Wenn  $b = 0$ , dann ergibt sich aus (124), dass

$$f(\varphi) = c a^{\varphi(W)} \quad \forall \varphi \in \mathbb{N}, \quad (126)$$

und man kann sich leicht überlegen, dass dann durch  $P$  die Verteilung eines homogenen Poisson-Prozesses mit der Intensität  $a$  (eingeschränkt auf  $W$ ) gegeben ist.

### 2. Strauss-Hard-Core-Prozess

Das in (125) betrachtete Modell eines Gibbsschen Hard-Core-Prozesses lässt sich auf die folgende Weise verallgemeinern.

- Seien  $a > 0$ ,  $b \in (-\infty, \infty]$  und  $R, R' > 0$  mit  $R < R'$  beliebige Zahlen.
- Ein Gibbs-Prozess heißt *Strauss-Hard-Core-Prozess* in  $W$ , wenn die in (123) betrachtete Dichte die folgende Form hat: Für jedes  $\varphi \in \mathbb{N}$  gilt

$$f(\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t_R(\varphi) > 0, \\ c a^{\varphi(W)} \exp(-b t_{R'}(\varphi)), & \text{wenn } t_R(\varphi) = 0. \end{cases} \quad (127)$$

- Dabei sind  $R$  und  $R'$  der Hard–Core–Radius bzw. der Wechselwirkungsradius. Der Wechselwirkungsparameter  $b \in (-\infty, \infty]$  beschreibt die Stärke der gegenseitigen „Abstoßung“ (wenn  $b > 0$ ) bzw. „Anziehung“ (wenn  $b < 0$ ) von Punktepaaren, deren Abstand zwischen  $R$  und  $R'$  liegt.

### 3. Soft–Core–Prozess

Außerdem kann das in (125) betrachtete Modell eines Gibbsschen Hard–Core–Prozesses auf die folgende Weise modifiziert werden.

- Seien  $a > 0$ ,  $b \geq 0$  und  $\kappa \in (0, 1)$  beliebige Zahlen.
- Ein Gibbs–Prozess heißt *Soft–Core–Prozess* in  $W$ , wenn

$$f(\varphi) = c a^{\varphi(W)} \exp\left(-\sum_{n,m: s_n \neq s_m} \mathbb{1}_{W \times W}(s_n, s_m) \left(\frac{b}{|s_n - s_m|}\right)^{2/\kappa}\right) \quad \forall \varphi \in \mathbb{N}. \quad (128)$$

- Der Wechselwirkungsparameter  $b \in [0, \infty]$  in (128) beschreibt erneut die Stärke der gegenseitigen „Abstoßung“ zwischen den Punkten.
  - Dabei wächst die Stärke der Wechselwirkung mit der Größe von  $b$ .
  - Umgekehrt entsprechen größere Werte des Exponenten  $\kappa$  einer schwächeren Wechselwirkung.
  - Für  $\kappa \rightarrow 0$  konvergiert die Dichte in (128) gegen die Dichte des Hard–Core–Prozesses in (125) mit dem Hard–Core–Radius  $R = b$ .

### 4. Geyserscher Sättigungsprozess

In der Literatur wird noch eine weitere Modifikation des in (124) eingeführten Strauss–Prozesses betrachtet, die wie folgt definiert ist.

- Seien  $a > 0$ ,  $b \in (-\infty, \infty]$  und  $m, R > 0$  beliebige Zahlen.
- Ein Gibbs–Prozess heißt *Geyserscher Sättigungsprozess* in  $W$ , wenn die in (123) betrachtete Dichte die folgende Form hat:

$$f(\varphi) = c a^{\varphi(W)} \exp\left(-b \sum_n \mathbb{1}_W(s_n) \min\{m, t_R(s_n, \varphi)\}\right) \quad \forall \varphi \in \mathbb{N}, \quad (129)$$

wobei  $t_R(x, \varphi) = \varphi(B(x, R) \setminus \{x\})$  die Anzahl der Atome  $s_n$  von  $\varphi = \sum_n \delta_{s_n}$  bezeichnet, deren Abstand von  $x$  größer als 0, jedoch nicht größer als  $R$  ist.

- Der Wechselwirkungsparameter  $b \in (-\infty, \infty]$  beschreibt die Stärke der gegenseitigen „Abstoßung“ (wenn  $b > 0$ ) bzw. „Anziehung“ (wenn  $b < 0$ ) zwischen den Punkten, während  $m > 0$  die Bedeutung eines (Sättigungs–) Schwellenwertes hat.
- Für  $m \uparrow \infty$  konvergiert die in (129) betrachtete Dichte gegen die Dichte des Strauss–Prozesses, wenn  $b \geq 0$ . Für  $m \downarrow 0$  ergibt sich im Limes der Poisson–Fall.

## 3.5.2 Bedingte Gibbs–Prozesse

Manche Autoren betrachten die bedingte Verteilung von Gibbs–Prozessen unter der Bedingung, dass der Gibbs–Prozess eine vorgegebene Anzahl  $n \geq 1$  von Punkten in  $W$  hat.

### Definition

- Die Verteilung  $P : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  sei durch (123) gegeben, und das Intensitätsmaß  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  des zugehörigen Poisson–Prozesses habe die in (120) betrachtete Form.

- Für jedes  $n \geq 1$  mit  $P(A_n) > 0$ , wobei  $A_n = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(W) = n\}$ , sei die (bedingte) Verteilung  $P_n : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  gegeben durch

$$P_n(A) = \frac{P(A \cap A_n)}{P(A_n)} \quad \forall A \in \mathcal{N}. \quad (130)$$

- Dann sagt man, dass  $P_n$  die Verteilung eines *bedingten Gibbs-Prozesses* mit der vorgegebenen Anzahl  $n$  von Punkten in  $W$  ist.

### Theorem 3.25

- Für die in (130) eingeführte Verteilung  $P_n$  gilt die Darstellungsformel

$$P_n(A) = \int_{[A]} f_n(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \quad \forall A \in \mathcal{N}. \quad (131)$$

- Dabei ist der Integrationsbereich  $[A] \subset \mathbb{R}^{nd}$  in (131) gegeben durch

$$[A] = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in W^n : \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in A \right\},$$

- und  $f_n : W^n \rightarrow [0, \infty)$  ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich des  $(nd)$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes in  $W^n$ , deren Werte nicht von der Anordnung der Punkte  $x_1, \dots, x_n$  abhängen und die gegeben ist durch

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{f(\sum_{i=1}^n \delta_{x_i})}{\nu_d^n(W) \int_{\mathbb{N}} f(\varphi) Q_n(d\varphi)} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in W^n, \quad (132)$$

- wobei  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  die in (123) betrachtete (unbedingte) Dichte des Gibbs-Prozesses ist
- und  $Q_n : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  mit  $Q_n(A) = Q(A \cap A_n)/Q(A_n)$  die bedingte Verteilung des zugrundeliegenden Poisson-Prozesses unter der Bedingung bezeichnet, dass dieser Poisson-Prozess  $n$  Punkte in  $W$  hat.

### Beweis

- Aus (123) und (130) ergibt sich, dass

$$P_n(A) = \frac{P(A \cap A_n)}{P(A_n)} = \frac{\int_{A \cap A_n} f(\varphi) Q(d\varphi)}{\int_{A_n} f(\varphi) Q(d\varphi)} = \frac{Q^{-1}(A_n) \int_{A \cap A_n} f(\varphi) Q(d\varphi)}{Q^{-1}(A_n) \int_{A_n} f(\varphi) Q(d\varphi)} = \frac{\int_A f(\varphi) Q_n(d\varphi)}{\int_{\mathbb{N}} f(\varphi) Q_n(d\varphi)}.$$

- Hieraus und aus der bedingten Gleichverteilungseigenschaft von Poisson-Prozessen (vgl. Theorem 2.3 und Korollar 2.1) ergibt sich mit Hilfe von (120), das

$$P_n(A) = \frac{\int_A f(\varphi) Q_n(d\varphi)}{\int_{\mathbb{N}} f(\varphi) Q_n(d\varphi)} = \frac{\int_{[A]} f(\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}) d(x_1, \dots, x_n)}{\nu_d^n(W) \int_{\mathbb{N}} f(\varphi) Q_n(d\varphi)} = \int_{[A]} f_n(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n). \quad \square$$

### Beachte

- Mit der Konvention, dass  $\exp(-\infty) = 0$ , lässt sich die Dichte  $f_n : W^n \rightarrow [0, \infty)$  in (131) durch eine so genannte *Energiefunktion*  $U : W^n \rightarrow (-\infty, \infty]$  ausdrücken, so dass

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = c \exp(-U(x_1, \dots, x_n)) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in W^n, \quad (133)$$

wobei die Normierungskonstante  $c$  gegeben ist durch

$$c = \left( \int_{W^n} \exp(-U(x_1, \dots, x_n)) d(x_1, \dots, x_n) \right)^{-1}.$$

- Bei Anwendungen wird oft angenommen, dass die Energiefunktion  $U : W^n \rightarrow (-\infty, \infty]$  durch zwei Funktionen  $\phi_1 : W \rightarrow (-\infty, \infty]$  und  $\phi_2 : W^2 \rightarrow (-\infty, \infty]$  gegeben ist, so dass

$$U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left( \phi_1(x_i) + \sum_{j=i+1}^n \phi_2(x_i, x_j) \right) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in W^n, \quad (134)$$

- wobei  $\phi_1 : W \rightarrow (-\infty, \infty]$  die Intensitätsfunktion des Gibbs-Prozesses in  $W$  bestimmt
- und  $\phi_2 : W^2 \rightarrow (-\infty, \infty]$  ein so genanntes *Paarpotenzial* mit  $\phi_2(x, y) = \phi_2(y, x)$  für alle  $x, y \in W$  ist.
- Für die ersten drei Beispiele von Gibbs-Prozessen, die in Abschnitt 3.5.1 betrachtet wurden, besitzt die Energiefunktion  $U : W^n \rightarrow (-\infty, \infty]$  die Form (134).
  - Dabei gilt  $\phi_1(x) = -\log a$  für jedes  $x \in W$ , d.h., es gilt

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = c a^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \phi_2(x_i, x_j)\right) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in W^n, \quad (135)$$

- wobei  $c \in (0, \infty)$  eine Normierungskonstante ist und (o.B.d.A.)  $a = 1$  gesetzt werden kann.
- Manchmal wird anstelle der Konstanten  $a > 0$  in (135) eine beliebige (integrierbare) Funktion  $a : W \rightarrow [0, \infty)$  betrachtet. Die Formel (135) geht dann über in

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = c \exp\left(\sum_{i=1}^n \left(\log a(x_i) - \sum_{j=i+1}^n \phi_2(x_i, x_j)\right)\right) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in W^n. \quad (136)$$

- Für die Beispiele 1 – 3 von Gibbs-Prozessen, die in Abschnitt 3.5.1 betrachtet wurden, hat das Paarpotenzial  $\phi_2 : W^2 \rightarrow (-\infty, \infty]$  in (135) bzw. (136) die folgende Gestalt.

## Beispiele

### 1. Strauss-Prozess

- Seien  $b \in [0, \infty]$  und  $R > 0$  beliebige Zahlen.
- Für den (bedingten) *Strauss-Prozesses* in  $W$  ist das Paarpotenzial  $\phi_2 : W^2 \rightarrow (-\infty, \infty]$  gegeben durch

$$\phi_2(x, y) = \begin{cases} b, & \text{wenn } |x - y| \leq R, \\ 0, & \text{wenn } |x - y| > R. \end{cases} \quad (137)$$

- Für  $b = \infty$  ergibt sich aus (135) und (137) mit  $a = 1$ , dass

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \min_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |x_i - x_j| \leq R, \\ c, & \text{wenn } \min_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |x_i - x_j| > R. \end{cases} \quad (138)$$

- In diesem Fall sagt man, dass  $P_n$  die Verteilung eines bedingten *Hard-Core-Prozesses* mit dem *Hard-Core-Radius*  $R$  ist.
- Dabei ist zu beachten, dass dann die Anzahl  $n$  der Punkte bei gegebenem Fenster  $W$  nicht beliebig groß sein kann, weil in diesem Fall  $P(A_n) = 0$  bzw.  $f_n(x) = 0$  für jedes  $x \in W$  und für jedes hinreichend große  $n \geq n_0$  gilt.
- Wenn  $b = 0$ , dann ergibt sich aus (135) und (137), dass

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\nu_d^n(W)} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in W^n, \quad (139)$$

d.h., die  $n$  Punkte sind unabhängig und gleichverteilt in  $W$  (was der bedingten Gleichverteilungseigenschaft von homogenen Poisson-Prozessen entspricht).

2. *Strauss–Hard–Core–Prozess*

- Seien  $b \in (-\infty, \infty]$  und  $R, R' > 0$  mit  $R < R'$  beliebige Zahlen.
- Das Paarpotenzial  $\phi_2 : W^2 \rightarrow (-\infty, \infty]$  des (bedingten) *Strauss–Hard–Core–Prozesses* in  $W$  ist gegeben durch

$$\phi_2(x, y) = \begin{cases} \infty, & \text{wenn } |x - y| \leq R, \\ b, & \text{wenn } R < |x - y| \leq R', \\ 0, & \text{wenn } |x - y| > R'. \end{cases} \quad (140)$$

3. *Soft–Core–Prozess*

- Seien  $b \geq 0$  und  $\kappa \in (0, 1)$  beliebige Zahlen.
- Das Paarpotenzial  $\phi_2 : W^2 \rightarrow (-\infty, \infty]$  des (bedingten) *Soft–Core–Prozesses* in  $W$  ist gegeben durch

$$\phi_2(x, y) = \left( \frac{b}{|x - y|} \right)^{2/\kappa} \quad \forall x, y \in W. \quad (141)$$

**Beachte**

Die Energiefunktion des Geyerschen Sättigungsprozesses lässt sich nicht in der Form (134) darstellen. Hierfür sind Potenzialfunktionen höherer Ordnung erforderlich, vgl. Abschnitt 3.5.3.

- Seien  $b \in (-\infty, \infty]$  und  $m, R > 0$  beliebige Zahlen.
- Die Energiefunktion  $U : W^n \rightarrow (-\infty, \infty]$  des (bedingten) *Geyerschen Sättigungsprozesses* in  $W$  ist gegeben durch

$$U(x_1, \dots, x_n) = b \sum_{i=1}^n \min\{m, t_{i,R}(x_1, \dots, x_n)\} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in W^n, \quad (142)$$

wobei  $t_{i,R}(x_1, \dots, x_n) = \#\{j : 1 \leq j \leq n, 0 < |x_i - x_j| \leq R\}$  die Anzahl derjenigen Punkte  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  bezeichnet, deren Abstand von  $x_i$  nicht größer als  $R$  ist.

- Die Dichte  $f_n : W^n \rightarrow [0, \infty)$  dieses Prozesses ist somit gegeben durch

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = c \exp\left(-b \sum_{i=1}^n \min\{m, t_{i,R}(x_1, \dots, x_n)\}\right) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in W^n. \quad (143)$$

**3.5.3 Potenzialfunktionen höherer Ordnung; bedingte Intensität**

- Das Intensitätsmaß  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$  des Poissonschen Referenz–Prozesses sei durch (120) gegeben.
- Mit Hilfe der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der (unbedingten) Dichte  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  und den bedingten Dichten  $f_n : \mathbb{R}^{nd} \rightarrow [0, \infty)$  von Gibbs–Prozessen in  $W$ .
  - Und zwar gilt für beliebige  $n \geq 0$  und  $\varphi = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathbb{N}^{(e)}$ , dass  $f(\varphi) = P(A_n) f_n(x_1, \dots, x_n)$ , wobei  $A_n = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(W) = n\}$ .
  - Die Einschränkung der Dichte  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  auf die Menge  $\mathbb{N}^{(e)}$  endlicher Zählmaße lässt sich also durch die (in Abschnitt 3.5.2 betrachteten) Funktionen  $\phi_1 : W \rightarrow (-\infty, \infty]$  und  $\phi_2 : W^2 \rightarrow (-\infty, \infty]$  ausdrücken, wenn dies für die bedingten Dichten  $f_n : \mathbb{R}^{nd} \rightarrow [0, \infty)$  gilt.
  - Im allgemeinen lässt sich die Dichte  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  von Gibbs–Prozessen in  $W$  durch eine *Siebformel* darstellen, die auch Potenzialfunktionen höherer Ordnung enthält, vgl. Theorem 3.26.

**Theorem 3.26** Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  die Dichte eines Gibbs-Prozesses. Dann gibt es eine Konstante  $V_0 \in \mathbb{R}$  und für jedes  $k \geq 1$  eine Funktion  $V_k : W^k \rightarrow [-\infty, \infty)$ , so dass für jedes  $n \geq 0$  und für beliebige

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathbb{N}^{(e)} \quad \text{mit} \quad \varphi(\mathbb{R}^d \setminus W) = 0$$

die folgende Darstellungsformel gilt:

$$f(\varphi) = \exp \left( V_0 + \sum_{j=1}^n \sum_{\{x_{i_1}, \dots, x_{i_j}\} \subset \{x_1, \dots, x_n\}} V_j(x_{i_1}, \dots, x_{i_j}) \right), \quad (144)$$

wobei in (144) über alle nichtleeren Teilmengen  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_j}\}$  von  $\{x_1, \dots, x_n\}$  summiert wird.

### Beweis

- Wir zeigen, dass (144) gilt, wenn die Konstante  $V_0 \in \mathbb{R}$  und die Funktionen  $V_k : W^k \rightarrow [-\infty, \infty)$  wie folgt gewählt werden.
  - Sei  $V_0 = \log f(\varphi_0)$ , wobei  $\varphi_0$  das Nullmaß mit  $\varphi_0(\mathbb{R}^d) = 0$  bezeichnet.
  - Aus den Bedingungen (121) und (122) an die Dichte von Gibbs-Prozessen ergibt sich dabei, dass  $f(\varphi_0) > 0$  und somit  $V_0 = \log f(\varphi_0) \in \mathbb{R}$ .
  - Die Funktionen  $V_k : W^k \rightarrow [-\infty, \infty)$  seien für jedes  $k \geq 1$  gegeben durch

$$V_k(x_1, \dots, x_k) = (-1)^k V_0 + \sum_{j=1}^k \sum_{\{x_{i_1}, \dots, x_{i_j}\} \subset \{x_1, \dots, x_k\}} (-1)^{k-j} \log f(\delta_{x_{i_1}} + \dots + \delta_{x_{i_j}}), \quad (145)$$

- wobei die Summation in (145) über alle nichtleeren Teilmengen  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_j}\}$  von  $\{x_1, \dots, x_k\}$  erfolgt und  $V_k(x_1, \dots, x_k) = -\infty$  gesetzt wird, wenn  $f(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_k}) = 0$ .
- Für  $n = 0$  ist die Gültigkeit von (144) klar, denn es gilt

$$f(\varphi_0) = \exp(\log f(\varphi_0)) = \exp(V_0).$$

- Auf ähnliche Weise ergibt sich für  $n = 1$  und für jedes  $\varphi = \delta_x$  mit  $x \in W$ , dass
$$f(\varphi) = f(\delta_x) = \exp(\log f(\delta_x)) = \exp(\log f(\varphi_0) + \log f(\delta_x) - \log f(\varphi_0)) = \exp(V_0 + V_1(x)).$$
- Um die Gültigkeit der Siebformel (144) für jedes  $n \geq 1$  zu zeigen, führen wir zunächst die folgende Kurzschreibweise ein.
  - Mit  $|\mathbf{x}|$  bezeichnen wir die Anzahl der Elemente der (endlichen) Menge  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_k\}$ .
  - Außerdem schreiben wir kurz  $f(\mathbf{x})$  für  $f(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_k})$  bzw.  $V_k(\mathbf{x})$  für  $V_k(x_1, \dots, x_k)$ ; insbesondere ist dann  $V_0(\emptyset) = V_0$ .
  - Mit  $\sum_{\mathbf{y} \subset \mathbf{x}}$  bezeichnen wir die Summation über sämtliche Teilmengen  $\mathbf{y}$  von  $\mathbf{x}$ .
- Durch Einsetzen von (145) in die rechte Seite von (144) ergibt sich dann für beliebige  $n \geq 1$  und  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset W$ , dass

$$\begin{aligned} \exp \left( V_0 + \sum_{j=1}^n \sum_{\{x_{i_1}, \dots, x_{i_j}\} \subset \{x_1, \dots, x_n\}} V_j(x_{i_1}, \dots, x_{i_j}) \right) &= \exp \left( \sum_{\mathbf{y} \subset \mathbf{x}} V_{|\mathbf{y}|}(\mathbf{y}) \right) \\ &\stackrel{(145)}{=} \exp \left( \sum_{\mathbf{y} \subset \mathbf{x}} \sum_{\mathbf{z} \subset \mathbf{y}} (-1)^{|\mathbf{y}|-|\mathbf{z}|} \log f(\mathbf{z}) \right) \\ &= \exp \left( \sum_{\mathbf{z} \subset \mathbf{x}} \sum_{\mathbf{y} : \mathbf{z} \subset \mathbf{y} \subset \mathbf{x}} (-1)^{|\mathbf{y}|-|\mathbf{z}|} \log f(\mathbf{z}) \right) \\ &= \exp \left( \sum_{\mathbf{z} \subset \mathbf{x}} \log f(\mathbf{z}) \sum_{\mathbf{y} : \mathbf{z} \subset \mathbf{y} \subset \mathbf{x}} (-1)^{|\mathbf{y}|-|\mathbf{z}|} \right) \\ &= f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

weil

$$\sum_{\mathbf{y}: \mathbf{z} \subset \mathbf{y} \subset \mathbf{x}} (-1)^{|\mathbf{y}| - |\mathbf{z}|} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathbf{z} = \mathbf{x}, \\ 0, & \text{wenn } \mathbf{z} \subset \mathbf{x} \text{ und } \mathbf{z} \neq \mathbf{x}. \end{cases} \quad \square$$

### Beachte

- Die Funktion  $V_k : W^k \rightarrow [-\infty, \infty)$  in (144) bzw. (145) wird *Potenzialfunktion*  $k$ -ter Ordnung genannt. Dabei kann der Faktor  $e^{V_0}$  in (144) als Normierungskonstante aufgefasst werden.
- Bei den ersten drei Beispielen von Gibbs-Prozessen, die in den Abschnitten 3.5.1 bzw. 3.5.2 betrachtet wurden, werden zunächst die Potenzialfunktionen  $V_k : W^k \rightarrow [-\infty, \infty)$  vorgegeben.
  - Dabei wird  $V_k \equiv 0$  für jedes  $k \geq 3$  gesetzt.
  - Anschließend wird die Dichte  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  des jeweils betrachteten Gibbs-Prozesses durch den Exponential-Ansatz (144) definiert.
  - Durch (145) ist dann eine so genannte *Möbiussche Umkehrformel* gegeben, mit deren Hilfe die Potenzialfunktionen  $V_k$  durch die Dichte  $f$  ausgedrückt werden können.

Wir betrachten nun noch eine weitere Charakteristik von Gibbs-Prozessen, und zwar ihre bedingte Intensität.

### Definition

- Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  die Dichte eines Gibbs-Prozesses. Dann heißt die Funktion  $\lambda : W \times \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$\lambda(u, \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{f(\mathbf{x} \cup \{u\})}{f(\mathbf{x})}, & \text{wenn } u \notin \mathbf{x}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (146)$$

die *bedingte Intensität* des Gibbs-Prozesses, wobei wir  $\frac{0}{0} = 0$  setzen.

- Dabei verwenden wir in (146) die gleiche Kurzschreibweise wie im Beweis von Theorem 3.26 und schreiben wir  $f(\mathbf{x})$  anstelle von  $f(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n})$ , wobei  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

### Beachte

- Für jedes  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  kann die in (146) eingeführte Größe  $\lambda(u, \mathbf{x})$  als die bedingte Intensität dafür interpretiert werden, dass an der Stelle  $u$  ein Punkt zu der (bereits vorhandenen) Konfiguration  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  von Punkten hinzugefügt wird.
- Die bedingte Intensität  $\lambda(u, \mathbf{x})$  hat den Vorteil, dass der Quotient  $f(\mathbf{x} \cup \{u\})/f(\mathbf{x})$  in der Definitionsgleichung (146) von  $\lambda(u, \mathbf{x})$  keine (unbekannte) Normierungskonstante enthält.
- Für den in (125) bzw. (138) betrachteten Hard-Core-Prozess gilt beispielsweise, dass

$$\lambda(u, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } t_R(\mathbf{x} \cup \{u\}) = 0, \\ 0, & \text{wenn } t_R(\mathbf{x} \cup \{u\}) > 0, \end{cases} \quad (147)$$

wobei  $t_R(\mathbf{x} \cup \{u\})$  die Anzahl aller Punktepaare von  $\mathbf{x} \cup \{u\}$  ist, deren Abstand kleiner als  $R$  ist.

**Theorem 3.27** *Die Dichte  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  von Gibbs-Prozessen ist eindeutig durch die in (146) eingeführte bedingte Intensität  $\lambda : W \times \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  bestimmt.*

**Beweis**

- Aus der Bedingung (121) an die Dichte von Gibbs-Prozessen ergibt sich, dass  $f(\mathbf{x} \cup \{u\}) = 0$ , wenn  $f(\mathbf{x}) = 0$ . In diesem Fall gilt also

$$f(\mathbf{x}) = 0 = \lambda(u, \mathbf{x}).$$

- Sei nun  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  eine (Punkt-) Menge mit  $f(\mathbf{x}) > 0$ . Wegen (121) gilt dann auch  $f(\mathbf{y}) > 0$  für jedes  $\mathbf{y} \subset \mathbf{x}$ . Hieraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} f(\{x_1, \dots, x_n\}) &= f(\emptyset) \frac{f(\{x_1\})}{f(\emptyset)} \frac{f(\{x_1, x_2\})}{f(\{x_1\})} \cdots \frac{f(\{x_1, \dots, x_n\})}{f(\{x_1, \dots, x_{n-1}\})} \\ &= f(\emptyset) \lambda(x_1, \emptyset) \lambda(x_2, \{x_1\}) \dots \lambda(x_n, \{x_1, \dots, x_{n-1}\}). \end{aligned} \quad (148)$$

- Damit ist zunächst gezeigt, dass sich die Dichte  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  bis auf den konstanten Faktor  $f(\emptyset)$  durch die bedingte Intensität  $\lambda : W \times \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  ausdrücken lässt.
- Andererseits ergibt sich aus der Normierungsbedingung (122), dass

$$\frac{1}{f(\emptyset)} = Q(A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q(A_n)}{\nu_d^n(W)} \int_{W^n} \lambda(x_1, \emptyset) \lambda(x_2, \{x_1\}) \dots \lambda(x_n, \{x_1, \dots, x_{n-1}\}) d(x_1, \dots, x_n),$$

wobei  $A_n = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(W) = n\}$  und  $Q$  die Verteilung des Poissonschen Referenz-Prozesses bezeichnet.

- Somit ist gezeigt, dass auch  $f(\emptyset)$  eindeutig durch die bedingte Intensität  $\lambda : W \times \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  bestimmt ist.  $\square$

**3.5.4 Parametrische Familien von Gibbs-Prozessen; Pseudolikelihood-Funktion**

- In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass die Dichte  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  des betrachteten Gibbs-Prozesses zu einer parametrischen Familie  $\{f_\theta, \theta \in \Theta\}$  von Dichten gehört, wobei  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$  für ein  $m \geq 1$ . Beispiele hierfür wurden bereits in den Abschnitten 3.5.1 bzw. 3.5.2 diskutiert.
- Wenn das Punktmuster  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset W$  beobachtet wird, dann ist durch den Ansatz

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} L(\mathbf{x}; \theta) \quad (149)$$

ein *Maximum-Likelihood-Schätzer* für  $\theta$  gegeben, wobei  $L : \mathbb{N}^{(e)} \times \Theta \rightarrow [0, \infty)$  mit  $L(\mathbf{x}; \theta) = f_\theta(\mathbf{x})$  die Likelihood-Funktion ist.

**Beispiele**1. *Poisson-Prozess*

- Wenn der betrachtete Gibbs-Prozess ein homogener Poisson-Prozess in  $W$  mit der (unbekannten) Intensität  $\lambda > 0$  ist, dann gilt

$$f_\lambda(\mathbf{x}) = c(\lambda) \lambda^{|\mathbf{x}|},$$

- wobei sich die Normierungskonstante  $c(\lambda) = e^{(1-\lambda)\nu_d(W)}$  aus (126) ergibt. Denn es gilt

$$1 = \int_{\mathbb{N}} f_\lambda(\varphi) Q(d\varphi) \stackrel{(126)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c(\lambda) \lambda^k \frac{\nu_d^k(W)}{k!} \exp(-\nu_d(W)) = c(\lambda) e^{\nu_d(W)(\lambda-1)}.$$

- Die Loglikelihood-Funktion  $\log L(\mathbf{x}; \lambda)$  bzw. ihre Ableitung haben somit die Form

$$\log L(\mathbf{x}; \lambda) = |\mathbf{x}| \log \lambda + (1 - \lambda) \nu_d(W)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L(\mathbf{x}; \lambda) = \frac{|\mathbf{x}|}{\lambda} - \nu_d(W).$$

- Der Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\lambda}(\mathbf{x})$  für  $\lambda$  ist also gegeben durch  $\hat{\lambda}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|/\nu_d(W)$ .

## 2. Hard-Core-Prozess

- Ein weiteres Beispiel einer (ein-) parametrischen Familie von Gibbs-Prozessen, deren Maximum-Likelihood-Schätzer des Parameters explizit bestimmt werden kann, ist der Hard-Core-Prozess mit den Parametern  $a = 1$  und dem (unbekannten) Hard-Core-Radius  $R > 0$ .
- Die Dichte  $f_R : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  dieser Gibbs-Prozesse ist in (125) gegeben mit

$$f_R(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t_R(\mathbf{x}) > 0, \\ c(R), & \text{wenn } t_R(\mathbf{x}) = 0, \end{cases}$$

wobei  $t_R(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} \mathbb{1}_{(0,R)}(|x_i - x_j|)$  die Anzahl derjenigen Paare  $x_i, x_j$  von Punkten aus  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  bezeichnet, deren Abstand kleiner als  $R$  ist.

- Außerdem kann man sich leicht überlegen, dass die Normierungskonstante  $c(R)$  eine monoton nichtfallende Funktion bezüglich  $R > 0$  ist.
- Dies bedeutet, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{R}(\mathbf{x})$  für  $R$  gegeben ist durch

$$\hat{R}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \min\{|x_i - x_j| : i \neq j\}, & \text{wenn } |\mathbf{x}| \geq 2, \\ \text{diam } W, & \text{wenn } |\mathbf{x}| < 2, \end{cases}$$

wobei  $\text{diam } W$  den maximalen Abstand zweier Punkte in  $W$  bezeichnet.

## Beachte

- In den meisten Fällen ist die Normierungskonstante  $e^{V_0}$  in (144) jedoch unbekannt, d.h., es ist unbekannt wie diese Größe vom Parameter  $\theta$  abhängt.
- Dann ist es schwierig bzw. unmöglich, eine analytische Formel für den in (149) eingeführten Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\theta}$  herzuleiten.
- Ein möglicher Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, einen Schätzer  $\hat{\theta}$  für  $\theta$  mittels Monte-Carlo-Simulation zu bestimmen, vgl. Abschnitt 3.6.

Zunächst betrachten wir jedoch noch einen anderen Schätzansatz vom Likelihood-Typ für den Parameter  $\theta$ , bei dem die Dichte  $f_\theta(\mathbf{x})$  in (149) durch einen Grenzwert von Produkten bedingter Dichten ersetzt wird.

Eine (teilweise heuristische) Begründung für diesen Ansatz der so genannten *bedingten Likelihood-Inferenz* kann dann gegeben werden, wenn es vorwiegend lokale Wechselwirkungen zwischen den Punkten gibt, während zwischen Punkte in weiter voneinander entfernten Gebieten keine bzw. nur schwache Wechselwirkungen bestehen.

Hierfür benötigen wir die folgenden Begriffe.

## Definitionen

### 1. Nullfolge von gerichteten Zerlegungen

- Sei  $m_1, m_2, \dots$  eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen.
- Eine Familie  $\{\{B_{kj}, j = 1, \dots, m_k\}, k \geq 1\}$  von beschränkten Borel-Mengen  $B_{kj} \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  heißt *Nullfolge von gerichteten Zerlegungen* des Beobachtungsfensters  $W \subset \mathbb{R}^d$  in paarweise disjunkte Borel-Mengen, wenn
  - für jedes  $k \geq 1$  gelte  $\bigcup_{j=1}^{m_k} B_{kj} = W$  und  $B_{ki} \cap B_{kj} = \emptyset$  für beliebige  $i, j \in \{1, \dots, m_k\}$  mit  $i \neq j$ ,
  - für beliebige  $k \geq 1, i \in \{1, \dots, m_{k+1}\}$  es eine Zahl  $j \in \{1, \dots, m_k\}$  gibt, so dass  $B_{k+1,i} \subset B_{kj}$ ,
  - und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{j \in \{1, \dots, m_k\}} \sup_{x, y \in B_{kj}} |x - y| = 0$ .

## 2. Familien von bedingten Gibbs–Dichten

- Sei  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $B \subset W$  eine beliebige (Borelsche) Teilmenge des Beobachtungsfensters  $W$  mit  $0 < \nu_d(B) < \nu_d(W)$ .
- Für jede endliche Menge  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset W$  sei  $\mathbf{x}_B$  die Teilmenge derjenigen Elemente von  $\mathbf{x}$ , die in  $B$  liegen. Dabei sei

$$f_\theta(\mathbf{x}_B \mid \mathbf{x}_{W \setminus B}) = \begin{cases} \frac{f_\theta(\mathbf{x}_B \cup \mathbf{x}_{W \setminus B})}{\int f_\theta(\mathbf{y} \cup \mathbf{x}_{W \setminus B}) Q_B(d\mathbf{y})}, & \text{wenn } f_\theta(\mathbf{x}_{W \setminus B}) > 0, \\ 0, & \text{wenn } f_\theta(\mathbf{x}_{W \setminus B}) = 0, \end{cases} \quad (150)$$

wobei  $Q_B$  die Verteilung eines Poisson–Prozesses ist, dessen Intensitätsmaß  $\mu_B$  durch  $\mu_B(B') = \nu_d(B' \cap B)$  für jedes  $B' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  gegeben ist.

- Für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $B \subset W$  und  $0 < \nu_d(B) < \nu_d(W)$  ist dann  $f_\theta(\cdot \mid \mathbf{x}_{W \setminus B})$  die *bedingte Dichte* des Gibbs–Prozesses mit der (unbedingten) Dichte  $f_\theta$  unter der Bedingung, dass in  $W \setminus B$  die Punkt-Konfiguration  $\mathbf{x}_{W \setminus B}$  vorliegt.

**Beachte**

- Die in (150) eingeführten bedingten Dichten  $f_\theta(\cdot \mid \mathbf{x}_{W \setminus B})$  hängen *nicht* von der Normierungskonstante  $e^{V_0}$  ab.
- Für Gibbs–Prozesse mit schwachen (lokalen) Wechselwirkungen kann die (unbedingte) Dichte  $f_\theta(\mathbf{x})$  durch Produkte der bedingten Dichten  $f_\theta(\cdot \mid \mathbf{x}_{W \setminus B})$  approximiert werden.
  - Sei  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  eine Zerlegung von  $W$  mit  $0 < \nu_d(B_j) < \nu_d(W)$  für jedes  $j = 1, \dots, m$ , so dass näherungsweise

$$f_\theta(\mathbf{x}) \approx f_\theta(\mathbf{x}_{B_1}) \dots f_\theta(\mathbf{x}_{B_m}) \quad \forall \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}. \quad (151)$$

– Dann ergibt sich aus (150), dass

$$f_\theta(\mathbf{x}) \approx f_\theta(\mathbf{x}_{B_1} \mid \mathbf{x}_{W \setminus B_1}) \dots f_\theta(\mathbf{x}_{B_m} \mid \mathbf{x}_{W \setminus B_m}) \quad \forall \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}. \quad (152)$$

- Mit anderen Worten: Für Gibbs–Prozesse mit schwachen Wechselwirkungen zwischen den Punkten kann das Produkt der bedingten Dichten  $f_\theta(\mathbf{x}_{B_1} \mid \mathbf{x}_{W \setminus B_1}), \dots, f_\theta(\mathbf{x}_{B_m} \mid \mathbf{x}_{W \setminus B_m})$ 
  - als eine Approximation der (unbedingten) Dichte  $f_\theta(\mathbf{x})$  aufgefasst werden,
  - wobei diese Approximation den Vorteil besitzt, dass sie nicht von der unbekanntem Normierungskonstante  $e^{V_0}$  abhängt.
- Diese beiden Sachverhalte dienen als Motivation dafür, die in dem folgenden Theorem 3.28 eingeführte *Pseudolikelihood–Funktion*  $PL(\mathbf{x}; \theta)$  zur Schätzung des Parameters  $\theta$  zu verwenden.

**Theorem 3.28**

- Sei  $\{f_\theta, \theta \in \Theta\}$  eine parametrische Familie von (unbedingten) Gibbs–Dichten, so dass es für jedes  $\theta \in \Theta$  gewisse Konstanten  $p_\theta, q_\theta > 0$  gibt mit

$$f_\theta(\mathbf{x}) \leq p_\theta q_\theta^{|\mathbf{x}|} \quad \text{für } Q\text{-fast jedes } \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}. \quad (153)$$

- Außerdem sei  $\{\{B_{kj}, j = 1, \dots, m_k\}, k \geq 1\}$  eine Nullfolge von gerichteten Zerlegungen des Beobachtungsfensters  $W \subset \mathbb{R}^d$ , so dass  $\min\{\nu_d(B_{kj}) : j = 1, \dots, m_k\} > 0$  für jedes  $k \geq 1$  sowie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} m_k \Delta_k^2 = 0, \quad (154)$$

wobei  $\Delta_k = \max\{\nu_d(B_{kj}) : j = 1, \dots, m_k\}$ .

- Für  $Q$ -fast jedes  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  existiert dann der Grenzwert

$$\text{PL}(\mathbf{x}; \theta) = e^{-\nu_d(W)} \lim_{k \rightarrow \infty} f_\theta(\mathbf{x}_{B_{k1}} | \mathbf{x}_{W \setminus B_{k1}}) \cdots f_\theta(\mathbf{x}_{B_{km_k}} | \mathbf{x}_{W \setminus B_{km_k}}), \quad (155)$$

und es gilt

$$\text{PL}(\mathbf{x}; \theta) = \exp\left(-\int_W \lambda_\theta(u, \mathbf{x}) du\right) \prod_{i=1}^n \lambda_\theta(x_i, \mathbf{x} \setminus \{x_i\}), \quad (156)$$

wobei  $\lambda_\theta(u, \mathbf{x}) = f_\theta(\mathbf{x} \cup \{u\})/f_\theta(\mathbf{x})$  die in (146) eingeführte bedingte Intensität des Gibbs-Prozesses ist.

### Beweis

- Unter der Verteilung  $Q$  des Poissonschen Referenzprozesses gilt, dass

$$\begin{aligned} Q\left(\mathbf{x} : |\mathbf{x}_{B_{kj}}| \leq 1, \forall j = 1, \dots, m_k\right) &\geq 1 - \sum_{j=1}^{m_k} Q\left(\mathbf{x} : |\mathbf{x}_{B_{kj}}| \geq 2\right) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{m_k} \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{\nu_d^\ell(B_{kj})}{\ell!} \exp(-\nu_d(B_{kj})) \\ &\geq 1 - \sum_{j=1}^{m_k} \nu_d^2(B_{kj}) \\ &\geq 1 - m_k \Delta_k^2. \end{aligned}$$

- Wegen (154) gilt somit, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q\left(\mathbf{x} : |\mathbf{x}_{B_{kj}}| \leq 1, \forall j = 1, \dots, m_k\right) = 1.$$

- Es genügt deshalb, die Behauptungen (155) und (156) für Punktmuster  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  zu beweisen,
  - so dass (153) gilt und für jedes hinreichend große  $k \geq k_0$  und für jede Zerlegungskomponente  $B_{kj}$  höchstens ein Punkt von  $\mathbf{x}$  in  $B_{kj}$  liegt,
  - d.h., wir betrachten nun ein Punktmuster  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  mit der Eigenschaft (153) und mit

$$|\mathbf{x}_{B_{kj}}| \leq 1, \quad \forall j = 1, \dots, m_k, k \geq k_0. \quad (157)$$

- Außerdem nehmen wir (o.B.d.A.) an, dass  $f(\mathbf{x}) > 0$ ,
  - weil sonst beide Seiten von (156) gleich Null sind und somit die Behauptungen (155) und (156) für  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  mit  $f(\mathbf{x}) = 0$  offenbar gelten.
  - Weil  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  nur endlich viele Elemente hat, ergibt sich dabei aus  $f_\theta(\mathbf{x}) > 0$  wegen (121), dass es eine Zahl  $g_\theta(\mathbf{x}) > 0$  gibt mit

$$f_\theta(\mathbf{x}_{W \setminus B_{kj}}) > g_\theta(\mathbf{x}) \quad \forall j = 1, \dots, m_k, k \geq k_0. \quad (158)$$

- Dann ergibt aus (153) mit Hilfe der bedingten Gleichverteilungseigenschaft von  $Q_{B_{kj}}$ , dass

$$\begin{aligned} &\int f_\theta(\mathbf{y} \cup \mathbf{x}_{W \setminus B_{kj}}) Q_{B_{kj}}(d\mathbf{y}) \\ &= f_\theta(\mathbf{x}_{W \setminus B_{kj}}) \exp(-\nu_d(B_{kj})) + \int_{B_{kj}} f_\theta(\{u\} \cup \mathbf{x}_{W \setminus B_{kj}}) du \exp(-\nu_d(B_{kj})) \\ &+ c \sum_{\ell=2}^{\infty} p_\theta \max\{q_\theta^n, q_\theta^{n-1}\} \frac{(q_\theta \nu_d(B_{kj}))^\ell}{\ell!} \exp(-\nu_d(B_{kj})) \end{aligned}$$

für eine gewisse Konstante  $c \in [0, 1]$ , denn wegen (157) gilt  $n - 1 \leq |\mathbf{x}_{W \setminus B_{kj}}| \leq n$ .

- Hieraus und aus (157) – (158) ergibt sich, dass der Quotient in der Definitionsgleichung (150) der bedingten Dichten  $f_\theta(\mathbf{x}_{B_{k_j}} | \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}})$  die folgende Form hat, wobei  $\lambda_\theta(\emptyset, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) = 1$  gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
f_\theta(\mathbf{x}_{B_{k_j}} | \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) &\stackrel{(150)}{=} \frac{f_\theta(\mathbf{x}_{B_{k_j}} \cup \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}})}{\int f_\theta(\mathbf{y} \cup \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) Q_{B_{k_j}}(d\mathbf{y})} \stackrel{(146), (157)}{=} \frac{\lambda_\theta(\mathbf{x}_{B_{k_j}}, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) f_\theta(\mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}})}{\int f_\theta(\mathbf{y} \cup \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) Q_{B_{k_j}}(d\mathbf{y})} \\
&= \frac{\lambda_\theta(\mathbf{x}_{B_{k_j}}, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) \exp(\nu_d(B_{k_j}))}{1 + f_\theta^{-1}(\mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) \left( \int_{B_{k_j}} f_\theta(\{u\} \cup \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) du + O(\nu_d^2(B_{k_j})) \right)} \\
&\stackrel{(158)}{=} \frac{\lambda_\theta(\mathbf{x}_{B_{k_j}}, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) \exp(\nu_d(B_{k_j}))}{1 + \int_{B_{k_j}} \lambda_\theta(u, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) du + g_\theta^{-1}(\mathbf{x}) O(\nu_d^2(B_{k_j}))}.
\end{aligned}$$

- Somit ergibt sich für den in (155) betrachteten Grenzwert  $PL(\mathbf{x}; \theta)$ , dass

$$\begin{aligned}
PL(\mathbf{x}; \theta) &\stackrel{(155)}{=} e^{-\nu_d(W)} \lim_{k \rightarrow \infty} f_\theta(\mathbf{x}_{B_{k_1}} | \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_1}}) \dots f_\theta(\mathbf{x}_{B_{k_{m_k}}} | \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_{m_k}}}) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{m_k} \frac{\lambda_\theta(\mathbf{x}_{B_{k_j}}, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}})}{1 + \int_{B_{k_j}} \lambda_\theta(u, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) du + g_\theta^{-1}(\mathbf{x}) O(\nu_d^2(B_{k_j}))} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_\theta(x_i, \mathbf{x} \setminus \{x_i\})}{\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{m_k} \left( 1 + \int_{B_{k_j}} \lambda_\theta(u, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) du + g_\theta^{-1}(\mathbf{x}) O(\nu_d^2(B_{k_j})) \right)}
\end{aligned}$$

- Es ist also noch zu zeigen, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{m_k} \left( 1 + \int_{B_{k_j}} \lambda_\theta(u, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) du + g_\theta^{-1}(\mathbf{x}) O(\nu_d^2(B_{k_j})) \right) = \exp\left( \int_W \lambda_\theta(u, \mathbf{x}) du \right)$$

bzw.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{m_k} \log\left( 1 + \int_{B_{k_j}} \lambda_\theta(u, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) du + g_\theta^{-1}(\mathbf{x}) O(\nu_d^2(B_{k_j})) \right) = \int_W \lambda_\theta(u, \mathbf{x}) du.$$

- Dies ergibt sich aus den folgenden Überlegungen:

- Es gilt  $\log(1+x) = x + O(x^2)$  für  $x \rightarrow 0$ , und aus (153) ergibt sich, dass  $\lambda_\theta(u, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) \leq \text{const} < \infty$  für jedes  $u \in W$  und somit

$$\int_{B_{k_j}} \lambda_\theta(u, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) du = O(\nu_d(B_{k_j})).$$

- Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{m_k} \log\left( 1 + \int_{B_{k_j}} \lambda_\theta(u, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) du + g_\theta^{-1}(\mathbf{x}) O(\nu_d^2(B_{k_j})) \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^{m_k} \int_{B_{k_j}} \lambda_\theta(u, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) du + \sum_{j=1}^{m_k} O(\nu_d^2(B_{k_j})) \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^{m_k} \int_{B_{k_j}} \lambda_\theta(u, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_j}}) du + O(m_k \Delta_k^2) \right) = \int_W \lambda_\theta(u, \mathbf{x}) du.
\end{aligned}$$

- Dabei ergibt sich die letzte Gleichheit aus (154) und aus der Tatsache, dass wegen (157) für jedes  $k \geq k_0$  genau  $m_k - n$  Glieder der Folge  $\lambda_\theta(u, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_1}}) \dots \lambda_\theta(u, \mathbf{x}_{W \setminus B_{k_{m_k}}})$  mit  $\lambda_\theta(u, \mathbf{x})$  übereinstimmen.  $\square$

### 3.5.5 Maximum–Pseudolikelihood–Schätzer; Exponentialfamilien

Wenn das Punktmuster  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset W$  beobachtet wird, dann sagt man, dass durch den Ansatz

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \operatorname{PL}(\mathbf{x}; \theta) \quad (159)$$

ein *Maximum–Pseudolikelihood–Schätzer*  $\hat{\theta}$  für  $\theta$  gegeben ist, wobei  $\operatorname{PL} : \mathbb{N}^{(e)} \times \Theta \rightarrow [0, \infty)$  die in (155) bzw. (156) eingeführte Pseudolikelihood–Funktion ist.

#### Beachte

- Wenn  $f_\theta(\mathbf{x})$  die Dichte eines (inhomogenen) Poisson–Prozesses ist,
  - dann hängt die bedingte Intensität  $\lambda_\theta(u, \mathbf{x})$  nur von  $u$ , jedoch nicht von  $\mathbf{x}$  ab,
  - und die in (155) bzw. (156) eingeführte Pseudolikelihood–Funktion stimmt mit der Likelihood–Funktion  $L(\mathbf{x}; \theta) = f_\theta(\mathbf{x})$  des Poisson–Prozesses überein.
- Bei Gibbs–Prozessen mit schwachen Wechselwirkungen zwischen den Punkten kann also davon ausgegangen werden, dass sich der Maximum–Likelihood–Schätzer und der in (159) eingeführte Maximum–Pseudolikelihood–Schätzer für  $\theta$  nur wenig voneinander unterscheiden.
- Ein wesentlicher Vorteil der Pseudolikelihood–Funktion  $\operatorname{PL}(\mathbf{x}; \theta)$  besteht jedoch darin,
  - dass sie nicht von der unbekanntem Normierungskonstante  $e^{V_0}$  abhängt
  - und dass sich die Pseudolikelihood–Funktion  $\operatorname{PL}(\mathbf{x}; \theta)$  deshalb leichter als die Likelihood–Funktion  $L(\mathbf{x}; \theta) = f_\theta(\mathbf{x})$  berechnen und maximieren lässt.
- Außerdem kann man zeigen, dass der in (159) eingeführte Maximum–Pseudolikelihood–Schätzer für eine große Klasse von parametrischen Gibbs–Prozessen nützliche (Güte–) Eigenschaften wie Konsistenz bzw. asymptotische Normalverteiltheit besitzt.
- In manchen Fällen lässt sich der in (159) eingeführte Maximum–Pseudolikelihood–Schätzwert  $\hat{\theta}(\mathbf{x})$  für  $\theta$  als Lösung der so genannten *Pseudolikelihood–Gleichungen*

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log \operatorname{PL}(\mathbf{x}; \theta) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (160)$$

darstellen, wobei sich aus (156) ergibt, dass

$$\log \operatorname{PL}(\mathbf{x}; \theta) = \sum_{i=1}^n \log \lambda_\theta(x_i, \mathbf{x} \setminus \{x_i\}) - \int_W \lambda_\theta(u, \mathbf{x}) du. \quad (161)$$

- Wenn zusätzlich angenommen wird, dass

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \int_W \lambda_\theta(u, \mathbf{x}) du = \int_W \frac{\partial}{\partial \theta_i} \lambda_\theta(u, \mathbf{x}) du \quad \forall i = 1, \dots, m, \theta \in \Theta, \quad (162)$$

dann ist das System der Pseudolikelihood–Gleichungen in (160) äquivalent mit

$$\int_W \frac{\partial}{\partial \theta_i} \lambda_\theta(u, \mathbf{x}) du = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log \lambda_\theta(x_j, \mathbf{x} \setminus \{x_j\}) \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (163)$$

#### Beispiele

##### 1. Strauss–Prozess

- Sei  $\theta = (a, b, R)$ , wobei  $a > 0$ ,  $b \in [0, \infty]$  und  $R > 0$ , und für jedes  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset W$  sei

$$f_\theta(\mathbf{x}) = c a^{|\mathbf{x}|} \exp(-b t_R(\mathbf{x})), \quad (164)$$

wobei  $t_R(\mathbf{x})$  die Anzahl aller Punktpaare von  $\mathbf{x}$  bezeichnet, deren Abstand kleiner als  $R$  ist.

- Für die bedingte Intensität  $\lambda_\theta(u, \mathbf{x})$  gilt dann

$$\lambda_\theta(u, \mathbf{x}) = a \exp(-b(t_R(\mathbf{x} \cup \{u\}) - t_R(\mathbf{x}))) \quad \forall u \notin \mathbf{x}. \quad (165)$$

- Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (161) für die Log-Pseudolikelihood-Funktion  $\log \text{PL}(\mathbf{x}; \theta)$ , dass

$$\begin{aligned} \log \text{PL}(\mathbf{x}; \theta) &= \sum_{i=1}^{|\mathbf{x}|} (\log a - b t_R(x_i, \mathbf{x} \setminus \{x_i\})) - a \int_W \exp(-b t_R(u, \mathbf{x})) du \\ &= |\mathbf{x}| \log a - 2b t_R(\mathbf{x}) - a \int_W \exp(-b t_R(u, \mathbf{x})) du, \end{aligned}$$

wobei  $t_R(u, \mathbf{x})$  die Anzahl derjenigen Punkte von  $\mathbf{x}$  bezeichnet, deren Abstand von  $u$  nicht größer als  $R$  ist.

- Wenn der Wechselwirkungsradius  $R > 0$  gegeben ist, dann kann der Maximum-Pseudolikelihood-Schätzer  $(\hat{a}, \hat{b})$  für  $(a, b)$  als Lösung des Gleichungssystems

$$\frac{\partial}{\partial a} \log \text{PL}(\mathbf{x}; a, b, R) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b} \log \text{PL}(\mathbf{x}; a, b, R) = 0$$

bestimmt werden, wobei

$$\frac{\partial}{\partial a} \log \text{PL}(\mathbf{x}; a, b, R) = \frac{|\mathbf{x}|}{a} - \int_W \exp(-b t_R(u, \mathbf{x})) du$$

und

$$\frac{\partial}{\partial b} \log \text{PL}(\mathbf{x}; a, b, R) = 2 t_R(\mathbf{x}) + a \int_W t_R(u, \mathbf{x}) \exp(-b t_R(u, \mathbf{x})) du.$$

- Der Maximum-Pseudolikelihood-Schätzwert  $(\hat{a}(\mathbf{x}), \hat{b}(\mathbf{x}))$  für  $(a, b)$  ist also gegeben durch

$$\hat{a}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| / \int_W \exp(-\hat{b}(\mathbf{x}) t_R(u, \mathbf{x})) du,$$

wobei  $\hat{b}(\mathbf{x})$  Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$\int_W \exp(-\hat{b}(\mathbf{x}) t_R(u, \mathbf{x})) du = \frac{|\mathbf{x}|}{2 t_R(\mathbf{x})} \int_W t_R(u, \mathbf{x}) \exp(-\hat{b}(\mathbf{x}) t_R(u, \mathbf{x})) du.$$

## 2. Geyerscher Sättigungsprozess

- Sei  $\theta = (a, b, m, R)$ , wobei  $a > 0$ ,  $b \in (-\infty, \infty]$  und  $m, R > 0$  beliebige Zahlen sind, und für jedes  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset W$  sei

$$f_\theta(\mathbf{x}) = c a^{|\mathbf{x}|} \exp\left(-b \sum_{i=1}^{|\mathbf{x}|} \min\{m, t_R(x_i, \mathbf{x} \setminus \{x_i\})\}\right). \quad (166)$$

wobei  $t_R(x_i, \mathbf{x} \setminus \{x_i\})$  die Anzahl derjenigen Punkte von  $\mathbf{x} \setminus \{x_i\}$  bezeichnet, deren Abstand von  $x_i$  nicht größer als  $R$  ist.

- Für die bedingte Intensität  $\lambda_\theta(u, \mathbf{x})$  gilt dann

$$\lambda_\theta(u, \mathbf{x}) = a \exp(-b(t_{m,R}(\mathbf{x} \cup \{u\}) - t_{m,R}(\mathbf{x}))) \quad \forall u \notin \mathbf{x}, \quad (167)$$

wobei

$$t_{m,R}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{|\mathbf{x}|} \min\{m, t_R(x_i, \mathbf{x} \setminus \{x_i\})\}.$$

- Wenn  $m$  und  $R$  gegeben sind, dann kann der Maximum–Pseudolikelihood–Schätzwert  $(\hat{a}(\mathbf{x}), \hat{b}(\mathbf{x}))$  für  $(a, b)$  auf ähnliche Weise wie in Beispiel 1 als Lösung der Pseudolikelihood–Gleichungen (163) bestimmt werden.

### 3. Exponentialfamilien

- Wir betrachten nun noch eine allgemeinere Klasse von Gibbs–Prozessen, die den Strauss–Prozess und den Geyerschen Sättigungsprozess als Spezialfälle enthält. Dabei nehmen wir an, dass die bedingte Intensität  $\lambda_\theta : W \times \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  des Gibbs–Prozesses zu einer so genannten *Exponentialfamilie* gehört, d.h., es gelte

$$\lambda_\theta(u, \mathbf{x}) = \exp(\xi^\top Z_1(u) + \zeta^\top Z_2(u, \mathbf{x})) \quad \forall u \in W, \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}, \quad (168)$$

– wobei  $\xi \in \mathbb{R}^{m_1}$  und  $\zeta \in \mathbb{R}^{m_2}$  zwei Teilvektoren eines (unbekannten) Parametervektors

$$\theta = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \in \Theta \subset \mathbb{R}^{m_1+m_2}$$

sind, der aus den beobachteten (Bild–) Daten  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}$  geschätzt werden soll,

- und  $Z_1 : W \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$  und  $Z_2 : W \times \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$  (vektorwertige) Stichprobenfunktionen sind, durch die beispielsweise ein „räumlicher Trend“ bzw. Wechselwirkungen zwischen den Punkten modelliert werden können.
- Aus (168) ergibt sich dann mit Hilfe der Umkehrformel (148) für die bedingte Intensität, dass die Dichte  $f_\theta : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  des Gibbs–Prozesses gegeben ist durch

$$f_\theta(\mathbf{x}) = c_\theta \exp(\zeta^\top Z(\mathbf{x})) \prod_{i=1}^{|\mathbf{x}|} \exp(\xi^\top Z_1(x_i)) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}, \theta \in \Theta, \quad (169)$$

wobei  $Z(\mathbf{x}) = Z_2(x_1, \emptyset) + Z_2(x_2, \{x_1\}) + \dots + Z_2(x_n, \{x_1, \dots, x_{n-1}\})$ .

- Die in den Beispielen 1 und 2 betrachteten Gibbs–Prozesse ergeben sich dabei als Spezialfälle.
  - Für  $m_1 = m_2 = 1$  und  $Z_1(u) \equiv 1$  bzw.  $Z_2(u, \mathbf{x}) = -(t_R(\mathbf{x} \cup \{u\}) - t_R(\mathbf{x}))$  ergibt sich insbesondere der Strauss–Prozess, wobei  $a = \log \xi$  für  $\xi > 0$  und  $b = \zeta$ .
  - Für  $m_1 = m_2 = 1$  und  $Z_1(u) \equiv 1$  bzw.  $Z_2(u, \mathbf{x}) = -(t_{m,R}(\mathbf{x} \cup \{u\}) - t_{m,R}(\mathbf{x}))$  ergibt sich der Geyersche Sättigungsprozess, wobei  $a = \log \xi$  für  $\xi > 0$  und  $b = \zeta$ .

### Beachte

- Bei der Maximierung der logarithmierten Pseudolikelihood–Funktion

$$\log \text{PL}(\mathbf{x}; \theta) = \sum_{i=1}^{|\mathbf{x}|} \log \lambda_\theta(x_i, \mathbf{x} \setminus \{x_i\}) - \int_W \lambda_\theta(u, \mathbf{x}) du \quad (170)$$

wird das Integral  $\int_W \lambda_\theta(u, \mathbf{x}) du$  in (170) durch eine endliche (Integral–) Summe approximiert.

- D.h., wir betrachten die Approximation

$$\int_W \lambda_\theta(u, \mathbf{x}) du \approx \sum_{j=1}^k \lambda_\theta(u_j, \mathbf{x} \setminus \{u_j\}) w_j \quad (171)$$

für eine Menge  $\{u_1, \dots, u_k\} \subset W$  von „Quadraturpunkten“ mit den zugehörigen „Quadraturgewichten“  $w_1, \dots, w_k > 0$ , wobei  $k \geq 1$  eine beliebige natürliche Zahl ist.

- Das Quadraturschema in (171) sollte natürlich so gewählt werden, dass das Integral  $\int_W \lambda_\theta(u, \mathbf{x}) du$  möglichst gut approximiert wird.

- Darüber hinaus ist es wegen der Summe auf der rechten Seite von (170) zweckmäßig, dass sämtliche Datenpunkte in der Menge der Quadraturpunkte enthalten sind, d.h.,

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset \{u_1, \dots, u_k\}.$$

- Dann kann die in (170) betrachtete Log-Pseudolikelihood-Funktion näherungsweise dargestellt werden in der Form

$$\log \text{PL}(\mathbf{x}; \theta) \approx \sum_{j=1}^k \left( z_j \log \lambda_\theta(u_j, \mathbf{x} \setminus \{u_j\}) - w_j \lambda_\theta(u_j, \mathbf{x} \setminus \{u_j\}) \right) = \sum_{j=1}^k w_j (y_j \log \lambda_j - \lambda_j), \quad (172)$$

wobei

$$z_j = \mathbb{1}_{\{x_1, \dots, x_n\}}(u_j), \quad y_j = \frac{z_j}{w_j}, \quad \lambda_j = \lambda_\theta(u_j, \mathbf{x} \setminus \{u_j\}) \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

- Bei der Maximierung des letzten Ausdrucks in (172) ist es nützlich zu beachten,
  - dass dieser Ausdruck die gleiche Form besitzt wie der gewichtete Loglikelihood von  $k$  unabhängigen poissonverteilten Stichprobenvariablen  $Y_1, \dots, Y_k$  mit den Erwartungswerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  und den (beobachteten) Realisierungen  $[y_1], \dots, [y_k]$ .
  - Unter der Annahme, dass für die bedingte Intensität  $\lambda_\theta(u, \mathbf{x})$  des betrachteten Gibbs-Prozesses die Darstellungformel (168) gilt, d.h.,

$$\log \lambda_j = \xi^\top Z_1(u_j) + \zeta^\top Z_2(u_j, \mathbf{x} \setminus \{u_j\}) \quad \forall j = 1, \dots, k,$$

ergibt sich nämlich dann mit  $g(x) = \log x$ , dass

$$\begin{aligned} (g(\mathbb{E} Y_1), \dots, g(\mathbb{E} Y_k)) &= (\xi^\top Z_1(u_1) + \zeta^\top Z_2(u_1, \mathbf{x} \setminus \{u_1\}), \dots, \xi^\top Z_1(u_k) + \zeta^\top Z_2(u_k, \mathbf{x} \setminus \{u_k\})) \\ &= \theta^\top \mathbf{X}, \end{aligned}$$

- wobei  $\theta^\top = (\xi^\top, \zeta^\top)$  und die „Designmatrix“  $\mathbf{X}$  gegeben ist durch

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} Z_1(u_1) & \dots & Z_1(u_k) \\ Z_2(u_1, \mathbf{x} \setminus \{u_1\}) & \dots & Z_2(u_k, \mathbf{x} \setminus \{u_k\}) \end{pmatrix}.$$

- Die Maximierung des Ausdrucks  $\sum_{j=1}^k w_j (y_j \log \lambda_j - \lambda_j)$  in (172) lässt sich deshalb auf ein klassisches Schätzproblem der parametrischen Statistik zurückführen, und zwar auf die Bestimmung des (gewichteten) Maximum-Likelihood-Schätzers  $\hat{\theta}$  für  $\theta$  in dem verallgemeinerten linearen Modell  $(Y_1, \dots, Y_k)$  mit der „Linkfunktion“  $g(x) = \log x$ .

### 3.6 Markov-Ketten von Gibbs-Prozessen

- Wir betrachten nun einen Algorithmus zur Monte-Carlo-Simulation von Gibbs-Prozessen,
  - der auf der Konstruktion einer Markov-Kette beruht, die ihre Werte im Raum  $(\mathbb{N}^{(e)}, \mathcal{N}^{(e)})$  der endlichen Zählmaße annimmt, wobei  $\mathcal{N}^{(e)} = \mathcal{N} \cap \mathbb{N}^{(e)}$ ,
  - so dass die ergodische (Grenz-) Verteilung dieser Markov-Kette mit der Verteilung des zu simulierenden Gibbs-Prozesses übereinstimmt.
- Für parametrische Familien  $\{f_\theta, \theta \in \Theta\}$  von Gibbs-Dichten wird diese Methode des *Markov-Chain-Monte-Carlo* (MCMC) dann in Abschnitt 3.6.4 bei der approximativen Bestimmung eines Maximum-Likelihood-Schätzers  $\hat{\theta}$  für  $\theta$  angewendet.

### 3.6.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

In diesem Abschnitt führen wir zunächst den Begriff der Markov-Kette mit allgemeinem Zustandsraum ein und geben Bedingungen für ihre Ergodizität an.

- Sei  $\alpha : \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, 1]$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß über  $(\mathbb{N}^{(e)}, \mathcal{N}^{(e)})$ , und sei  $\mathbf{P} : \mathbb{N}^{(e)} \times \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, 1]$  ein *stochastischer Kern*, d.h.,
  - für jedes  $A \in \mathcal{N}^{(e)}$  sei  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{P}(\mathbf{x}, A)$  eine  $(\mathcal{N}^{(e)}, \mathcal{B}([0, 1]))$ -messbare Funktion,
  - und für jedes  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}$  sei  $A \mapsto \mathbf{P}(\mathbf{x}, A)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß über  $(\mathbb{N}^{(e)}, \mathcal{N}^{(e)})$ .
- Sei  $X_0, X_1, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^{(e)}$  eine Folge von Zufallsvariablen über einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , die ihre Werte im Raum  $\mathbb{N}^{(e)}$  der endlichen Zählmaße annehmen.
- Man sagt, dass  $X_0, X_1, \dots$  eine (homogene) *Markov-Kette* mit der *Anfangsverteilung*  $\alpha$  und dem *Übergangskern*  $\mathbf{P}$  ist, wenn

$$P(X_0 \in A_0, X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \int_{A_0} \int_{A_1} \dots \int_{A_n} \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n-1}, d\mathbf{x}_n) \dots \mathbf{P}(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}_1) \alpha(d\mathbf{x}_0) \quad (173)$$

für beliebige  $n \geq 0$  und  $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{N}^{(e)}$ .

#### Beachte

- Sei  $(D, \mathcal{D})$  ein beliebiger messbarer Raum, und sei  $Z, Z_1, Z_2, \dots : \Omega \rightarrow D$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen über  $(D, \mathcal{D})$ . Außerdem sei  $X_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^{(e)}$  eine Zufallsvariable, die von  $Z_1, Z_2, \dots$  unabhängig ist, und  $\phi : \mathbb{N}^{(e)} \times D \rightarrow \mathbb{N}^{(e)}$  sei eine beliebige messbare Funktion.
- Dann kann man sich leicht überlegen, dass  $X_0, X_1, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^{(e)}$  mit

$$X_n = \phi(X_{n-1}, Z_n) \quad \forall n \geq 1 \quad (174)$$

eine Markov-Kette ist, deren Übergangskern  $\mathbf{P} : \mathbb{N}^{(e)} \times \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, 1]$  gegeben ist durch

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, A) = P(\omega \in \Omega : \phi(\mathbf{x}, Z(\omega)) \in A) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}, A \in \mathcal{N}^{(e)}. \quad (175)$$

Im Zusammenhang mit der Simulation von Gibbs-Prozessen werden wir vor allem Markov-Ketten  $X_0, X_1, \dots$  betrachten, für die die Verteilung von  $X_n$  gegen eine Grenzverteilung konvergiert, wenn  $n \rightarrow \infty$ .

#### Definition

- Sei  $X_0, X_1, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^{(e)}$  eine Markov-Kette mit dem Übergangskern  $\mathbf{P} : \mathbb{N}^{(e)} \times \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, 1]$ .
- Die Markov-Kette  $X_0, X_1, \dots$  heißt *ergodisch*, wenn es für jedes Anfangsverteilung  $\alpha : \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, 1]$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\Pi : \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, 1]$  über  $(\mathbb{N}^{(e)}, \mathcal{N}^{(e)})$  gibt, das nicht von  $\alpha$  abhängt, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in A) = \Pi(A) \quad \forall A \in \mathcal{N}^{(e)}. \quad (176)$$

**Theorem 3.29** Sei  $X_0, X_1, \dots$  eine Markov-Kette mit dem Übergangskern  $\mathbf{P}$ . Die Markov-Kette  $X_0, X_1, \dots$  ist genau dann ergodisch, wenn für jedes  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{x}, A) = \Pi(A) \quad \forall A \in \mathcal{N}^{(e)}, \quad (177)$$

wobei  $\Pi : \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, 1]$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, das nicht von  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}$  abhängt, und

$$\mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{x}, A) = \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \dots \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n-1}, A) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n-2}, d\mathbf{x}_{n-1}) \dots \mathbf{P}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}_1). \quad (178)$$

**Beweis**

- Die Notwendigkeit der Bedingung (177) ergibt sich unmittelbar aus der Definitionsgleichung (176), wenn  $\alpha = \delta_{\mathbf{x}}$  gesetzt wird.
- Umgekehrt ergibt sich aus (177) und (178) mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{x}, A) \alpha(d\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{x}, A) \alpha(d\mathbf{x}) = \Pi(A) \quad \forall A \in \mathcal{N}^{(e)}$$

für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\alpha : \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, 1]$ .

- Hieraus und aus (173) bzw. (178) ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in A) &\stackrel{(173)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \dots \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n-1}, A) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n-2}, d\mathbf{x}_{n-1}) \dots \mathbf{P}(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}_1) \alpha(d\mathbf{x}_0) \\ &\stackrel{(178)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{x}, A) \alpha(d\mathbf{x}) = \Pi(A). \end{aligned} \quad \square$$

**Beachte**

- Man kann sich leicht überlegen, dass für die in (178) eingeführten  $n$ -stufigen Übergangskerne  $\mathbf{P}^{(n)}$  die so genannte *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* gilt:

$$\mathbf{P}^{(n+m)}(\mathbf{x}, A) = \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{y}, A) \mathbf{P}^{(m)}(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) \quad \forall A \in \mathcal{N}^{(e)}, n, m \geq 1. \quad (179)$$

- Für das in (176) bzw. (177) betrachtete Wahrscheinlichkeitsmaß  $\Pi : \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, 1]$  von ergodischen Markov-Ketten gilt

$$\Pi(A) = \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbf{P}(\mathbf{y}, A) \Pi(d\mathbf{y}) \quad \forall A \in \mathcal{N}^{(e)}, \quad (180)$$

denn aus (177) und (178) ergibt sich, dass für  $\alpha$ -fast jedes  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}$

$$\begin{aligned} \Pi(A) &\stackrel{(177)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{x}, A) \\ &\stackrel{(178)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \dots \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n-1}, A) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n-2}, d\mathbf{x}_{n-1}) \dots \mathbf{P}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}_1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbf{P}(\mathbf{y}, A) \mathbf{P}^{(n-1)}(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbf{P}(\mathbf{y}, A) \Pi(d\mathbf{y}). \end{aligned}$$

- Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\alpha : \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, 1]$ , das eine Lösung der *Fixpunkt-Gleichung*

$$\alpha(A) = \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbf{P}(\mathbf{y}, A) \alpha(d\mathbf{y}) \quad \forall A \in \mathcal{N}^{(e)} \quad (181)$$

ist, heißt *stationäre Anfangsverteilung* der Markov-Kette mit dem Übergangskern  $\mathbf{P}$ .

- Wegen (180) ist also die (Grenz-) Verteilung  $\Pi$  in (176) bzw. (177) einer ergodischen Markov-Kette gleichzeitig eine stationäre Anfangsverteilung dieser Markov-Kette, und außer  $\Pi$  gibt es dann keine weiteren stationären Anfangsverteilungen.
  - Es gibt jedoch Beispiele von Übergangskernen  $\mathbf{P}$  und Wahrscheinlichkeitsmaßen  $\alpha : \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, 1]$ , die Lösung der Fixpunkt-Gleichung (181) sind, so dass  $\mathbf{P}$  *nicht* ergodisch im Sinne von (176) bzw. (177) ist.
  - Mit anderen Worten: Es gibt stationäre Anfangsverteilungen von (nicht ergodischen) Markov-Ketten, die sich *nicht* als Grenzverteilung im Sinne von (176) bzw. (177) darstellen lassen.

Wir betrachten nun noch den Begriff der *Reversibilität* von Markov-Ketten, der eine weitere grundlegende Eigenschaft für diese Klasse stochastischer Prozesse ist.

### Definition

- Sei  $X_0, X_1, \dots$  eine Markov-Kette mit der Anfangsverteilung  $\alpha$  und dem Übergangskern  $\mathbf{P}$ .
- Man sagt, dass das Paar  $(\alpha, \mathbf{P})$  *reversibel* ist, wenn für beliebige  $n \geq 0$  und  $m \geq 1$  die Zufallsvektoren  $(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$  und  $(X_{n+m}, X_{n+m-1}, \dots, X_n)$  die gleiche Verteilung besitzen.

### Theorem 3.30

- Sei  $X_0, X_1, \dots$  eine Markov-Kette mit der Anfangsverteilung  $\alpha$  und dem Übergangskern  $\mathbf{P}$ .
- Das Paar  $(\alpha, \mathbf{P})$  ist genau dann reversibel, wenn

$$\int_A \mathbf{P}(\mathbf{x}, A') \alpha(d\mathbf{x}) = \int_{A'} \mathbf{P}(\mathbf{x}, A) \alpha(d\mathbf{x}) \quad \forall A, A' \in \mathcal{N}^{(e)}, \quad (182)$$

d.h., wenn die Zufallsvektoren  $(X_0, X_1)$  und  $(X_1, X_0)$  die gleiche Verteilung besitzen.

- Wenn das Paar  $(\alpha, \mathbf{P})$  reversibel ist, dann ist  $\alpha$  eine stationäre Anfangsverteilung der Markov-Kette  $\{X_n\}$  mit dem Übergangskern  $\mathbf{P}$ .

### Beweis

- Die Notwendigkeit der Bedingung (182) ist offensichtlich, denn aus der Definitionsgleichung (173) von Markov-Ketten und aus  $(X_0, X_1) \stackrel{D}{=} (X_1, X_0)$  ergibt sich, dass für beliebige  $A, A' \in \mathcal{N}^{(e)}$

$$\int_A \mathbf{P}(\mathbf{x}, A') \alpha(d\mathbf{x}) \stackrel{(173)}{=} P(X_0 \in A, X_1 \in A') = P(X_1 \in A, X_0 \in A') \stackrel{(173)}{=} \int_{A'} \mathbf{P}(\mathbf{x}, A) \alpha(d\mathbf{x}).$$

- Umgekehrt ergibt sich aus (182), dass für jedes  $A \in \mathcal{N}^{(e)}$

$$P(X_1 \in A) = P(X_1 \in A, X_0 \in \mathbb{N}^{(e)}) = \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbf{P}(\mathbf{x}, A) \alpha(d\mathbf{x}) \stackrel{(182)}{=} \int_A \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbb{N}^{(e)}) \alpha(d\mathbf{x}) = \alpha(A),$$

d.h.,  $\alpha$  ist eine stationäre Anfangsverteilung, wenn das Paar  $(\alpha, \mathbf{P})$  reversibel ist.

- Somit gilt  $\alpha(A) = P(X_n \in A)$  für beliebige  $n \geq 0$  und  $A \in \mathcal{N}^{(e)}$ .
- Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (173) und (182), dass für beliebige  $n \geq 0$  und  $m \geq 1$  und für beliebige  $A_n, \dots, A_{n+m} \in \mathcal{N}^{(e)}$

$$\begin{aligned} & P(X_n \in A_n, \dots, X_{n+m} \in A_{n+m}) \\ & \stackrel{(173)}{=} \int_{A_n} \int_{A_{n+1}} \dots \int_{A_{n+m}} \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n+m-1}, d\mathbf{x}_{n+m}) \dots \mathbf{P}(\mathbf{x}_n, d\mathbf{x}_{n+1}) \alpha(d\mathbf{x}_n) \\ & = \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \dots \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbb{1}_{A_n \times \dots \times A_{n+m}}(\mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{x}_{n+m}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n+m-1}, d\mathbf{x}_{n+m}) \dots \mathbf{P}(\mathbf{x}_n, d\mathbf{x}_{n+1}) \alpha(d\mathbf{x}_n) \\ & \stackrel{(182)}{=} \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \dots \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbb{1}_{A_n \times \dots \times A_{n+m}}(\mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{x}_{n+m}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n+m-1}, d\mathbf{x}_{n+m}) \\ & \quad \dots \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n+1}, d\mathbf{x}_n) \alpha(d\mathbf{x}_{n+1}) \\ & \quad \vdots \\ & \stackrel{(182)}{=} \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \dots \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \mathbb{1}_{A_n \times \dots \times A_{n+m}}(\mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{x}_{n+m}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n+1}, d\mathbf{x}_n) \\ & \quad \dots \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n+m}, d\mathbf{x}_{n+m-1}) \alpha(d\mathbf{x}_{n+m}) \\ & \stackrel{(173)}{=} P(X_n \in A_{n+m}, \dots, X_{n+m} \in A_n) = P(X_{n+m} \in A_n, \dots, X_n \in A_{n+m}), \end{aligned}$$

d.h.,  $(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$  und  $(X_{n+m}, X_{n+m-1}, \dots, X_n)$  besitzen die gleiche Verteilung.  $\square$

### 3.6.2 Harris–Rekurrenz und Drift–Kriterien für Ergodizität

Um hinreichende (relativ leicht nachprüfbare) Bedingungen für die Ergodizität einer Markov–Kette mit dem Übergangskern  $\mathbf{P}$  formulieren zu können, benötigen wir die folgenden Begriffe.

#### Definitionen

- Für beliebige  $A \in \mathcal{N}^{(e)}$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)} \setminus A$  ist die *Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit*  $L(\mathbf{x}, A)$  der Menge  $A$  ausgehend von  $\mathbf{x}$  gegeben durch

$$L(\mathbf{x}, A) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, A) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A^c} \int_{A^c} \cdots \int_{A^c} \mathbf{P}(\mathbf{x}_n, A) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n-1}, d\mathbf{x}_n) \cdots \mathbf{P}(\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2) \mathbf{P}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}_1), \quad (183)$$

wobei  $L(\mathbf{x}, A) = 1$  für  $A \in \mathcal{N}^{(e)}$  und  $\mathbf{x} \in A$  gesetzt wird.

- Sei  $\eta : \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty]$  ein beliebiges Maß mit  $\eta(\mathbb{N}^{(e)}) > 0$ . Mit Hilfe von  $\eta$  kann die Familie  $\mathcal{N}^{(e)}$  der messbaren Teilmengen des Zustandsraumes  $\mathbb{N}^{(e)}$  zerlegt werden
  - in *wesentliche* Teilmengen  $A \in \mathcal{N}^{(e)}$ , für die  $\eta(A) > 0$  gilt, und
  - in *unwesentliche* Teilmengen  $A \in \mathcal{N}^{(e)}$  mit  $\eta(A) = 0$ .
- Eine Markov–Kette mit dem Übergangskern  $\mathbf{P}$  heißt  *$\eta$ –irreduzibel*, wenn

$$L(\mathbf{x}, A) > 0 \quad \forall A \in \mathcal{N}^{(e)} \text{ mit } \eta(A) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}. \quad (184)$$

- *Beachte.* Man kann sich leicht überlegen, dass (184) genau dann gilt, wenn es für beliebige  $A \in \mathcal{N}^{(e)}$  mit  $\eta(A) > 0$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}$  eine Zahl  $n \geq 0$  gibt, so dass

$$\mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{x}, A) > 0, \quad (185)$$

- wobei  $\mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{x}, A)$  für  $n \geq 1$  die in (178) eingeführte  $n$ –stufige Übergangswahrscheinlichkeit von  $\mathbf{x}$  nach  $A$  ist und  $\mathbf{P}^{(0)}(\mathbf{x}, A) = \mathbf{1}_A(\mathbf{x})$  gesetzt wird.

- Die Menge  $C \subset \mathbb{N}^{(e)}$  heißt  *$\eta$ –klein*, wenn es ein  $n \geq 1$  gibt, so dass

$$\mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{x}, A) \geq \eta(A) \quad \forall \mathbf{x} \in C, A \in \mathcal{N}^{(e)}. \quad (186)$$

- Eine Markov–Kette mit dem Übergangskern  $\mathbf{P}$  heißt *Harris–rekurrent*,
  - wenn es ein Maß  $\eta : \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\eta(\mathbb{N}^{(e)}) > 0$  gibt,
  - so dass die Markov–Kette  $\eta$ –irreduzibel ist und

$$L(\mathbf{x}, A) = 1 \quad \forall A \in \mathcal{N}^{(e)} \text{ mit } \eta(A) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}. \quad (187)$$

#### Beachte

- Der Begriff der Harris–Rekurrenz hängt eng mit der in (176) bzw. (177) eingeführten Ergodizität von Markov–Ketten zusammen.
  - Und zwar gilt für jede Harris–rekurrente Markov–Kette  $X_0, X_1, \dots$  mit dem Übergangskern  $\mathbf{P}$ , so dass die Fixpunkt–Gleichung (181) eine (eindeutig bestimmte) Wahrscheinlichkeitslösung  $\Pi$  besitzt, die folgende (abgeschwächte) Version von (176):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(X_k \in A) = \Pi(A) \quad \forall A \in \mathcal{N}^{(e)}, \quad (188)$$

- wobei  $\Pi$  nicht von der Anfangsverteilung  $\alpha$  der Markov–Kette  $X_0, X_1, \dots$  abhängt.

- Wenn zusätzlich noch vorausgesetzt wird, dass die Harris–rekurrente Markov–Kette  $X_0, X_1, \dots$  mit dem Übergangskern  $\mathbf{P}$  aperiodisch ist, dann gilt (176) bzw. sogar eine wesentlich stärkere Version dieser Definitionsgleichung für die Ergodizität von Markov–Ketten, vgl. Theorem 3.31.

- Dabei sagt man, dass die  $\eta$ -irreduzible Markov-Kette  $\{X_n\}$  mit dem Übergangskern  $\mathbf{P}$  *periodisch* (mit der Periode  $\ell > 1$ ) ist, wenn sich der Zustandsraum  $\mathbb{N}^{(e)}$  in  $\ell+1$  Teilmengen  $A_0, \dots, A_{\ell-1} \in \mathcal{N}^{(e)}$  zerlegen lässt, so dass  $\eta(A_\ell) = 0$  und für jedes  $i \in \{0, \dots, \ell-1\}$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, A_j) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in A_i, \quad \forall j = (i+1) \pmod{\ell}. \quad (189)$$

- Ansonsten heißt die  $\eta$ -irreduzible Markov-Kette  $\{X_n\}$  mit dem Übergangskern  $\mathbf{P}$  *aperiodisch*.

Um das folgende Resultat formulieren zu können, benötigen wir eine Metrik, die den so genannten Variationsabstand zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen beschreibt.

### Definition

- Seien  $Q_1, Q_2$  endliche (nicht notwendig normierte) Maße über  $\mathcal{N}^{(e)}$ . Der *Variationsabstand*  $\|Q_1 - Q_2\|$  zwischen  $Q_1$  und  $Q_2$  ist gegeben durch

$$\|Q_1 - Q_2\| = \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{A \in \mathcal{Z}} |Q_1(A) - Q_2(A)|, \quad (190)$$

- wobei sich das Supremum in (190) über alle Zerlegungen  $\mathcal{Z}$  der Menge  $\mathbb{N}^{(e)}$  in endlich viele, paarweise disjunkte Teilmengen aus  $\mathcal{N}^{(e)}$  erstreckt.
- Beachte: Es gilt

$$\|Q_1 - Q_2\| \leq 2 \sup_{A \in \mathcal{N}^{(e)}} |Q_1(A) - Q_2(A)|, \quad (191)$$

denn aus der Definitionsgleichung (190) des Variationsabstandes  $\|Q_1 - Q_2\|$  ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \|Q_1 - Q_2\| &= \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{A \in \mathcal{Z}} |Q_1(A) - Q_2(A)| \\ &= \sup_{A \in \mathcal{N}^{(e)}: Q_1(A) \geq Q_2(A)} (Q_1(A) - Q_2(A)) + \sup_{A \in \mathcal{N}^{(e)}: Q_1(A) < Q_2(A)} (Q_2(A) - Q_1(A)) \\ &\leq 2 \sup_{A \in \mathcal{N}^{(e)}} |Q_1(A) - Q_2(A)|. \end{aligned}$$

### Theorem 3.31

- Sei  $X_0, X_1, \dots$  eine Markov-Kette mit dem Übergangskern  $\mathbf{P}$ , so dass die Fixpunkt-Gleichung (181) eine Wahrscheinlichkeitslösung  $\Pi$  besitzt.
- Die Markov-Kette  $X_0, X_1, \dots$  ist genau dann Harris-rekurrent, wenn für jede Anfangsverteilung  $\alpha$  und für jede messbare Funktion  $h: \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\int_{\mathbb{N}^{(e)}} |h(\mathbf{x})| \Pi(d\mathbf{x}) < \infty$  die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) = \int_{\mathbb{N}^{(e)}} h(\mathbf{x}) \Pi(d\mathbf{x}) \quad (192)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt.

- Die Markov-Kette  $X_0, X_1, \dots$  ist genau dann Harris-rekurrent und aperiodisch, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - \Pi\| = 0 \quad (193)$$

für jede Anfangsverteilung  $\alpha$  gilt, wobei  $P_n(A) = P(X_n \in A)$ .

Einen Beweis von Theorem 3.31 findet man beispielsweise im Buch von S.P. Meyn und R.L. Tweedie (1993), *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer-Verlag, London.

**Beachte**

- Aus Theorem 3.31 ergibt sich insbesondere, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in A \mid X_0 = \mathbf{x}) = \Pi(A) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}, A \in \mathcal{N}^{(e)}, \quad (194)$$

wenn die Markov-Kette  $X_0, X_1, \dots$  Harris-rekurrent und aperiodisch ist und wenn dabei  $\alpha = \delta_{\mathbf{x}}$  gesetzt wird.

- Um in Abschnitt 3.6.3 die Konvergenz von Simulationsalgorithmen mit Hilfe von Theorem 3.31 nachprüfen zu können, benötigen wir leicht verifizierbare Kriterien für die Harris-Rekurrenz und Aperiodizität von Markov-Ketten.

Das folgende Resultat stimmt mit Theorem 9.1.8 in dem oben erwähnten Buch von Meyn und Tweedie (1993) überein. Es enthält hinreichende Bedingungen für die Harris-Rekurrenz von Markov-Ketten, die als ein *Drift-Kriterium* aufgefasst werden können. Durch diese Bedingungen wird ausgeschlossen, dass die Gesamtanzahl  $|X_n|$  der Punkte des Punktprozesses  $X_n$  für  $n \rightarrow \infty$  unbegrenzt wächst.

**Theorem 3.32**

- Die Markov-Kette  $X_0, X_1, \dots$  mit dem Übergangskern  $\mathbf{P}$  sei  $\eta$ -irreduzible. Außerdem sei  $h : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [1, \infty)$  eine (messbare) Funktion, so dass  $C_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)} : h(\mathbf{x}) \leq a\}$  für jedes  $a > 1$  eine  $\eta$ -kleine Menge ist.
- Wenn es eine  $\eta$ -kleine Menge  $C \subset \mathbb{N}^{(e)}$  gibt, so dass

$$\int_{\mathbb{N}^{(e)}} h(\mathbf{y}) \mathbf{P}(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) < h(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)} \setminus C, \quad (195)$$

dann ist die Markov-Kette  $\{X_n\}$  Harris-rekurrent.

**Beachte**

- Wenn das Drift-Kriterium (195) erfüllt ist und wenn die Markov-Kette  $\{X_n\}$  außerdem aperiodisch ist, dann ergibt sich aus den Theoremen 3.31 und 3.32, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P^{(n)}(\mathbf{x}, \cdot) - \Pi\| = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}.$$

- Wenn darüber hinaus das so genannte *geometrische Drift-Kriterium* erfüllt ist, d.h., wenn es eine  $\eta$ -kleine Menge  $C \subset \mathbb{N}^{(e)}$  und Konstanten  $a < 1$ ,  $b < \infty$  gibt, so dass

$$\int_{\mathbb{N}^{(e)}} h(\mathbf{y}) \mathbf{P}(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) \leq a h(\mathbf{x}) + b \mathbf{1}_C(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}, \quad (196)$$

- dann kann man zeigen (vgl. Theorem 15.0.1 in Meyn und Tweedie (1993)), dass die Markov-Kette  $\{X_n\}$  sogar *geometrisch ergodisch* ist, d.h., es gibt eine Konstante  $r > 1$ , so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \|P^{(n)}(\mathbf{x}, \cdot) - \Pi\| < \infty \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}. \quad (197)$$

- Wir geben nun noch ein einfaches *Kriterium für die Irreduzibilität und Aperiodizität* von Markov-Ketten an.

- Sei  $X_0, X_1, \dots$  eine Markov-Kette mit dem Übergangskern  $\mathbf{P}$ , so dass es für jedes  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}$  eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  gibt mit

$$\mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{x}, \{\emptyset\}) > 0, \quad (198)$$

wobei die leere Menge  $\emptyset$  dem Nullmaß  $\varphi_0 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$  mit  $\varphi_0(\mathbb{R}^d) = 0$  entspricht.

- Dann kann man sich leicht überlegen, dass  $\{X_n\}$  eine  $\eta$ -irreduzible Markov-Kette ist, wobei  $\eta = \delta_{\emptyset}$ .
- Wenn darüber hinaus

$$\mathbf{P}(\emptyset, \{\emptyset\}) > 0, \quad (199)$$

dann ist die  $\eta$ -irreduzible Markov-Kette  $\{X_n\}$  aperiodisch.

### 3.6.3 MCMC–Simulation; Metropolis–Hastings–Algorithmus

- Sei  $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  ein beschränktes Beobachtungsfenster mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$ , und sei  $Q : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  (so wie bisher) die Verteilung eines Poisson–Prozesses, dessen Intensitätsmaß die Einschränkung des Lebesgue–Maßes auf  $W$  ist.
- In diesem Abschnitt betrachten wir einen so genannten *Metropolis–Hastings–Algorithmus* zur Konstruktion einer Markov–Kette  $X_0, X_1, \dots$  mit Werten in  $\mathbb{N}^{(e)}$ ,
  - die Harris–rekurrent und aperiodisch ist,
  - und deren ergodische (Grenz–) Verteilung  $\Pi$  mit der Verteilung eines Gibbs–Prozesses mit vorgegebener Dichte  $f : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  bezüglich  $Q$  übereinstimmt.
- Dabei nehmen wir an, dass die in (146) eingeführte bedingte Intensität  $\lambda : W \times \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  eine beschränkte Funktion ist.
  - Sei also  $g : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  eine beliebige (integrierbare) Funktion, so dass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

$$0 < \int_{\mathbb{N}^{(e)}} g(\mathbf{x}) Q(d\mathbf{x}) < \infty, \quad (200)$$

$$g(\mathbf{x}) > 0 \quad \implies \quad g(\mathbf{y}) > 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^{(e)} \text{ mit } \mathbf{x} \supset \mathbf{y}, \quad (201)$$

und für eine Konstante  $\Delta < \infty$  gelte

$$g(\mathbf{x} \cup \{u\}) \leq \Delta g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}, u \in W \setminus \mathbf{x}. \quad (202)$$

- Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  bezüglich  $Q$  sei gegeben durch

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) / \int_{\mathbb{N}^{(e)}} g(\mathbf{x}') Q(d\mathbf{x}') \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}.$$

#### Beachte

- Bei der Konstruktion einer Harris–rekurrenten und aperiodischen Markov–Kette  $X_0, X_1, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^{(e)}$  mit der ergodischen (Grenz–) Verteilung  $\Pi$ , wobei

$$\Pi(A) = \int_A f(\mathbf{x}) Q(d\mathbf{x}) \quad \forall A \in \mathcal{N}^{(e)}, \quad (203)$$

nutzen wir einen Ansatz, der bereits in (174) bzw. (175) erwähnt worden ist.

- Dabei setzen wir  $X_0 = \mathbf{x}_0$  für ein  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{N}^{(e)}$  mit  $g(\mathbf{x}_0) > 0$ , d.h., die Anfangsverteilung  $\alpha$  der zu konstruierenden Markov–Kette ist gegeben durch  $\alpha = \delta_{\mathbf{x}_0}$ .
- Um den Übergangskern  $\mathbf{P} : \mathbb{N}^{(e)} \times \mathcal{N}^{(e)} \rightarrow [0, 1]$  zu konstruieren, betrachten wir einen (geeignet gewählten) messbaren Raum  $(D, \mathcal{D})$ , eine Zufallsvariable  $Z : \Omega \rightarrow D$  über  $(D, \mathcal{D})$ , und eine messbare Funktion  $\phi : \mathbb{N}^{(e)} \times D \rightarrow \mathbb{N}^{(e)}$ , wobei

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, A) = P(\omega \in \Omega : \phi(\mathbf{x}, Z(\omega)) \in A) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}, A \in \mathcal{N}^{(e)}. \quad (204)$$

- Die (rekursiv definierten) Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^{(e)}$  mit

$$X_n = \phi(X_{n-1}, Z_n) \quad \forall n \geq 1 \quad (205)$$

bilden dann zusammen mit  $X_0 = \mathbf{x}_0$  eine Markov–Kette mit dem in (204) gegebenen Übergangskern  $\mathbf{P}$ , wobei  $Z_1, Z_2, \dots : \Omega \rightarrow D$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen ist, die die gleiche Verteilung wie  $Z$  haben.

- Sei nun  $Z = (S, T, U, V) : \Omega \rightarrow D$  ein 4-dimensionaler Zufallsvektor mit unabhängigen Komponenten, wobei

$$D = [0, 1] \times [0, 1] \times W \times [0, 1]$$

und die Verteilungen von  $S, T, V$  und  $U$  die Gleichverteilungen in  $[0, 1]$  bzw.  $W$  sind.

- Für eine beliebige (jedoch fest vorgegebene) „potenzielle Geburtswahrscheinlichkeit“  $p \in (0, 1)$  wird die Abbildung  $\mathbb{N}^{(e)} \times D \ni (\mathbf{x}, s, t, u, v) \mapsto \phi(\mathbf{x}, s, t, u, v) \in \mathbb{N}^{(e)}$  wie folgt definiert.
- Wenn  $s \leq p$ , dann setzen wir

$$\phi(\mathbf{x}, s, t, u, v) = \begin{cases} \mathbf{x} \cup \{u\}, & \text{falls } t \leq \rho_+(\mathbf{x}, u), \\ \mathbf{x}, & \text{falls } t > \rho_+(\mathbf{x}, u), \end{cases} \quad (206)$$

wobei der so genannte „Geburtsquotient“  $\rho_+(\mathbf{x}, u)$  gegeben ist durch

$$\rho_+(\mathbf{x}, u) = \begin{cases} \frac{g(\mathbf{x} \cup \{u\}) (1-p) \nu_d(W)}{g(\mathbf{x}) (|\mathbf{x}| + 1) p}, & \text{falls } g(\mathbf{x}) > 0, \\ 0, & \text{falls } g(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \quad (207)$$

- Wenn  $s > p$ , dann setzen wir  $\phi(\mathbf{x}, s, t, u, v) = \emptyset$  für  $\mathbf{x} = \emptyset$  und

$$\phi(\mathbf{x}, s, t, u, v) = \begin{cases} \mathbf{x} \setminus \{x_i\}, & \text{falls } v \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \text{ und } t \leq \rho_-(\mathbf{x}, x_i), \\ \mathbf{x}, & \text{falls } v \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \text{ und } t > \rho_-(\mathbf{x}, x_i) \end{cases} \quad (208)$$

für  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \neq \emptyset$ , wobei der „Sterbequotient“  $\rho_-(\mathbf{x}, u)$  gegeben ist durch

$$\rho_-(\mathbf{x}, x_i) = \begin{cases} \frac{g(\mathbf{x} \setminus \{x_i\}) |\mathbf{x}| p}{g(\mathbf{x}) (1-p) \nu_d(W)}, & \text{falls } g(\mathbf{x}) > 0, \\ \infty, & \text{falls } g(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \quad (209)$$

### Theorem 3.33

- Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  bezüglich  $Q$  sei gegeben durch

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) / \int_{\mathbb{N}^{(e)}} g(\mathbf{x}') Q(d\mathbf{x}') \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}, \quad (210)$$

wobei  $g : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  den Bedingungen (200) – (202) genügt.

- Außerdem seien  $X_0, X_1, \dots$  die in (205) gegebenen Zufallsvariablen, wobei
  - $X_0 = \mathbf{x}_0$  für ein  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{N}^{(e)}$  mit  $g(\mathbf{x}_0) > 0$ ,
  - $Z_1, Z_2, \dots : \Omega \rightarrow D$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvektoren mit unabhängigen Komponenten ist, die gleichverteilt in  $D = [0, 1] \times [0, 1] \times W \times [0, 1]$  sind, und
  - die Funktion  $\phi : \mathbb{N}^{(e)} \times D \rightarrow \mathbb{N}^{(e)}$  durch (206) – (209) gegeben ist.
- Dann ist  $\{X_n\}$  eine  $\eta$ -irreduzible, Harris-rekurrente und aperiodische Markov-Kette, wobei  $\eta = c' \delta_\emptyset$  für eine gewisse Konstante  $c' \in (0, 1)$ .
- Darüber hinaus ist  $\{X_n\}$  geometrisch ergodisch, wobei die ergodische (Grenz-) Verteilung  $\Pi$  von  $\{X_n\}$  mit der Verteilung des Gibbs-Prozesses übereinstimmt, dessen Dichte  $f : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  bezüglich  $Q$  in (210) gegeben ist.

## Beweis

- Wir zeigen zunächst, dass  $\{X_n\}$  eine  $\eta$ -irreduzible und aperiodische Markov-Kette ist.
  - Wegen (198) und (199) genügt es zeigen, dass

$$\mathbf{P}(\emptyset, \{\emptyset\}) > 0 \quad (211)$$

und dass es für jedes  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)} \setminus \{\emptyset\}$  eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  gibt mit  $\mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{x}, \{\emptyset\}) > 0$ .

- Die Gültigkeit von (211) ergibt sich unmittelbar aus (206) – (209).
- Sei nun  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset W$  für ein  $n \geq 1$ . Dann ergibt sich aus (208) und (209), dass

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \{\mathbf{x} \setminus \{x_i\}\}) > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

und somit

$$\mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{x}, \{\emptyset\}) \geq \mathbf{P}(\mathbf{x}, \{\mathbf{x} \setminus \{x_1\}\}) \mathbf{P}(\mathbf{x} \setminus \{x_1\}, \{\mathbf{x} \setminus \{x_1, x_2\}\}) \dots \mathbf{P}(\{x_n\}, \{\emptyset\}) > 0. \quad (212)$$

- Wir zeigen, dass  $C_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)} : |\mathbf{x}| \leq a\}$  für jedes  $a > 1$  eine  $\eta$ -kleine Menge ist.
  - Aus (208) und (209) ergibt sich, dass

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \{\mathbf{x} \setminus \{x_i\}\}) \geq \frac{p}{\Delta \nu_d(W)}$$

für jedes  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset W$  mit  $n \geq 1$  und für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ , wobei  $\Delta > 0$  in (202) so gewählt wird, dass  $\Delta > p/\nu_d(W)$ .

- Hieraus ergibt sich auf ähnliche Weise wie in (212), dass

$$\mathbf{P}^{([a])}(\mathbf{x}, \{\emptyset\}) \geq \left(\frac{p}{\Delta \nu_d(W)}\right)^{|\mathbf{x}|} \left(\mathbf{P}(\emptyset, \{\emptyset\})\right)^{[a]-|\mathbf{x}|} \geq c' \quad \forall \mathbf{x} \in C_a$$

bzw.

$$\mathbf{P}^{([a])}(\mathbf{x}, A) \geq c' \delta_{\emptyset}(A) = \eta(A) \quad \forall \mathbf{x} \in C_a, A \in \mathcal{N}^{(e)},$$

wobei

$$c' = \left(\min\left\{\frac{p}{\Delta \nu_d(W)}, \mathbf{P}(\emptyset, \{\emptyset\})\right\}\right)^{1/[a]}.$$

- Mit Hilfe von Theorem 3.32 ergibt sich nun, dass die Markov-Kette  $\{X_n\}$  Harris-rekurrent ist, denn man kann sich leicht überlegen, dass Drift-Kriterium (195) erfüllt ist.
  - Sei  $p_{|\mathbf{x}|}$  bzw.  $q_{|\mathbf{x}|}$  die Wahrscheinlichkeit, dass versucht wird, einen Punkt zu der Konfiguration  $\mathbf{x}$  hinzuzufügen bzw. einen Punkt aus der Konfiguration  $\mathbf{x}$  zu entfernen, und dass dies jeweils akzeptiert wird.
  - Dann ergibt sich aus (206) – (209), dass  $p_{|\mathbf{x}|} \rightarrow 0$  bzw.  $q_{|\mathbf{x}|} \rightarrow 1 - p > 0$ , wenn  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .
  - Hieraus folgt, dass für jedes hinreichend große  $a > 1$

$$\int_{\mathbb{N}^{(e)}} |\mathbf{y}| \mathbf{P}(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = (|\mathbf{x}| + 1)p_{|\mathbf{x}|} + |\mathbf{x}|(1 - p_{|\mathbf{x}|} - q_{|\mathbf{x}|}) + (|\mathbf{x}| - 1)q_{|\mathbf{x}|} < |\mathbf{x}| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)} \setminus C_a.$$

- Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass für die Markov-Kette  $\{X_n\}$  auch das geometrische Drift-Kriterium (196) erfüllt ist.
  - Denn für jedes hinreichend große  $a > 1$  gibt es eine Konstante  $a' < 1$ , so dass

$$\int_{\mathbb{N}^{(e)}} |\mathbf{y}| \mathbf{P}(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) \leq a' |\mathbf{x}| + a \mathbb{1}_{C_a}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}.$$

- Hieraus folgt, dass die Markov-Kette  $\{X_n\}$  geometrisch ergodisch ist, d.h., es gilt (197) für eine gewisse Konstante  $r > 1$ .

- Wegen Theorem 3.30 ist noch zu zeigen, dass das Paar  $(\Pi, \mathbf{P})$  reversibel ist, wobei  $\Pi$  die Verteilung ist, deren Dichte  $f : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  bezüglich  $Q$  in (210) gegeben ist.
  - Mit Hilfe von (204) – (209) kann man leicht zeigen, dass

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}') \Pi(d\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}', d\mathbf{x}) \Pi(d\mathbf{x}') \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{N}^{(e)}. \quad (213)$$

- Denn es gilt

$$\vdots$$

- Aus (213) ergibt sich, dass für beliebige  $A, A' \in \mathcal{N}^{(e)}$

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{P}(\mathbf{x}, A') \Pi(d\mathbf{x}) &= \int_A \int_{A'} \mathbf{P}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}') \Pi(d\mathbf{x}) \\ &\stackrel{(213)}{=} \int_A \int_{A'} \mathbf{P}(\mathbf{x}', d\mathbf{x}) \Pi(d\mathbf{x}') = \int_{A'} \mathbf{P}(\mathbf{x}, A) \Pi(d\mathbf{x}). \end{aligned}$$

- Durch die erneute Anwendung von Theorem 3.30 ergibt sich nun hieraus, dass das Paar  $(\Pi, \mathbf{P})$  reversibel ist.  $\square$

### 3.6.4 Monte–Carlo–Likelihood–Inferenz

- In diesem Abschnitt erläutern wir eine Methode zur Berechnung von Maximum–Likelihood–Schätzern für parametrische Familien von Gibbs–Prozessen, die auf dem Metropolis–Hastings–Algorithmus beruht, der in Abschnitt 3.6.3 zur MCMC–Simulation von Gibbs–Prozessen eingeführt worden ist.
- Dabei nehmen wir so wie in Abschnitt 3.5.4 an, dass die Dichte  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  des betrachteten Gibbs–Prozesses zu einer parametrischen Familie  $\{f_\theta, \theta \in \Theta\}$  von Dichten gehört, wobei  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$  für ein  $m \geq 1$ .
  - Für jedes  $\theta \in \Theta$  sei die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_\theta : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  gegeben durch

$$f_\theta(\mathbf{x}) = g_\theta(\mathbf{x}) / \int_{\mathbb{N}^{(e)}} g_\theta(\mathbf{x}') Q(d\mathbf{x}') \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}, \quad (214)$$

wobei  $g_\theta : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  den Bedingungen (200) – (202) genügt.

- Außerdem nehmen wir an, dass die Menge  $A_\theta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)} : g_\theta(\mathbf{x}) > 0\}$  nicht von  $\theta \in \Theta$  abhängt.
- Zur Erinnerung: Wenn das Punktmuster  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset W$  beobachtet wird, dann ist durch den Ansatz

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \log L(\mathbf{x}; \theta) \quad (215)$$

ein *Maximum–Likelihood–Schätzer* für  $\theta$  gegeben, wobei  $\log L(\mathbf{x}; \theta) = \log f_\theta(\mathbf{x})$  die Log–Likelihood–Funktion ist.

- Wir zeigen nun, dass es bei der praktischen Berechnung des Maximum–Likelihood–Schätzers  $\hat{\theta}(\mathbf{x})$  zweckmäßiger ist, in (215) anstelle der Log–Likelihood–Funktion  $\log L(\mathbf{x}; \theta)$ 
  - den *Log–Likelihood–Quotienten*  $\log LQ : \mathbb{N}^{(e)} \times \Theta \rightarrow [0, \infty)$  zu betrachten, wobei

$$\log LQ(\mathbf{x}, \theta) = \log \frac{f_\theta(\mathbf{x})}{f_{\theta_0}(\mathbf{x})} \quad (216)$$

- und  $\theta_0 \in \Theta$  ein geeignet gewähltes Element des Parameterraumes  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$  ist.
- Dabei ist die folgende Darstellungsformel des Log–Likelihood–Quotienten nützlich.

**Theorem 3.34** Für jedes  $\theta_0 \in \Theta$  gilt

$$\log LQ(\mathbf{x}, \theta) = \log \frac{g_\theta(\mathbf{x})}{g_{\theta_0}(\mathbf{x})} - \log \left( \mathbb{E}_{\theta_0} \frac{g_\theta(\mathbf{X})}{g_{\theta_0}(\mathbf{X})} \right) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}, \theta \in \Theta, \quad (217)$$

wobei  $\mathbf{X}$  ein Gibbs-Prozess mit der Dichte  $f_{\theta_0} : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  ist.

**Beweis**

- Aus (214) und (216) ergibt sich, dass

$$\log LQ(\mathbf{x}, \theta) = \log \frac{g_\theta(\mathbf{x})}{g_{\theta_0}(\mathbf{x})} - \log \frac{\int_{\mathbb{N}^{(e)}} g_\theta(\mathbf{x}') Q(d\mathbf{x}')}{\int_{\mathbb{N}^{(e)}} g_{\theta_0}(\mathbf{x}') Q(d\mathbf{x}')}.$$

- Weil  $g_\theta(\mathbf{x}) = 0$ , wenn  $g_{\theta_0}(\mathbf{x}) = 0$ , gilt für den Quotienten der beiden Integrale des letzten Ausdruckes, dass

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathbb{N}^{(e)}} g_\theta(\mathbf{x}) Q(d\mathbf{x})}{\int_{\mathbb{N}^{(e)}} g_{\theta_0}(\mathbf{x}') Q(d\mathbf{x}')} &= \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \frac{g_\theta(\mathbf{x})}{g_{\theta_0}(\mathbf{x})} \frac{g_{\theta_0}(\mathbf{x})}{\int_{\mathbb{N}^{(e)}} g_{\theta_0}(\mathbf{x}') Q(d\mathbf{x}')} Q(d\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{N}^{(e)}} \frac{g_\theta(\mathbf{x})}{g_{\theta_0}(\mathbf{x})} f_{\theta_0}(\mathbf{x}) Q(d\mathbf{x}) \\ &= \mathbb{E}_{\theta_0} \frac{g_\theta(\mathbf{X})}{g_{\theta_0}(\mathbf{X})}. \end{aligned} \quad \square$$

Das folgende Resultat liefert eine Approximation  $\log LQ_n(\mathbf{x}, \theta)$  für den Log-Likelihood-Quotienten  $\log LQ(\mathbf{x}, \theta)$ , die mit MCMC-Simulation berechnet werden kann.

**Korollar 3.5** Für beliebige  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}$  und  $\theta, \theta_0 \in \Theta$  gilt mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log LQ_n(\mathbf{x}, \theta) = \log LQ(\mathbf{x}, \theta), \quad (218)$$

wobei

$$\log LQ_n(\mathbf{x}, \theta) = \log \frac{g_\theta(\mathbf{x})}{g_{\theta_0}(\mathbf{x})} - \log \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g_\theta(\mathbf{X}_i)}{g_{\theta_0}(\mathbf{X}_i)} \right) \quad (219)$$

und  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$  die Markov-Kette von Gibbs-Prozessen ist, die in Abschnitt 3.6.3 mit Hilfe des Metropolis-Hastings-Algorithmus konstruiert wurde und deren ergodische Grenzverteilung  $\Pi$  die Dichte  $f_{\theta_0} : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  hat.

**Beweis**

- In Theorem 3.33 wurde gezeigt, dass die Markov-Kette  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$  Harris-rekurrent ist.
- Außerdem ergibt sich aus dem Beweis von Theorem 3.34, dass die Funktion  $h : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  mit  $h(\mathbf{x}) = g_\theta(\mathbf{x})/g_{\theta_0}(\mathbf{x})$  bezüglich der ergodischen Grenzverteilung  $\Pi$  der Markov-Kette  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$  integrierbar ist.
- Hieraus ergibt sich mit Hilfe von Theorem 3.31, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g_\theta(\mathbf{X}_i)}{g_{\theta_0}(\mathbf{X}_i)} = \mathbb{E}_{\theta_0} \frac{g_\theta(\mathbf{X})}{g_{\theta_0}(\mathbf{X})}.$$

- Die Behauptung ergibt sich nun aus Theorem 3.34. □

**Beachte**

- Durch den Ansatz

$$\hat{\theta}_n(\mathbf{x}) = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \log LQ_n(\mathbf{x}; \theta) \quad (220)$$

ist ein approximativer *Maximum-Likelihood-Schätzer*  $\hat{\theta}_n$  für  $\theta$  gegeben, wobei  $\log LQ_n(\mathbf{x}; \theta)$  der in (219) eingeführte approximative Log-Likelihood-Quotient ist.

- Zur Bestimmung des Schätzers  $\hat{\theta}_n$ , d.h., zur Lösung des Optimierungsproblems (220) nehmen wir im folgenden an, dass der approximative Log-Likelihood-Quotient

$$l_n(\theta) = \log LQ_n(\mathbf{x}; \theta)$$

die erforderlichen Differenzierbarkeits- und (weitere) Regularitätseigenschaften besitzt, ohne dass dies in einzelnen explizit erwähnt wird.

- Dabei ist insbesondere die Kenntnis der so genannten *Scorefunktionen*, d.h. der partiellen Ableitungen des approximativen Log-Likelihood-Quotienten, sowie der *Fisher-Informationsmatrix* nützlich, die wie folgt definiert ist.

- Für beliebige  $i, j = 1, \dots, m$  sei

$$\nabla_i l_n(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log LQ_n(\mathbf{x}, \theta) \quad \text{und} \quad \nabla_{ij}^2 l_n(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log LQ_n(\mathbf{x}, \theta).$$

- Dann wird der  $m$ -dimensionale Zufallsvektor  $\nabla l_n(\theta) = (\nabla_1 l_n(\theta), \dots, \nabla_m l_n(\theta))^\top$  bzw. die  $m \times m$ -Matrix  $-\nabla^2 l_n(\theta) = (-\nabla_{ij}^2 l_n(\theta))$  der *Scorevektor* bzw. die *Fisher-Informationsmatrix* genannt.

**Theorem 3.35**

- Für beliebige  $n \geq 1$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}$  und  $\theta, \theta_0 \in \Theta$  gilt

$$\nabla l_n(\theta) = \nabla \log g_\theta(\mathbf{x}) - \mathbb{E}_{n, \theta, \theta_0} \nabla \log g_\theta \quad (221)$$

und

$$\nabla^2 l_n(\theta) = \nabla^2 \log g_\theta(\mathbf{x}) - \mathbb{E}_{n, \theta, \theta_0} \nabla^2 \log g_\theta - \operatorname{Var}_{n, \theta, \theta_0} \nabla \log g_\theta. \quad (222)$$

- Dabei sind der (Erwartungswert-) Vektor  $\mathbb{E}_{n, \theta, \theta_0} h$  und die (Kovarianz-) Matrix  $\operatorname{Var}_{n, \theta, \theta_0} h$  für eine (vektor- bzw. matrixwertige) Funktion  $h : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $k \geq 1$  gegeben durch

$$\mathbb{E}_{n, \theta, \theta_0} h = \sum_{i=1}^n w_{n, \theta, \theta_0}(\mathbf{X}_i) h(\mathbf{X}_i) \quad (223)$$

und

$$\operatorname{Var}_{n, \theta, \theta_0} h = \mathbb{E}_{n, \theta, \theta_0} (h h^\top) - (\mathbb{E}_{n, \theta, \theta_0} h) (\mathbb{E}_{n, \theta, \theta_0} h)^\top, \quad (224)$$

- wobei  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$  die in Abschnitt 3.6.3 konstruierte Markov-Kette von Gibbs-Prozessen ist, deren ergodische Grenzverteilung  $\Pi$  die Dichte  $f_{\theta_0} : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty)$  hat,
- und die „Gewichtsfunktion“  $w_{n, \theta, \theta_0} : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow [0, \infty]$  gegeben ist durch

$$w_{n, \theta, \theta_0}(\mathbf{x}) = \frac{g_\theta(\mathbf{x})/g_{\theta_0}(\mathbf{x})}{\sum_{j=0}^n g_\theta(\mathbf{X}_j)/g_{\theta_0}(\mathbf{X}_j)} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}. \quad (225)$$

**Beweis**

- Aus der Definitionsgleichung (219) des approximativen Log-Likelihood-Quotienten  $l_n(\theta)$  ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}
\nabla l_n(\theta) &\stackrel{(219)}{=} \nabla \left( \log \frac{g_\theta(\mathbf{x})}{g_{\theta_0}(\mathbf{x})} - \log \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g_\theta(\mathbf{X}_i)}{g_{\theta_0}(\mathbf{X}_i)} \right) \right) \\
&= \nabla \log g_\theta(\mathbf{x}) - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\nabla g_\theta(\mathbf{X}_i)}{g_{\theta_0}(\mathbf{X}_i)}}{\sum_{i=1}^n \frac{g_\theta(\mathbf{X}_i)}{g_{\theta_0}(\mathbf{X}_i)}} = \nabla \log g_\theta(\mathbf{x}) - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\nabla g_\theta(\mathbf{X}_i)}{g_\theta(\mathbf{X}_i)} \frac{g_\theta(\mathbf{X}_i)}{g_{\theta_0}(\mathbf{X}_i)}}{\sum_{i=1}^n \frac{g_\theta(\mathbf{X}_i)}{g_{\theta_0}(\mathbf{X}_i)}} \\
&\stackrel{(225)}{=} \nabla \log g_\theta(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n w_{n,\theta,\theta_0}(\mathbf{X}_i) \nabla \log g_\theta(\mathbf{X}_i) \\
&\stackrel{(223)}{=} \nabla \log g_\theta(\mathbf{x}) - \mathbb{E}_{n,\theta,\theta_0} \nabla \log g_\theta.
\end{aligned}$$

- Damit ist die Gültigkeit von (221) bewiesen. Der Beweis von (222) verläuft analog und wird deshalb weggelassen.  $\square$

**Beispiele** (*Exponentialfamilien*)

- Wir betrachten nun den Spezialfall, dass die parametrische Familie  $\{f_\theta, \theta \in \Theta\}$  von Dichten eine so genannte *Exponentialfamilie* von Gibbs-Prozessen bildet, die bereits in Abschnitt 3.5.5 eingeführt worden ist.
- Dabei nehmen wir an, dass die Dichte  $f_\theta : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  des Gibbs-Prozesses gegeben ist durch (214) mit

$$g_\theta(\mathbf{x}) = \exp(\theta^\top Z(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{(e)}, \theta \in \Theta, \quad (226)$$

wobei  $Z : \mathbb{N}^{(e)} \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine messbare Funktion ist.

- Für den *Strauss-Prozess* gilt insbesondere  $m = 2$ ,  $\theta_1 = \log a$ ,  $\theta_2 = b$  und  $Z(\mathbf{x}) = (Z_1(\mathbf{x}), Z_2(\mathbf{x}))$  mit  $Z_1(\mathbf{x}) \equiv |\mathbf{x}|$  bzw.  $Z_2(\mathbf{x}) = -t_R(\mathbf{x})$ , wobei  $t_R(\mathbf{x})$  die Anzahl aller Punktpaare von  $\mathbf{x}$  bezeichnet, deren Abstand kleiner als  $R$  ist.
- Für den *Geyerschen Sättigungsprozess* gilt  $m = 2$ ,  $\theta_1 = \log a$ ,  $\theta_2 = b$  und  $Z(\mathbf{x}) = (Z_1(\mathbf{x}), Z_2(\mathbf{x}))$  mit  $Z_1(\mathbf{x}) \equiv |\mathbf{x}|$  bzw.

$$Z_2(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^{|\mathbf{x}|} \min\{m', t_R(x_i, \mathbf{x} \setminus \{x_i\})\},$$

wobei  $m' \geq 1$  und  $t_R(x_i, \mathbf{x} \setminus \{x_i\})$  die Anzahl derjenigen Punkte von  $\mathbf{x} \setminus \{x_i\}$  bezeichnet, deren Abstand von  $x_i$  nicht größer als  $R$  ist.

- Für den Scorevektor  $\nabla l_n(\theta)$  und die Fisher-Informationsmatrix  $-\nabla^2 l_n(\theta)$  von Exponentialfamilien gilt

$$\nabla l_n(\theta) = Z(\mathbf{x}) - \mathbb{E}_{n,\theta,\theta_0} Z \quad \text{bzw.} \quad -\nabla^2 l_n(\theta) = \text{Var}_{n,\theta,\theta_0} Z. \quad (227)$$

**Beachte**

- Aus (227) ergibt sich, dass die Fisher-Informationsmatrix  $-\nabla^2 l_n(\theta)$  von Exponentialfamilien negativ definit ist. Wenn also die (approximative) Maximum-Likelihood-Gleichung

$$Z(\mathbf{x}) - \mathbb{E}_{n,\theta,\theta_0} Z = 0 \quad (228)$$

eine Lösung  $\hat{\theta}_n \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$  besitzt, dann ist  $\hat{\theta}_n$  auch Lösung des Optimierungsproblems (220).

- Eine numerische Methode zur iterativen Lösung der approximativen Maximum-Likelihood-Gleichung (228) ist das folgende *Newton-Raphson-Verfahren*.

- Dabei betrachten wir eine Folge von  $m$ -dimensionalen Vektoren  $\hat{\theta}^{(0)}, \hat{\theta}^{(1)}, \dots$ , die unter gewissen Bedingungen gegen einen Vektor  $\hat{\theta}_n(\mathbf{x})$  konvergieren, so dass  $\hat{\theta}_n(\mathbf{x})$  Lösung von (228) ist.

- Sei  $\hat{\theta}^{(0)} = \theta_0$  ein geeignet gewählter Startvektor, zum Beispiel der in Abschnitt 3.5.5 betrachtete Maximum-Pseudolikelihood-Schätzer, und die Iterationen  $\hat{\theta}^{(0)}, \dots, \hat{\theta}^{(k)}$  seien bereits berechnet worden.
- Zur Berechnung der  $(k+1)$ -ten Iteration  $\hat{\theta}^{(k+1)}$  aus  $\hat{\theta}^{(k)}$  wird die linke Seite  $\nabla l_n(\theta)$  der approximativen Maximum-Likelihood-Gleichung (228) ersetzt durch
  - \* die ersten beiden Glieder  $\nabla l_n(\hat{\theta}^{(k)}) + \nabla^2 l_n(\hat{\theta}^{(k)})(\theta - \hat{\theta}^{(k)})$  der Taylor-Reihenentwicklung von  $\nabla l_n(\theta)$  an der Stelle  $\theta = \hat{\theta}^{(k)}$ .
  - \* Die  $(k+1)$ -ten Iteration  $\hat{\theta}^{(k+1)}$  ist also Lösung der Gleichung

$$\nabla l_n(\hat{\theta}^{(k)}) + \nabla^2 l_n(\hat{\theta}^{(k)})(\theta - \hat{\theta}^{(k)}) = o. \quad (229)$$

- Wenn die Matrix  $\nabla^2 l_n(\hat{\theta}^{(k)})$  invertierbar ist, dann ergibt sich aus (229), dass

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} - (\nabla^2 l_n(\hat{\theta}^{(k)}))^{-1} \nabla l_n(\hat{\theta}^{(k)}), \quad (230)$$

- Damit die so konstruierte Folge  $\hat{\theta}^{(0)}, \hat{\theta}^{(1)}, \dots$  gegen  $\hat{\theta}_n(\mathbf{x})$  konvergiert, muss  $\hat{\theta}_n(\mathbf{x})$  Lösung von (228) sein und der Startvektor  $\theta_0$  muss genügend nahe bei  $\hat{\theta}_n(\mathbf{x})$  liegen.

## 4 Palmsche Verteilung und weitere Kenngrößen von Punktprozessen

- Sei  $S_1, S_2, \dots \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  eine Folge von Zufallsvektoren über einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , so dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\#\{n : S_n \in B\} < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \quad (1)$$

und

$$S_i \neq S_j \quad \forall i, j \geq 1 \text{ mit } i \neq j. \quad (2)$$

- Wir setzen voraus, dass das zufällige Zählmaß  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit  $N_B = \#\{n : S_n \in B\}$  stationär ist und dass seine Intensität  $\lambda = \mathbb{E} N_{[0,1]^d}$  positiv und endlich ist.
- Außerdem setzen wir voraus, dass  $P(N_{\mathbb{R}^d} = 0) = 0$ , d.h., das zufällige Zählmaß  $\{N_B\}$  hat mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele Atome, vgl. Theorem 3.5.

### 4.1 Palmsche Verteilung

#### 4.1.1 Definition durch Intensitätsquotienten; typischer Punkt

Die Grundidee bei der Definition der Palmschen Verteilung des stationären zufälligen Zählmaßes  $\{N_B\}$  besteht darin,

- für jede (beliebige, jedoch fest vorgegebene) messbare Teilmenge  $A \in \mathcal{N}$  des kanonischen Wahrscheinlichkeitsraumes  $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N)$  nur diejenigen Atome von  $\{N_B\}$  zu betrachten, aus deren Sicht das zufällige Zählmaß  $\{N_B\}$  die Eigenschaft  $A$  hat.
- Mit anderen Worten: Für jedes  $A \in \mathcal{N}$  betrachten wir das zufällige Zählmaß  $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ , das gegeben ist durch

$$N_{B,A} = \#\{n : S_n \in B, \{N_{B'-S_n}\} \in A\}. \quad (3)$$

- *Beispiel:* Wenn  $A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r) \setminus \{o\}) = 0\}$  für ein  $r > 0$ , dann werden durch  $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  diejenigen Punkte von  $\{N_B\}$  erfasst, für die der Abstand zu ihrem nächsten Nachbarn größer als  $r$  ist.

**Theorem 4.1** Für jedes  $A \in \mathcal{N}$  ist das in (3) eingeführte zufällige Zählmaß  $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  stationär. Wenn  $\{N_B\}$  ergodisch ist, dann ist auch  $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  für jedes  $A \in \mathcal{N}$  ergodisch.

#### Beweis

- Wir zeigen zuerst, dass  $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  stationär ist.
  - Für beliebige  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $A \in \mathcal{N}$  gilt

$$\begin{aligned} N_{B+x,A} &= \#\{n : S_n \in B+x, \{N_{B'-S_n}\} \in A\} \\ &= \#\{n : S_n - x \in B, \{N_{B'-S_n}\} \in A\} \\ &= \#\{n : S_n - x \in B, \{N_{(B'-x)-(S_n-x)}\} \in A\} \\ &\stackrel{D}{=} \#\{n : S_n \in B, \{N_{B'-S_n}\} \in A\} \\ &= N_{B,A}, \end{aligned}$$

wobei sich die vorletzte Gleichheit aus der Stationarität von  $\{N_B\}$  ergibt.

- Auf analoge Weise ergibt sich für beliebige  $k \geq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $A \in \mathcal{N}$ , dass

$$(N_{B_1+x,A}, \dots, N_{B_k+x,A}) \stackrel{D}{=} (N_{B_1,A}, \dots, N_{B_k,A}).$$

- Sei nun  $\{N_B\}$  ergodisch.

- Für beliebige  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $A \in \mathcal{N}$  und  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und für jedes  $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{s_n}$  aus  $\mathbb{N}$  mit  $s_i \neq s_j$  für  $i \neq j$  gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_x(\varphi_A))(B) &= \#\{n : s_n - x \in B, \{\varphi(B' - s_n)\} \in A\} \\ &= \#\{n : s_n - x \in B, \{(\mathbf{T}_x\varphi)(B' - (s_n - x))\} \in A\} \\ &= (\mathbf{T}_x\varphi)_A(B), \end{aligned}$$

- Insgesamt gilt also

$$\mathbf{T}_x(\varphi_A) = (\mathbf{T}_x\varphi)_A \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{N}. \quad (4)$$

- Sei  $\mathbb{N}_A$  die Bildmenge von  $\mathbb{N}$  für die in (3) betrachtete Abbildung  $\varphi \mapsto \varphi_A$ .
- Wegen (4) ist das Urbild  $A'_A$  jeder  $\mathbf{T}$ -invarianten Menge  $A'$  aus  $\mathcal{N} \cap \mathbb{N}_A$  eine  $\mathbf{T}$ -invariante Menge aus  $\mathcal{N}$ .
- Hieraus und aus der Ergodizität von  $\{N_B\}$  ergibt sich mit Hilfe von Theorem 3.19, dass

$$\max\{P_{\{N_{B,A}\}}(A'), P_{\{N_{B,A}\}}((A')^c)\} = \max\{P_{\{N_B\}}(A'_A), P_{\{N_B\}}((A'_A)^c)\} = 1 \quad \forall A' \in \mathcal{I} \cap \mathbb{N}_A.$$

- Die erneute Anwendung von Theorem 3.19 ergibt nun, dass  $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ergodisch ist.  $\square$

### Definition

- Für jedes  $A \in \mathcal{N}$  sei  $\lambda(A)$  die Intensität des stationären Zählmaßes  $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ .
- Dann ist durch die Mengenfunktion  $P_N^0 : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$P_N^0(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda} \quad \forall A \in \mathcal{N} \quad (5)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß über  $\mathcal{N}$  gegeben.

- Denn aus der Definitionsgleichung (3) von  $N_{B,A}$  und aus dem Satz über die monotone Konvergenz ergibt sich, dass für jede Folge  $A_1, A_2, \dots$  von paarweise disjunkten Mengen aus  $\mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} N_{[0,1]^d, A_i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \#\{n : S_n \in [0, 1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in A_i\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \#\{n : S_n \in [0, 1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in A_i\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sum_{i=1}^k \#\{n : S_n \in [0, 1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in A_i\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \#\left\{n : S_n \in [0, 1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in \bigcup_{i=1}^k A_i\right\} \\ &\stackrel{\text{monotone Konvergenz}}{=} \mathbb{E} \lim_{k \rightarrow \infty} \#\left\{n : S_n \in [0, 1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in \bigcup_{i=1}^k A_i\right\} \\ &= \mathbb{E} \#\left\{n : S_n \in [0, 1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} \\ &= \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right). \end{aligned}$$

- Das in (5) eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_N^0$  wird die *Palmsche Verteilung* des stationären Zählmaßes  $\{N_B\}$  genannt.

### Beachte

- Manchmal ist es zweckmäßig, die folgende (mit (5) äquivalente) Formel zur Darstellung der Palmschen Wahrscheinlichkeiten  $P_N^0(A)$  zu betrachten.
- Für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(B) < \infty$  gilt

$$P_N^0(A) = \frac{\mathbb{E} \#\{n : S_n \in B, \{N_{B'-S_n}\} \in A\}}{\lambda \nu_d(B)} = \frac{\int_{\mathbb{N}} \sum_{n: s_n(\varphi) \in B} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)}\varphi) P_N(d\varphi)}{\lambda \nu_d(B)} \quad \forall A \in \mathcal{N}, \quad (6)$$

weil das zufällige Zählmaß  $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  stationär ist (vgl. Theorem 4.1) und sein Intensitätsmaß somit proportional zum  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maß  $\nu_d$  ist.

Außerdem besitzt die Palmsche Verteilung  $P_N^0$  die folgende (elementare) Eigenschaft, die sich unmittelbar aus der Definitionsgleichung (3) von  $N_{B,A}$  ergibt.

**Theorem 4.2** Sei  $\mathbb{N}^0 = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(\{o\}) > 0\}$  die Menge derjenigen Zählmaße aus  $\mathbb{N}$ , die im Nullpunkt ein Atom besitzen. Dann gilt

$$P_N^0(\mathbb{N}^0) = 1. \quad (7)$$

**Beweis** Für  $A = \mathbb{N}^0$  ergibt sich aus (3) und (5), dass

$$\begin{aligned} P_N^0(\mathbb{N}^0) &\stackrel{(5)}{=} \frac{\lambda(\mathbb{N}^0)}{\lambda} = \frac{\mathbb{E} N_{[0,1]^d, \mathbb{N}^0}}{\lambda} \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{\mathbb{E} \#\{n : S_n \in [0,1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in \mathbb{N}^0\}}{\lambda} \\ &= \frac{\mathbb{E} \#\{n : S_n \in [0,1]^d\}}{\lambda} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Für statistische Fragestellungen ist es nützlich, dass sich die Palmschen Wahrscheinlichkeiten  $P_N^0(A)$  im ergodischen Fall als Grenzwert von relativen Häufigkeiten darstellen lassen.

**Theorem 4.3** Wenn  $\{N_B\}$  ergodisch ist, dann gilt für jedes  $A \in \mathcal{N}$

$$P_N^0(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{[-n,n]^d, A}}{N_{[-n,n]^d}}. \quad (8)$$

### Beweis

- Wegen Theorem 4.1 ist mit  $\{N_B\}$  auch das zufällige Zählmaß  $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ergodisch.
- Hieraus und aus Theorem 3.18 ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{[-n,n]^d, A}}{N_{[-n,n]^d}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{[-n,n]^d, A}}{(2n)^d} \bigg/ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{[-n,n]^d}}{(2n)^d} \\ &\stackrel{\text{Theorem 3.18}}{=} \frac{\lambda(A)}{\lambda} = P_N^0(A). \quad \square \end{aligned}$$

**Beachte**

- Weil die Palmische Wahrscheinlichkeit  $P_N^0(A)$  im ergodischen Fall als Grenzwert der relativen Häufigkeiten  $N_{[-n,n]^d,A} / N_{[-n,n]^d}$  in (8) dargestellt werden kann, kann man  $P_N^0(A)$  als die Wahrscheinlichkeit auffassen, dass der Punktprozess  $\{S_n\}$  von einem zufällig herausgegriffenen Punkt  $S_m$  aus gesehen, die Eigenschaft  $A$  hat.
- Man sagt deshalb auch, dass  $P_N^0(A)$  die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass der *typische Punkt* von  $\{N_B\}$  die Eigenschaft  $A$  hat.
- Wenn beispielsweise  $A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o,r) \setminus \{o\}) = 0\}$  für ein  $r > 0$ , dann ist  $P_N^0(A)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Abstand zum nächsten Nachbarn des typischen Punktes größer als  $r$  ist; vgl. Abbildung 18.
- Im ergodischen Fall liefert die Formel (8) einen natürlichen Ansatz zur (konsistenten) Schätzung der Palmischen Wahrscheinlichkeit  $P_N^0(A)$ , wenn die Anzahlen  $N_{[-n,n]^d}$  und  $N_{[-n,n]^d,A}$  für ein großes  $n$ , d.h., für ein großes Beobachtungsfenster  $W_n = [-n,n]^d$  bestimmt werden können.

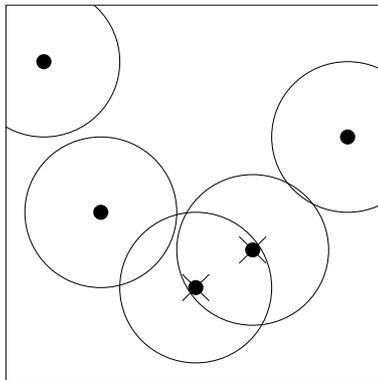


Abbildung 18: Punkte, aus deren Sicht die Eigenschaft  $A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o,r) \setminus \{o\}) = 0\}$  vorliegt

**4.1.2 Lokale Charakterisierung**

- Die praktische Bestimmung der Palmischen Wahrscheinlichkeit  $P_N^0(A)$  mit Hilfe von Formel (8) kann mit einem großen Rechenaufwand verbunden sein, weil die Berechnung der Anzahl  $N_{[-n,n]^d,A}$  für großes  $n$  in vielen Fällen sehr aufwendig ist.
- Für einige Klassen von stationären Punktprozessen ist es jedoch möglich, die Palmischen Wahrscheinlichkeiten  $P_N^0(A)$  auf eine andere (effizientere) Weise zu bestimmen,
  - wobei anstelle der aufwendigen Berechnung der „globalen“ Anzahlen  $N_{[-n,n]^d,A}$  nur „lokale“ Modellkenngrößen bestimmt werden müssen, deren praktische Berechnung wesentlich einfacher ist.
  - Dies kann insbesondere bei der Bestimmung von  $P_N^0(A)$  mittels Monte-Carlo-Simulation zu einer wesentlichen Verringerung von Rechenzeiten führen.
- Wir beginnen deshalb diesen Abschnitt mit der folgenden „lokalen Charakterisierung“ der Intensität  $\lambda$ ,
  - die in der Literatur der *Satz von Korolyuk* genannt wird
  - und die ein Hilfsmittel zur Herleitung der oben genannten lokalen Charakterisierung der Palmischen Wahrscheinlichkeiten  $P_N^0(A)$  ist, vgl. Korollar 4.1.

**Theorem 4.4** Sei  $B_k = [-1/k, 1/k]^d$  für jedes  $k \geq 1$ . Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} = \lambda. \quad (9)$$

**Beweis**

- Wir zeigen zuerst, dass der Grenzwert in (9) existiert, wobei

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} = \sup_{k \geq 1} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} \quad (= \rho). \quad (10)$$

- Das Supremum  $\rho$  in (10) ist eine positive endliche Zahl, weil für jedes  $k \geq 1$

$$0 < \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} \leq \frac{\mathbb{E} N(B_k)}{\nu_d(B_k)} = \lambda < \infty.$$

- Wir führen einen indirekten Beweis von (10) und nehmen an, dass es ein  $\varepsilon > 0$  und eine unbegrenzt wachsende Folge  $i_1, i_2, \dots$  natürlicher Zahlen gibt, so dass

$$\frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_{i_n}) > 0)}{\nu_d(B_{i_n})} \leq (1 - \varepsilon)^{2d} \rho \quad \forall n \geq 1. \quad (11)$$

- Für jedes  $k \geq 1$  gibt es ein hinreichend großes  $n \geq 1$ , so dass sich die Zahl  $k^{-1}$  in der Form

$$k^{-1} = k_n i_n^{-1} + \delta_n \quad (12)$$

darstellen lässt, wobei  $0 \leq \delta_n < i_n^{-1}$  und  $k_n \geq 0$  eine nichtnegative ganze Zahl ist mit

$$\frac{k_n + 1}{k_n} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon}. \quad (13)$$

- Außerdem lässt sich der Quader  $B_k$  dann als Teilmenge der Vereinigung von  $(k_n + 1)^d$  Quadern mit der Kantenlänge  $2/i_n$  darstellen.
- Insgesamt ergibt sich dann aus (11) – (13) mit Hilfe der Subadditivität von  $P_N$  und der Stationarität von  $\{N_B\}$ , dass

$$\begin{aligned} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} &\leq \frac{(k_n + 1)^d P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_{i_n}) > 0)}{(2/k)^d} \\ &\leq \frac{(k_n + 1)^d P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_{i_n}) > 0)}{(2k_n/i_n)^d} \\ &= \frac{(k_n + 1)^d}{k_n^d} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_{i_n}) > 0)}{\nu_d(B_{i_n})} \\ &\leq (1 - \varepsilon)^d \rho. \end{aligned}$$

- Hieraus folgt, dass

$$\sup_{k \geq 1} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} \leq (1 - \varepsilon)^d \rho.$$

- Dies steht jedoch im Widerspruch zur Definition des Supremums  $\rho$  in (10), womit die Gültigkeit von (10) bewiesen ist.

- Um die Gültigkeit von (9) zu zeigen, zerlegen wir den Quader  $[-1, 1]^d$  für jedes  $k \geq 1$  in  $k^d$  gleichgroße Quader  $B_{k1}, \dots, B_{kk^d}$  mit der Kantenlänge  $2/k$ .

- Für beliebige  $k \geq 1$  und  $i \in \{1, \dots, k^d\}$  sei

$$X_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } N_{B_{ki}} > 0, \\ 0, & \text{wenn } N_{B_{ki}} = 0. \end{cases}$$

– Für  $k = 2^1, 2^2, \dots$  gilt dann mit Wahrscheinlichkeit 1 die monotone Konvergenz

$$\sum_{i=1}^{k^d} X_{ki} \uparrow N_{[-1,1]^d}.$$

– Hieraus ergibt sich nun mit Hilfe des Satzes über die monotone Konvergenz, dass

$$\begin{aligned} 2^d \lambda &= \mathbb{E} N_{[-1,1]^d} = \mathbb{E} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^{nd}} X_{2^ni} \right) \\ &\stackrel{\text{monotone Konvergenz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{2^{nd}} X_{2^ni} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^{nd}} \mathbb{E} X_{2^ni} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{nd} P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_{2^{n1}}) > 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{nd} P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi([-1/2^d, 1/2^d]^d) > 0). \end{aligned}$$

– Insgesamt ergibt sich somit, dass

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi([-1/2^d, 1/2^d]^d) > 0)}{(2/2^n)^d}.$$

– Wegen (10) ist damit die Gültigkeit von (9) bewiesen.  $\square$

### Beachte

- Die Aussage von Theorem 4.4 gilt nicht nur für Quader  $B_k = [-1/k, 1/k]^d$ , sondern auch für allgemeinere Folgen  $\{B_k\}$  von immer kleiner werdenden Umgebungen des Nullpunktes.
- Um dies zu zeigen, sind jedoch andere (anspruchsvollere) Beweistechniken erforderlich, vgl. z.B. Abschnitt 12.4 in O. Kallenberg (1986) *Random Measures*, Academic Press, London.
- Für Spezialfälle kann man dies allerdings auf einfache Weise zeigen.
  - Sei  $\{N_B\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$ .
  - Dann gilt

$$P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B) > 0) = \lambda \nu_d(B) \exp(-\lambda \nu_d(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d).$$

– Somit gilt für jede Folge  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(B_k) < \infty$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_d(B_k) = 0$ , dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda \nu_d(B_k) \exp(-\lambda \nu_d(B_k))}{\nu_d(B_k)} = \lambda.$$

Mit Hilfe von Theorem 4.4 können wir nun zeigen, dass sich die Palmische Verteilung  $P_N^0$  als Grenzwert von bedingten Verteilungen von  $\{N_B\}$  darstellen lässt (unter der Bedingung, dass in einer immer kleiner werdenden Umgebung des Nullpunktes ein Atom des zufälligen Zählmaßes  $\{N_B\}$  liegt).

Hierfür benötigen wir den Begriff des Variationsabstandes zwischen zwei endlichen (nicht notwendig normierten) Maßen, der bereits in Abschnitt 3.6.1 betrachtet wurde.

### Definition

- Seien  $Q_1, Q_2$  endliche Maße über  $\mathcal{N}$ . Der *Variationsabstand*  $\|Q_1 - Q_2\|$  zwischen  $Q_1$  und  $Q_2$  ist gegeben durch

$$\|Q_1 - Q_2\| = \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{A \in \mathcal{Z}} |Q_1(A) - Q_2(A)|, \quad (14)$$

- wobei sich das Supremum in (14) über alle Zerlegungen  $\mathcal{Z}$  der Menge  $\mathbb{N}$  in endlich viele, paarweise disjunkte Teilmengen aus  $\mathcal{N}$  erstreckt.
- Beachte: Genauso wie in Abschnitt 3.6.1 kann man zeigen, dass

$$\|Q_1 - Q_2\| \leq 2 \sup_{A \in \mathcal{N}} |Q_1(A) - Q_2(A)|. \quad (15)$$

**Korollar 4.1** Sei  $B_k = [-1/k, 1/k]^d$  für jedes  $k \geq 1$ . Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_N^0 - P_k\| = 0, \quad (16)$$

wobei die (bedingte) Verteilung  $P_k$  gegeben ist durch

$$P_k(A) = P_N(\{\varphi \in \mathbb{N} : \mathbf{T}_{s^{(k)}(\varphi)}\varphi \in A\} \mid \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0\}) \quad \forall A \in \mathcal{N} \quad (17)$$

und  $s^{(k)}(\varphi)$  dasjenige Atom von  $\varphi$  in  $B_k$  bezeichnet, das den kleinsten Abstand vom Nullpunkt hat.

**Beweis**

- Für beliebige  $k \geq 1$  und  $A \in \mathcal{N}$  gilt offenbar

$$\begin{aligned} |P_N^0(A) - P_k(A)| &\leq \left| P_N^0(A) - \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \mathbf{T}_{s^{(k)}(\varphi)}\varphi \in A, \varphi(B_k) > 0)}{\lambda \nu_d(B_k)} \right| \\ &\quad + \left| \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\lambda \nu_d(B_k)} P_k(A) - P_k(A) \right| \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} |P_N^0(A) - P_k(A)| &\leq \left| P_N^0(A) - \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \mathbf{T}_{s^{(k)}(\varphi)}\varphi \in A, \varphi(B_k) > 0)}{\lambda \nu_d(B_k)} \right| + \left| \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\lambda \nu_d(B_k)} - 1 \right| \end{aligned}$$

- Hieraus ergibt sich mit Hilfe von Theorem 4.4, dass

$$\begin{aligned} &\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{N}} |P_N^0(A) - P_k(A)| \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{N}} \left| P_N^0(A) - \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \mathbf{T}_{s^{(k)}(\varphi)}\varphi \in A, \varphi(B_k) > 0)}{\lambda \nu_d(B_k)} \right| \\ &\stackrel{(6)}{\leq} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{N}} \frac{1}{\lambda \nu_d(B_k)} \left| \int_{\mathbb{N}} \sum_{n: s_n(\varphi) \in B_k} \mathbf{1}_A(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)}\varphi) P_N(d\varphi) \right. \\ &\quad \left. - P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \mathbf{T}_{s^{(k)}(\varphi)}\varphi \in A, \varphi(B_k) > 0) \right|. \end{aligned}$$

- Somit gilt, dass

$$\begin{aligned} &\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{N}} |P_N^0(A) - P_k(A)| \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{N}} \frac{1}{\lambda \nu_d(B_k)} \left| \int_{\{\varphi' : \varphi'(B_k) > 0\}} \left( \sum_{n: s_n(\varphi) \in B_k} \mathbf{1}_A(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)}\varphi) - \mathbf{1}_A(\mathbf{T}_{s^{(k)}(\varphi)}\varphi) \right) P_N(d\varphi) \right| \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \nu_d(B_k)} \left| \int_{\{\varphi' : \varphi'(B_k) > 0\}} (\varphi(B_k) - 1) P_N(d\varphi) \right| \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{P_N(\varphi : \varphi(B_k) > 0)}{\lambda \nu_d(B_k)} \right) \stackrel{\text{Theorem 4.4}}{=} 0. \end{aligned}$$

- Mit Hilfe von (15) ergibt sich hieraus die Behauptung. □

### 4.1.3 Reduzierte Palmische Verteilung; Satz von Slivnyak

- Manchmal ist es zweckmäßig, neben der in (5) bzw. (6) eingeführten Palmischen Verteilung  $P_N^0$ , noch die so genannte reduzierte Palmische Verteilung von stationären Punktprozessen zu betrachten.
- Dabei wird das Atom gestrichen, das bezüglich  $P_N^0$  mit Wahrscheinlichkeit 1 im Nullpunkt liegt (vgl. Theorem 4.2).
- Mit anderen Worten: Sei  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  eine beliebige beschränkte Borel-Menge mit  $0 < \nu_d(B) < \infty$ . Dann heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_N^! : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$P_N^!(A) = \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} \int_{\mathbb{N}} \sum_{n: s_n(\varphi) \in B} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)}\varphi - \delta_o) P_N(d\varphi) \quad (18)$$

die *reduzierte Palmische Verteilung* von  $\{N_B\}$ .

Mit Hilfe von Korollar 4.1 lässt sich die folgende einfache Darstellung der Palmischen Verteilungen  $P_N^!$  und  $P_N^0$  von homogenen Poisson-Prozessen herleiten, die in der Literatur der *Satz von Slivnyak* genannt wird.

**Theorem 4.5** Sei  $\{N_B\}$  ein homogener Poisson-Prozess. Dann gilt

$$P_N^! = P_N \quad (19)$$

bzw. (äquivalent hierzu)

$$P_N^0 = P_N * \delta_{\delta_o}, \quad (20)$$

wobei  $P_N * \delta_{\delta_o}$  die Verteilung des zufälligen Zählmaßes  $\{N_B + \delta_o(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  bezeichnet.

#### Beweis

- Aus Korollar 4.1 ergibt sich insbesondere, dass

$$P_N^0(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(A) \quad \forall A \in \mathcal{N}. \quad (21)$$

- Wegen Theorem 2.1 genügt es, den Grenzwert  $P_N^0(A)$  in (21) für Ereignisse  $A \in \mathcal{N}$  der Form

$$A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(C_1) \leq k_1, \dots, \varphi(C_n) \leq k_n\} \quad (22)$$

zu untersuchen, wobei  $n \geq 1$ ,  $k_1, \dots, k_n \geq 0$  beliebige natürliche Zahlen sind und  $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{Q}^d$  eine beliebige Folge von Quadern ist.

- Dabei setzen wir zunächst zusätzlich voraus, dass der Nullpunkt einen positiven Abstand von jedem der Quader  $C_1, \dots, C_n$  hat, d.h.,

$$o \in \text{int}(C_i^c) \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (23)$$

– Aus (21) und aus der Definitionsgleichung (17) von  $P_k$  ergibt sich dann, dass

$$\begin{aligned} & \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{P(N_{C_1 \oplus B_k} \leq k_1, \dots, N_{C_n \oplus B_k} \leq k_n, N_{B_k} > 0)}{P(N_{B_k} > 0)} \\ & \leq P_N^0(A) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{P(N_{C_1 \oplus B_k} \leq k_1, \dots, N_{C_n \oplus B_k} \leq k_n, N_{B_k} > 0)}{P(N_{B_k} > 0)}, \end{aligned}$$

wobei  $C \oplus B = \{x + y : x \in C, y \in B\}$  die Minkowski-Addition und  $C \ominus B = (C^c \oplus B^c)^c$  die Minkowski-Subtraktion bezeichnet.

– Wegen (23) gilt außerdem für jedes hinreichend große  $k$ , dass

$$(C_i \ominus B_k) \cap B_k = (C_n \oplus B_k) \cap B_k = \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

– Aus den Unabhängigkeitseigenschaften der Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  ergibt sich somit, dass

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} P(N_{C_1 \oplus B_k} \leq k_1, \dots, N_{C_n \oplus B_k} \leq k_n) &\leq P_N^0(A) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} P(N_{C_1 \ominus B_k} \leq k_1, \dots, N_{C_n \ominus B_k} \leq k_n) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} P_N^0(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(C_1) \leq k_1, \dots, \varphi(C_n) \leq k_n) &= P(N_{C_1} \leq k_1, \dots, N_{C_n} \leq k_n) \\ &= P(N_{C_1} + \delta_o(C_1) \leq k_1, \dots, N_{C_n} + \delta_o(C_1) \leq k_n). \end{aligned}$$

- Hieraus und aus der Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen bezüglich monotoner Grenzübergänge ergibt sich die Gültigkeit von

$$P_N^0(A) = (P_N * \delta_{\delta_o})(A) \quad (24)$$

für diejenigen der in (22) betrachteten Ereignisse  $A \in \mathcal{N}$ , so dass der Nullpunkt nicht im Inneren einer der Quader  $C_1, \dots, C_n$  liegt, d.h.,

$$o \notin (\text{int } C_1 \cup \dots \cup \text{int } C_n). \quad (25)$$

- Wenn (25) nicht gilt, dann können wir diejenigen Quader  $C_i$  mit  $o \in \text{int } C_i$  jeweils in zwei Teilquader zerlegen können, so dass danach (25) gilt.
- Hieraus folgt, dass (24) für jedes der in (22) betrachteten Ereignisse  $A \in \mathcal{N}$  gilt.  $\square$

**Beispiel** Sei  $\{N_B\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$ .

- Dann können wir die in Theorem 4.5 gegebenen Darstellungsformeln (19) und (20) für die Palmsche Verteilungen  $P_N^!$  bzw.  $P_N^0$  anwenden, um beispielsweise die *Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion*  $D : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  mit

$$D(r) = P_N^!(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r)) > 0) \quad \forall r > 0 \quad (26)$$

des typischen Punktes des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  zu bestimmen.

- Hierfür setzen wir in (19) das Ereignis  $A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r)) > 0\}$  für jedes  $r > 0$  ein und erhalten, dass

$$D(r) = P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r)) > 0) = 1 - \exp(-\lambda \kappa_d r^d) \quad \forall r > 0, \quad (27)$$

wobei  $\kappa_d$  das Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

#### 4.1.4 Typische Zelle von Poisson-Voronoi-Mosaiken; Simulationsalgorithmus

Ein anderes Anwendungsbeispiel von Theorem 4.5 führt zu der folgenden (lokalen) Darstellung der typischen Zelle von Poisson-Voronoi-Mosaiken.

- Hierfür ordnen wir jedem Punkt  $S_n$  des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  die *Voronoi-Zelle*  $\Xi_n$  zu, wobei

$$\Xi_n = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - S_n| \leq |x - S_m| \forall m \neq n\}, \quad (28)$$

- d.h.,  $\Xi_n$  ist die (zufällige) Menge derjenigen  $x \in \mathbb{R}^d$ , deren Abstand von  $S_n$  nicht größer ist als die Abstände zwischen  $x$  und allen anderen Punkten  $S_m$ ,  $m \neq n$  des Poisson-Prozesses.

- Beachte: Aus der Definitionsgleichung (28) von  $\Xi_n$  ergibt sich, dass  $\Xi_n$  mit Wahrscheinlichkeit 1 ein beschränktes und konvexes Polygon ist.
- Die Folge  $\{\Xi_n\}$  der Voronoi-Zellen  $\Xi_n$  wird dann *Poisson-Voronoi-Mosaik* genannt. Dabei sagt man, dass  $S_n$  der *Nucleus* von  $\Xi_n$  ist.
- Mit Hilfe von Theorem 4.5 erkennen wir nun,
  - dass die Verteilung der sogenannten *typischen Zelle* des Poisson-Voronoi-Mosaiks, d.h., die Verteilung der Zelle des typischen Punktes des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$ , gegeben ist
  - durch die Verteilung der (zufälligen) Voronoi-Zelle

$$\Xi^* = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq |x - S_n| \forall n \geq 1\} \quad (29)$$

des Nullpunktes  $o \in \mathbb{R}^d$  bezüglich der Punkte  $\{S_n\}$  des homogenen Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$ .

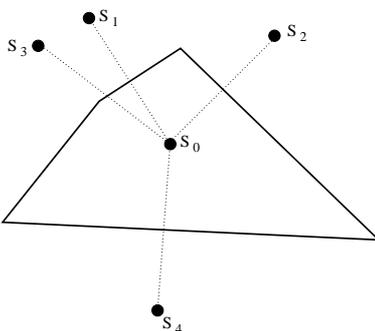


Abbildung 19: Initialzelle

Dies liefert einen effizienten *Algorithmus zur (lokalen) Monte-Carlo-Simulation* der typischen Zelle von Poisson-Voronoi-Mosaiken, wobei wir uns hier aus Gründen der Einfachheit auf die Beschreibung des planaren Falles  $d = 2$  beschränken.

- Der Algorithmus besteht aus zwei Teilen, wobei jeweils eine gewisse Anzahl von Punkten  $S_1, S_2, \dots$  des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  mit dem Algorithmus zur radialen Simulation von homogenen Poisson-Prozessen erzeugt wird, der in Abschnitt 2.2.1 eingeführt worden ist.
- Zunächst werden so viele Punkte  $S_1, S_2, \dots$  erzeugt, bis sich durch die Mittelsenkrechten der Strecken  $(o, S_1), (o, S_2), \dots$  ein beschränktes (und konvexes) Polygon um den Nullpunkt bilden lässt, das *Initialzelle* genannt wird, vgl. Abbildung 19.
  - Die Konstruktion der Initialzelle kann mit Hilfe der folgenden *Stoppregel* erfolgen.
  - Zuerst werden die Punkte  $S_1, S_2$  und  $S_3$  erzeugt. Dabei wird der Sektor  $\Sigma_{S_1, S_2}$  betrachtet, der durch die beiden Geraden  $\overline{o, -S_1}$  und  $\overline{o, -S_2}$  gebildet wird.
  - Wenn  $S_3 \in \Sigma_{S_1, S_2}$ , dann stoppt der Algorithmus und die Initialzelle wird durch die Mittelsenkrechten der Strecken  $(o, S_1), (o, S_2)$  und  $(o, S_3)$  gebildet.
  - Wenn  $S_3 \notin \Sigma_{S_1, S_2}$ , dann wird der größte Sektor  $\Sigma_{S_1, S_2, S_3}$  betrachtet, der durch die Geraden  $\overline{o, -S_1}, \overline{o, -S_2}$  und  $\overline{o, -S_3}$  gebildet werden kann.
  - Anschließend wird der Punkt  $S_4$  erzeugt und geprüft, ob  $S_4 \in \Sigma_{S_1, S_2, S_3}$ .
  - Wenn  $S_4 \in \Sigma_{S_1, S_2, S_3}$ , dann stoppt der Algorithmus und die Initialzelle wird durch die Mittelsenkrechten der Strecken  $(o, S_1), (o, S_2), (o, S_3)$  und  $(o, S_4)$  gebildet.
  - Wenn  $S_4 \notin \Sigma_{S_1, S_2, S_3}$ , dann wird das Verfahren so lange fortgesetzt, bis  $S_{i+1} \in \Sigma_{S_1, \dots, S_i}$ ,
  - und die Initialzelle wird durch die Mittelsenkrechten der Strecken  $(o, S_1), \dots, (o, S_i)$  gebildet.

- Danach wird geprüft, ob die Initialzelle mit der in (29) gegebenen typischen Zelle  $\Xi^*$  übereinstimmt oder ob die Initialzelle noch durch die Erzeugung weiterer Punkte des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  verkleinert werden muss.
  - Sei  $r_{\max}$  das Maximum der Abstände der Eckpunkte der Initialzelle vom Nullpunkt.
  - Dann können nur diejenigen Punkte  $S_n$  des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  die Gestalt der typischen Zelle  $\Xi^*$  beeinflussen, für die  $|S_n| \leq 2r_{\max}$  gilt.
  - Die Erzeugung der Punkte  $S_1, S_2, \dots$  mit dem Algorithmus zur radialen Simulation von homogenen Poisson-Prozessen kann also spätestens dann gestoppt werden, wenn  $|S_n| > 2r_{\max}$ .
  - Durch die Mittelsenkrechten der Strecken  $(o, S_{i+1}), \dots, (o, S_{i+2}), \dots$  können Teilbereiche der Initialzelle wegfallen,
  - wodurch sich der Maximalabstand  $r_{\max}$  der Eckpunkte verringern und der Algorithmus gegebenenfalls früher gestoppt werden kann.

### Beachte

- Jeder Durchlauf des oben beschriebenen Algorithmus liefert eine Realisierung  $\xi^*$  der typischen Zelle  $\Xi^*$ .
- Auf der Grundlage der Realisierungen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  von  $\Xi^*$ , die sich aus einer großen Anzahl  $n$  solcher Runs ergeben, können statistische Schätzer konstruiert werden, um (Verteilungs-) Eigenschaften von geometrischen Kenngrößen der typischen Zelle  $\Xi^*$  zu bestimmen.
- Beispielsweise können auf diese Weise die Verteilungen der Eckenzahl, der Randlänge bzw. des Flächeninhaltes von  $\Xi^*$  bestimmt werden.

## 4.2 Campbellsche Maße; Beispiele von Palmschen Verteilungen

### 4.2.1 Produktdarstellung des reduzierten Campbellschen Maßes von Poisson-Prozessen

Wir verallgemeinern nun den Satz von Slivnyak, d.h., die in Theorem 4.5 hergeleitete Formel (19) zur Darstellung der reduzierten Palmschen Verteilung  $P_N^!$ .

Dabei betrachten wir in diesem Abschnitt zunächst den Fall von beliebigen (inhomogenen) Poisson-Prozessen  $\{N_B\}$ . Hierfür ist der Begriff des Campbellschen Maßes bzw. des reduzierten Campbellschen Maßes von zufälligen Zählmaßen nützlich.

**Definition** Sei  $\{N_B\}$  ein beliebiges zufälliges Zählmaß mit der Verteilung  $P_N$  über  $\mathcal{N}$ .

- Dann heißt das Maß  $\gamma : \mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  mit

$$\gamma(A \times B) = \int_{\mathcal{N}} \varphi(B) \mathbb{1}_A(\varphi) P_N(d\varphi) \quad \forall A \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (30)$$

das *Campbellsche Maß* von  $\{N_B\}$ .

- Außerdem wird das Maß  $\gamma^! : \mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  mit

$$\gamma^!(A \times B) = \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_A(\varphi - \delta_x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \quad \forall A \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (31)$$

betrachtet, das das *reduzierte Campbellsche Maß* von  $\{N_B\}$  genannt wird.

**Beachte** Mit algebraischer Induktion kann man zeigen, dass die Definitionsgleichungen (30) und (31) von  $\gamma$  bzw.  $\gamma^!$  äquivalent sind mit

$$\int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \gamma(d(\varphi, x)) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \quad (32)$$

bzw.

$$\int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \gamma^!(d(\varphi, x)) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi - \delta_x, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \quad (33)$$

für jede  $(\mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}([0, \infty)))$ -messbare Funktion  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ .

Das folgende Resultat kann als eine Verallgemeinerung der Darstellungsformel (19) aufgefasst werden, die in Theorem 4.5 für den Fall homogener Poisson-Prozesse hergeleitet wurde.

**Theorem 4.6** Sei  $\{N_B\}$  ein beliebiger Poisson-Prozess mit dem (diffusen und lokal endlichen) Intensitätsmaß  $\mu$ . Dann gilt

$$\gamma^! = P_N \times \mu. \quad (34)$$

**Beweis** Wir zerlegen den Beweis in mehrere Schritte.

1) Zunächst zeigen wir, dass die Produktformel

$$\gamma^!(A \times B) = P_N(A) \mu(B) \quad (35)$$

für jede beschränkte Borel-Menge  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  und für jedes  $A \in \mathcal{N}$  der folgenden Gestalt gilt:

$$A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B') = j\}, \quad \text{wobei } B' \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d), j \in \{0, 1, \dots\}.$$

- Hierfür genügt es, die Gültigkeit von (35) für die Fälle

$$1a) \quad B \subset B' \quad \text{und} \quad 1b) \quad B \cap B' = \emptyset$$

zu zeigen, weil jede Borel-Menge  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  in der Form  $B = (B \cap B') \cup (B \setminus B')$  dargestellt werden kann und weil dann

$$\begin{aligned} \gamma^!(A \times B) &= \gamma^!(A \times ((B \cap B') \cup (B \setminus B'))) \\ &= \gamma^!(A \times (B \cap B')) + \gamma^!(A \times (B \setminus B')) \\ &= P_N(A) \mu(B \cap B') + P_N(A) \mu(B \setminus B') \\ &= P_N(A) \mu(B). \end{aligned}$$

- Im Fall 1a) ergibt sich aus der Definitionsgleichung (31) des reduzierten Campbell'schen Maßes  $\gamma^!$ , dass

$$\begin{aligned} \gamma^!(A \times B) &= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_A(\varphi - \delta_x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \sum_{k=0}^j \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N} : \varphi'(B) = k, \varphi'(B' \setminus B) = j - k\}}(\varphi - \delta_x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \sum_{k=0}^j \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N} : \varphi'(B) = k+1, \varphi'(B' \setminus B) = j - k\}}(\varphi) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \sum_{k=0}^j \int_{\mathbb{N}} (k+1) \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N} : \varphi'(B) = k+1, \varphi'(B' \setminus B) = j - k\}}(\varphi) P_N(d\varphi). \end{aligned}$$

- Hieraus und aus den Unabhängigkeits- bzw. Verteilungseigenschaften des Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}
\gamma^!(A \times B) &= \sum_{k=0}^j (k+1) P(N(B) = k+1) P(N(B' \setminus B) = j-k) \\
&= \mu(B) \sum_{k=0}^j \frac{\mu^k(B)}{k!} e^{-\mu(B)} P(N(B' \setminus B) = j-k) \\
&= \mu(B) \sum_{k=0}^j P(N(B) = k) P(N(B' \setminus B) = j-k) \\
&= \mu(B) \sum_{k=0}^j P(N(B) = k, N(B' \setminus B) = j-k) \\
&= P(N(B') = j) \mu(B) = P_N(A) \mu(B).
\end{aligned}$$

- Im Fall 1b) ergibt sich auf ähnliche Weise aus (31), dass

$$\begin{aligned}
\gamma^!(A \times B) &= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N}: \varphi'(B')=j\}}(\varphi) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\
&= \int_{\mathbb{N}} \varphi(B) \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N}: \varphi'(B')=j\}}(\varphi) P_N(d\varphi) \\
&= \int_{\mathbb{N}} \varphi(B) P_N(d\varphi) \int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N}: \varphi'(B')=j\}}(\varphi) P_N(d\varphi) \\
&= P_N(A) \mu(B).
\end{aligned}$$

2) Wir zeigen nun die Gültigkeit von (35) für Mengen  $A \in \mathcal{N}$  der Gestalt

$$A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_1) = j_1, \dots, \varphi(B_n) = j_n\}, \quad (36)$$

wobei  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ ,  $j_1, \dots, j_n \in \{0, 1, \dots\}$ .

- Hierfür genügt es (ähnlich wie im ersten Beweisschritt) zu beachten, dass wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen können, dass die Mengen  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  paarweise disjunkt sind und dass einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

$$2a) \quad B \subset B_i \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{oder} \quad 2b) \quad B \cap \bigcup_{i=1}^n B_i = \emptyset.$$

- Im Fall 2a) können wir dann genauso wie in Beweisschritt 1a) vorgehen, um die Gültigkeit von (35) zu zeigen. Im Fall 2b) verläuft der Beweis so wie in Schritt 1b).

3) Aus der Gültigkeit von (35) für Mengen  $A \in \mathcal{N}$  der Gestalt (36) ergibt sich wegen der  $\sigma$ -Additivität der Maße  $\gamma^!$  und  $P_N$ , dass (35) auch für sämtliche Mengen  $A \in \mathcal{R} \subset \mathcal{N}$  gilt, wobei

$$\mathcal{R} = \left\{ \{\varphi \in \mathbb{N} : k_i \leq \varphi(B_i) < \ell_i, i = 1, \dots, n\}, n \geq 1, B_i \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d), k_i, \ell_i \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\} \right\}. \quad (37)$$

4) Weil  $\mathcal{R}$  ein Halbring ist, der die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N}$  erzeugt, ergibt sich mit Hilfe des Satzes über monotone Klassen (vgl. Lemma 3.5), dass (35) für jedes  $A \in \mathcal{N}$  gilt.

5) Durch die erneute Anwendung des Satzes über monotone Klassen ergibt sich nun, dass

$$\gamma^!(C) = (P_N \times \mu)(C)$$

für jedes  $C \in \mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  gilt. □

**Beachte**

- Wenn  $\{N_B\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$  ist, dann ergibt sich aus der in Theorem 4.6 hergeleiteten Produktformel (34), dass

$$\gamma^!(A \times B) = \lambda P_N(A) \nu_d(B) \quad \forall A \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (38)$$

- Außerdem ergibt sich mit Hilfe der Definitionsgleichungen (18) und (33) von  $P_N^!$  bzw.  $\gamma^!$ , dass für jedes  $A \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} P_N^!(A) &\stackrel{(18)}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{N}} \int_{[0,1]^d} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi - \delta_o) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x(\varphi - \delta_x)) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi - \delta_x, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &\stackrel{(33)}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \gamma^!(d(\varphi, x)) \end{aligned}$$

wobei  $f(\varphi, x) = \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi)$ .

- Hieraus ergibt sich nun mit Hilfe von (38), dass für jedes  $A \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} P_N^!(A) &\stackrel{(38)}{=} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi) dx P_N(d\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi) P_N(d\varphi) dx \\ &\stackrel{\text{Stationarität von } \{N_B\}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_A(\varphi) P_N(d\varphi) dx \\ &= P_N(A). \end{aligned}$$

- Dies bedeutet, dass

$$P_N^! = P_N, \quad (39)$$

was mit einer anderen Beweistechnik bereits in Theorem 4.5 gezeigt worden ist.

**4.2.2 Palmische Verteilung von zufälligen Maßen; Cox-Prozesse**

Die Formel (39) zur Darstellung der reduzierten Palmischen Verteilung  $P_N^!$  von homogenen Poisson-Prozessen lässt sich als Spezialfall allgemeinerer Darstellungsformeln für die reduzierte Palmische Verteilung von stationären Cox-Prozessen bzw. von stationären Poissonschen Cluster-Prozessen auffassen.

Wir betrachten zunächst eine Verallgemeinerung der Formel (39) für stationäre Cox-Prozesse. Hierfür benötigen wir den Begriff der Palmischen Verteilung von stationären (Intensitäts-) Maßen.

**Definition**

- Sei  $\{\Lambda_B\}$  ein stationäres zufälliges Maß, beispielsweise das zufällige Intensitätsmaß eines stationären Cox-Prozesses.
- Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_\Lambda^0 : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$P_\Lambda^0(A) = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \eta) \eta(dx) P_\Lambda(d\eta) \quad \forall A \in \mathcal{M} \quad (40)$$

heißt die *Palmische Verteilung* des stationären zufälligen Maßes  $\{\Lambda_B\}$ ,

- wobei  $\lambda = \mathbb{E} \Lambda([0, 1]^d)$  und  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  eine Borel-messbare Funktion ist mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 1. \quad (41)$$

### Beachte

- Man kann sich leicht überlegen, dass das in (40) gegebene Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_\Lambda^0$  nicht von der Wahl der Funktion  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  abhängt.
- Insbesondere kann  $g(x) = \mathbb{1}_B(x)/\nu_d(B)$  gesetzt werden für jede beschränkte Borel-Menge  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(B) < \infty$ .
- Dann wird klar, dass (40) eine Verallgemeinerung der Definitionsgleichung (6) für die Palm'sche Verteilung von stationären Zählmaßen ist.
- Mit algebraischer Induktion kann man zeigen, dass die Definitionsgleichung (40) der Palm'schen Verteilung  $P_\Lambda^0$  des stationären zufälligen Maßes  $\{\Lambda_B\}$  äquivalent ist mit

$$\int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\eta, x) dx P_\Lambda^0(d\eta) = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{T}_x \eta, x) \eta(dx) P_\Lambda(d\eta) \quad (42)$$

für jede  $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}([0, \infty)))$ -messbare Funktion  $f : \mathbb{M} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ .

Ein wichtiger Spezialfall liegt dann vor,

- wenn die Realisierungen des zufälligen Maßes  $\{\Lambda_B\}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 absolutstetig bezüglich des  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes sind, d.h.,
- wenn es ein zufälliges Feld  $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  gibt, dessen Realisierungen Borel-messbare und lokal-integrierbare nichtnegative Funktionen sind, so dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\Lambda_B = \int_B \lambda_x dx < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (43)$$

- Eine Klasse von Beispielen hierfür liefern die zufälligen Intensitätsmaße von modulierten Poisson-Prozessen, vgl. Abschnitt 3.2.3.

Für stationäre zufällige Maße  $\{\Lambda_B\}$  mit absolutstetigen Realisierungen lässt sich die Definitionsgleichung (40) der Palm'schen Verteilung  $P_\Lambda^0$  wie folgt vereinfachen.

**Theorem 4.7** *Sei  $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  ein stationäres zufälliges Feld, dessen Realisierungen Borel-messbare und lokal-integrierbare nichtnegative Funktionen sind, und das stationäre zufällige Maß  $\{\Lambda_B\}$  sei durch (43) gegeben. Dann gilt*

$$P_\Lambda^0(A) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E} (\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\}) \lambda_o) \quad \forall A \in \mathcal{M}. \quad (44)$$

### Beweis

- Für die in (40) betrachtete Funktion  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  setzen wir  $g(x) = \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x)$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ .
- Wegen (43) lässt sich dann die rechte Seite von (40) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} P_\Lambda^0(A) &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \eta) \eta(dx) P_\Lambda(d\eta) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{[0,1]^d} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \eta) \frac{d\eta}{dx}(x) dx P_\Lambda(d\eta) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{[0,1]^d} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \eta) \frac{d(\mathbf{T}_x \eta)}{dx}(o) dx P_\Lambda(d\eta). \end{aligned}$$

- Hieraus ergibt sich durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge, dass für jedes  $A \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}
P_\Lambda^0(A) &= \frac{1}{\lambda} \int_{[0,1]^d} \int_{\mathbb{M}} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \eta) \frac{d(\mathbf{T}_x \eta)}{dx} (o) P_\Lambda(d\eta) dx \\
&\stackrel{\text{Stationarität von } \{\Lambda_B\}}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{[0,1]^d} \int_{\mathbb{M}} \mathbb{1}_A(\eta) \frac{d\eta}{dx} (o) P_\Lambda(d\eta) dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \mathbb{1}_A(\eta) \frac{d\eta}{dx} (o) P_\Lambda(d\eta) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\})\lambda_o). \quad \square
\end{aligned}$$

### Beispiel

- Wir betrachten das Intensitätsfeld von modulierten Poisson-Prozessen, vgl. Abschnitt 3.2.3.
- D.h., das zufällige Feld  $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  sei gegeben durch den Ansatz

$$\lambda_x = \begin{cases} \lambda_1, & \text{falls } x \in \Xi, \\ \lambda_2, & \text{falls } x \notin \Xi, \end{cases} \quad (45)$$

- wobei  $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$  beliebige Zahlen mit  $\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$  sind,
- die (zufällige) Menge  $\Xi$  gegeben ist durch  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)$ ,
- und  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda_0 \in (0, \infty)$  ist.

- Dann ergibt sich aus (44) und (45), dass

$$P_\Lambda^0(A) = \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\})\mathbb{1}_\Xi(o)) + \lambda_2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\})\mathbb{1}_{\Xi^c}(o))}{\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)} \quad \forall A \in \mathcal{M}. \quad (46)$$

- Denn für jedes  $A \in \mathcal{M}$  gilt

$$\begin{aligned}
P_\Lambda^0(A) &= \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\})\lambda_o) \\
&= \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\})\mathbb{1}_\Xi(o)) + \lambda_2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\})\mathbb{1}_{\Xi^c}(o))}{\lambda_1 \mathbb{E} \mathbb{1}_\Xi(o) + \lambda_2 \mathbb{E} \mathbb{1}_{\Xi^c}(o)} \\
&= \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\})\mathbb{1}_\Xi(o)) + \lambda_2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\})\mathbb{1}_{\Xi^c}(o))}{\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)},
\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Formel (3.67) in Lemma 3.3 ergibt und  $\kappa_d$  das Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Wir leiten nun eine Verallgemeinerung des Satzes von Slivnyak (vgl. Formel (19) in Theorem 4.5) für die reduzierte Palmische Verteilung von stationären Cox-Prozessen her.

**Theorem 4.8** *Sei  $\{N_B\}$  ein stationärer Cox-Prozess mit dem (stationären) zufälligen Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B\}$ . Dann ist die reduzierte Palmische Verteilung  $P_N^1 : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  von  $\{N_B\}$  gegeben durch*

$$P_N^1(A) = \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_\Lambda^0(d\eta) \quad \forall A \in \mathcal{N}, \quad (47)$$

wobei  $Q_\eta : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  die Verteilung eines Poisson-Prozesses mit dem Intensitätsmaß  $\eta$  bezeichnet.

**Beweis**

- Die Definitionsgleichungen (3.25) bzw. (3.26) des Cox-Prozesses  $\{N_B\}$  sind äquivalent mit

$$P_N(A) = \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_\Lambda(d\eta) \quad \forall A \in \mathcal{N}. \quad (48)$$

- Hieraus und aus der Definitionsgleichung (18) von  $P_N^!$  ergibt sich, dass für jedes  $A \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} P_N^!(A) &\stackrel{(18)}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{N}} \int_{[0,1]^d} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi - \delta_o) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &\stackrel{(48)}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{N}} \int_{[0,1]^d} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi - \delta_o) \varphi(dx) Q_\eta(d\varphi) P_\Lambda(d\eta) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x(\varphi - \delta_x)) \varphi(dx) Q_\eta(d\varphi) P_\Lambda(d\eta) \\ &\stackrel{(33)}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi) \gamma_\eta^!(d(\varphi, x)) P_\Lambda(d\eta), \end{aligned}$$

wobei  $\gamma_\eta^!$  das reduzierte Campbellsche Maß eines (im allgemeinen inhomogenen) Poisson-Prozesses mit dem Intensitätsmaß  $\eta$  bezeichnet.

- Aus der Darstellungsformel (34) für das reduzierte Campbellsche Maß  $\gamma_\eta^!$ , die in Theorem 4.6 hergeleitet worden ist, ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} P_N^!(A) &\stackrel{(34)}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi) Q_\eta(d\varphi) \eta(dx) P_\Lambda(d\eta) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) Q_\eta(\mathbf{T}_{-x} A) \eta(dx) P_\Lambda(d\eta) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) Q_{\mathbf{T}_x \eta}(A) \eta(dx) P_\Lambda(d\eta) \\ &\stackrel{(42)}{=} \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_\Lambda^0(d\eta), \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Definitionsgleichung (42) der Palmischen Verteilung  $P_\Lambda^0$  von  $\{\Lambda_B\}$  ergibt.  $\square$

**Beachte** Aus der in Theorem 4.8 hergeleiteten Darstellungsformel (47) ergibt sich insbesondere,

- dass die reduzierte Palmische Verteilung  $P_N^!$  des stationären Cox-Prozesses  $\{N_B\}$  erneut die Verteilung eines Cox-Prozesses ist,
- wobei die Verteilung des zugehörigen zufälligen Intensitätsmaßes durch die Palmische Verteilung  $P_\Lambda^0$  von  $\{\Lambda_B\}$  gegeben ist.

### 4.2.3 Beispiele: modulierte Poisson-Prozesse, Cox-Prozesse auf Poissonschen Geradensystemen

#### 1. Modulierte Poisson-Prozesse

- Wir betrachten das stationäre zufällige Feld  $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ , wobei  $\lambda_x$  in (45) gegeben ist, und das stationäre zufällige Maß  $\{\Lambda_B\}$  mit  $\Lambda_B = \int_B \lambda_x dx$  für jedes  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
- Dann ist die Palmische Verteilung  $P_\Lambda^0$  von  $\{\Lambda_B\}$  durch (46) gegeben, d.h.,

$$P_\Lambda^0(A) = \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\}) \mathbb{1}_{\Xi}(o)) + \lambda_2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\}) \mathbb{1}_{\Xi^c}(o))}{\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)} \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

- Hieraus und aus Theorem 4.8 folgt, dass die reduzierte Palmische Verteilung  $P_N^!$  des stationären Cox-Prozesses  $\{N_B\}$  mit dem Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B\}$  gegeben ist durch

$$P_N^!(A) = p_c \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_{\Lambda|o \in \Xi}(d\eta) + (1 - p_c) \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_{\Lambda|o \notin \Xi}(d\eta), \quad (49)$$

wobei

$$p_c = \frac{\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d))}{\lambda}, \quad \lambda = \lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d) \quad (50)$$

und

$$P_{\Lambda|o \in \Xi}(A) = P(\{\Lambda_B\} \in A \mid o \in \Xi), \quad P_{\Lambda|o \notin \Xi}(A) = P(\{\Lambda_B\} \in A \mid o \notin \Xi) \quad (51)$$

- Denn aus (46) und (47) ergibt sich, dass für jedes  $A \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} P_N^!(A) &\stackrel{(47)}{=} \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_\Lambda^0(d\eta) \\ &\stackrel{(46)}{=} \frac{\lambda_1 \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) \mathbb{E}(\{\Lambda_B\} \in d\eta, o \in \Xi) + \lambda_2 \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) \mathbb{E}(\{\Lambda_B\} \in d\eta, o \notin \Xi)}{\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)} \\ &= \frac{\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d))}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_{\Lambda|o \in \Xi}(d\eta) \\ &\quad + \frac{\lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_{\Lambda|o \notin \Xi}(d\eta). \end{aligned}$$

- Beachte: Die in (50) eingeführte Größe  $p_c$  kann als
  - *bedingte Überdeckungswahrscheinlichkeit* des Nullpunktes durch die zufällige Menge

$$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)$$

aufgefasst werden, und zwar unter der Bedingung, dass in einer infinitesimal kleinen Umgebung des Nullpunktes ein Punkt von  $\{N_B\}$  liegt.

- Dies ergibt sich aus der Definitionsgleichung (6) der Palmischen Verteilung  $P_N^0$  des modulierten Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$  mit Hilfe der lokalen Charakterisierung Palmischer Wahrscheinlichkeiten, die in Abschnitt 4.1.2 diskutiert worden ist.
- Dabei ist die in (50) betrachtete Größe  $\lambda$  die Intensität des modulierten Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$ .

## 2. Cox-Prozesse auf Poissonschen Geradensystemen; Poissonsche Geradenmosaike

- Sei  $\lambda_\ell > 0$  eine beliebige positive Zahl. Wir führen zunächst den Begriff des homogenen (und isotropen) Poissonschen Geradenprozesses im  $\mathbb{R}^2$  mit der Intensität  $\lambda_\ell$  ein.
  - Hierfür betrachten wir den unabhängig markierten Poisson-Prozess  $\{(R_n, V_n)\}$ , wobei
    - $\{R_n, n \geq 1\}$  ein homogener Poisson-Prozess in  $\mathbb{R}$  mit der Intensität  $\lambda_\ell$  ist,
    - $\{V_n\}$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten (nichtnegativen) Zufallsvariablen ist mit  $V_n \sim U([0, \pi))$ ,
    - und die beiden Folgen  $\{R_n\}$  und  $\{V_n\}$  unabhängig sind.
  - Für jedes  $n \geq 1$  betrachten wir die (zufällige) Gerade  $\ell_{R_n, V_n}$  in  $\mathbb{R}^2$  mit

$$\ell_{R_n, V_n} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \cos V_n + x_2 \sin V_n = R_n\}.$$

- Dann sagt man, dass die (zufällige) Menge  $X_\ell = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{R_n, V_n}$  ein *Poissonscher Geradenprozess* im  $\mathbb{R}^2$  mit der *Intensität*  $\lambda_\ell$  ist.

- Beachte:

- Man kann zeigen, dass

$$\lambda_\ell = \mathbb{E} \nu_1(X_\ell \cap B) \quad (52)$$

für jedes  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  mit  $\nu_2(B) = 1$  gilt, wobei  $\nu_1(X_\ell \cap B)$  die Gesamtstreckenlänge von  $X_\ell$  in der Borel-Menge  $B$  bezeichnet, d.h.,  $\lambda_\ell$  ist die erwartete Gesamtstreckenlänge von  $X_\ell$  pro Flächeneinheit,

- und dass durch den Poissonschen Geradenprozess  $X_\ell$  eine Folge  $\{\Xi_n, n \geq 1\}$  von (zufälligen) kompakten und konvexen Polygonen induziert wird, so dass

(i)  $\text{int } \Xi_i \cap \text{int } \Xi_j = \emptyset$  für beliebige  $i, j \geq 1$  mit  $i \neq j$ ,

(ii)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n = \mathbb{R}^2$  und  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \partial \Xi_n = X_\ell$ ,

- Beachte: Aus den Eigenschaften (i) und (ii) ergibt sich insbesondere, dass  $[x, x'] \cap X_\ell = \emptyset$  für beliebige  $x, x' \in \text{int } \Xi_n$  und  $n \geq 1$ .

- Dabei sagt man, dass  $\{\Xi_n, n \geq 1\}$  ein (stationäres und isotropes) *Poissonsches Geradenmosaik* mit der *Intensität*  $\lambda_\ell$  ist. Die zufälligen Polygone  $\Xi_1, \Xi_2, \dots$  werden die *Zellen* des Mosaiks genannt, vgl. Abbildung 20.

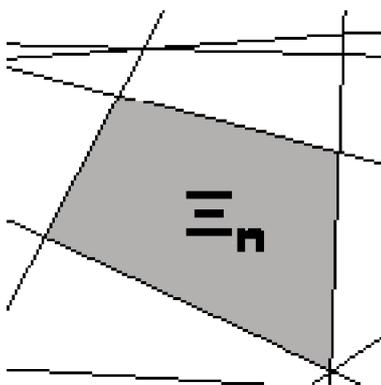


Abbildung 20: Zelle eines Poissonschen Geradenmosaiks

- Sei  $\lambda^{(1)} > 0$  eine beliebige positive Zahl, und das stationäre zufällige Maß  $\{\Lambda_B\}$  sei gegeben durch

$$\Lambda_B = \lambda^{(1)} \nu_1(X_\ell \cap B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \quad (53)$$

- Eine Realisierung eines Cox-Prozesses mit dem in (53) betrachteten zufälligen Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B\}$  ist in Abbildung 21 gegeben.

- Ähnlich wie beim Beweis des Satzes von Slivniak (vgl. die Beweise der Theoreme 4.5 bzw. 4.8) ergibt sich

(i) aus den Unabhängigkeitseigenschaften des Poisson-Prozesses  $\{(R_n, V_n)\}$ , der den Poissonschen Geradenprozess  $X_\ell = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{R_n, V_n}$  generiert,

(ii) und aus der Definitionsgleichung (40) der Palmischen Verteilung  $P_\Lambda^0$  des stationären zufälligen Maßes  $\{\Lambda_B\}$ ,

- dass die Palmische Verteilung  $P_\Lambda^0$  gegeben ist durch

$$P_\Lambda^0(A) = P(\{\Lambda_B^0\} \in A) \quad \forall A \in \mathcal{M}, \quad (54)$$

wobei

$$\Lambda_B^0 = \lambda^{(1)} \nu_1((\ell_{o, V_0} \cup X_\ell) \cap B) \quad (55)$$

und  $V_0 : \Omega \rightarrow [0, \pi)$  eine nichtnegative Zufallsvariable mit  $V_0 \sim U([0, \pi))$  ist, die von  $\{(R_n, V_n)\}$  unabhängig ist.

- Beachte: Die in (54) und (55) gegebene Palmische Verteilung  $P_\Lambda^0$  von  $\{\Lambda_B\}$  ist die Verteilung des zufälligen Maßes  $\{\Lambda_B^0\}$ , dass sich ergibt, indem

- nicht nur die Gesamtstreckenlänge  $\Lambda_B$  des Poissonschen Geradenprozesses  $X_\ell$  in  $B$ ,
- sondern außerdem noch die Länge der Schnittmenge  $\ell_{o, V_0} \cap B$  betrachtet wird, die durch die zusätzlich hinzugefügte (und durch den Nullpunkt verlaufende) Gerade  $\ell_{o, V_0}$  entsteht.
- Hieraus und aus Theorem 4.8 folgt,
  - dass die reduzierte Palmische Verteilung  $P_N^!$  des stationären Cox-Prozesses  $\{N_B\}$  mit dem Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B\}$  gegeben ist
  - durch die Verteilung der Vereinigungsmenge der Atome der (linearen) homogenen Poisson-Prozesse mit der Intensität  $\lambda^{(1)}$ , die auf den Geraden des Geradenprozesses  $\ell_{o, V_0} \cup X_\ell$  liegen.

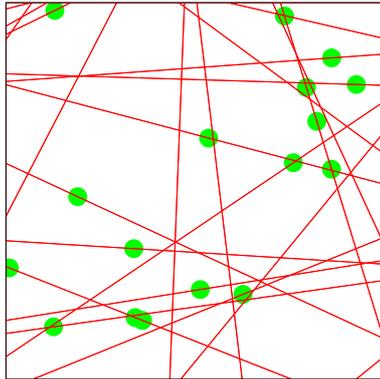


Abbildung 21: Cox-Prozess auf Poissonschem Geradensystem

#### 4.2.4 Typische Zelle von Cox-Voronoi-Mosaiken; Simulationsalgorithmen

In diesem Abschnitt betrachten wir Voronoi-Mosaiken, die durch Cox-Prozesse generiert werden, und sprechen deshalb von *Cox-Voronoi-Mosaiken*. Insbesondere betrachten wir Cox-Voronoi-Mosaiken, die durch modulierte Poisson-Prozesse bzw. durch Cox-Prozesse auf Poissonschen Geradensystemen generiert werden.

##### 1. Modulierte Poisson-Prozesse

- Sei  $\{\tilde{S}_n\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines modulierten Poisson-Prozesses  $\{N_B\}$ , und sei  $\{\Xi_n\}$  das zugehörige Cox-Voronoi-Mosaik, d.h.,

$$\Xi_n = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - \tilde{S}_n| \leq |x - \tilde{S}_m| \forall m \neq n\}, \quad (56)$$

wobei man sich leicht überlegen kann, dass die in (56) gegebenen Zellen  $\Xi_n$  mit Wahrscheinlichkeit 1 kompakte und konvexe Polygone sind.

- Aus der Darstellungsformel (49) für die reduzierte Palmische Verteilung  $P_N^!$  des Cox-Prozesses  $\{N_B\}$  ergibt sich, dass
  - dass die Verteilung der typischen Zelle des Cox-Voronoi-Mosaiks  $\{\Xi_n\}$ , d.h., die Verteilung der Zelle des typischen Punktes des Cox-Prozesses  $\{N_B\}$ , gegeben ist
  - durch die Verteilung der (zufälligen) Voronoi-Zelle

$$\Xi^* = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq |x - S_n^!| \forall n \geq 1\} \quad (57)$$

des Nullpunktes  $o \in \mathbb{R}^d$  bezüglich der Punkte  $\{S_n^!\}$  des Cox-Prozesses  $\{N_B^!\}$  mit der in (49)–(51) gegebenen Verteilung  $P_N^!$ .

Dies führt zu dem folgenden Algorithmus zur Monte–Carlo–Simulation der typischen Zelle  $\Xi^*$  des Cox–Voronoi–Mosaiks  $\{\Xi_n\}$ , der auf der radialen Simulation der Punkte  $\{S_n^!\}$  des Cox–Prozesses  $\{N_B^!\}$  beruht. Dabei beschränken wir uns hier auf die Beschreibung des planaren Falles  $d = 2$ .

- Wegen der in (49)–(51) gegebenen Darstellung der Verteilung  $P_N^!$  wird zunächst
  - ein Bernoulli–Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit  $p_c$  durchgeführt,
  - um zwischen den beiden Fällen unterscheiden zu können, ob der Nullpunkt von der zufälligen Menge  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)$  überdeckt wird oder nicht,
  - wobei  $p_c$  die in (50) gegebene bedingte Überdeckungswahrscheinlichkeit ist und  $\{S_n\}$  die radiale Indizierung der Atome eines homogenen Poisson–Prozesses mit der Intensität  $\lambda_0$  ist.
- Wenn  $o \in \Xi$ , dann wird die Zufallsvariable  $|S_1|$  unter der Bedingung simuliert, dass  $|S_1| \leq r$ . Ansonsten (d.h., wenn  $o \notin \Xi$ ) wird  $|S_1|$  unter der Bedingung simuliert, dass  $S_1 > r$ .
  - Hierfür kann der in Abschnitt 2.2.1 dargelegte Algorithmus zur radialen Simulation von homogenen Poisson–Prozessen verwendet werden, zusammen mit dem üblichen Akzeptanz– und Verwerfungsverfahren.
  - D.h., wenn beispielsweise  $|S_1|$  unter der Bedingung  $|S_1| \leq r$  simuliert werden soll, dann wird eine Realisierung von  $|S_1|$  akzeptiert, wenn  $|S_1| \leq r$ .
  - Ansonsten (d.h., wenn  $|S_1| > r$ ) wird die Realisierung von  $|S_1|$  verworfen und eine neue Realisierung von  $|S_1|$  generiert, usw.
  - Danach wird der Winkel  $U_1$  mit  $U_1 \sim U([0, 2\pi))$  simuliert, wodurch sich der Punkt  $S_1$  mit der Darstellung  $S_1 = (|S_1|, U_1)$  in Polarkoordinaten ergibt.
  - Später werden (falls erforderlich) noch die Abstände  $|S_2|, |S_3|, \dots$  und die Winkel  $U_2, U_3, \dots$  von weiteren Punkten generiert, und zwar so wie dies in Abschnitt 2.2.1 beschrieben wurde.
- Bei der Simulation der Punkte  $\{S_n^!\}$  des Cox–Prozesses  $\{N_B^!\}$  kann man nun wie folgt vorgehen.
  - Zunächst wird der Punkt  $S_1^!$  eines homogenen Poisson–Prozesses  $\{S_n^!\}$  im  $\mathbb{R}^2$  mit der Intensität  $\lambda_{\max} = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$  generiert, der den kleinsten Abstand vom Nullpunkt hat, wobei wir (o.B.d.A.) annehmen, dass  $\lambda_1 > \lambda_2$ .
    - (i) Dabei wird geprüft, ob  $S_1^! \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)$ .
    - (ii) Wenn  $S_1^! \in B(S_1, r)$ , dann wird  $S_1^!$  akzeptiert und  $S_1^! = S_1^!$  gesetzt.
    - (iii) Ansonsten werden weitere Abstände  $|S_2|, |S_3|, \dots, |S_n|$  und Winkel  $U_2, U_3, \dots, U_n$  generiert, so lange bis  $|S_n| > S_1^! + r$ .
    - (iv) Wenn  $S_1^! \in \bigcup_{i=1}^{n-1} B(S_i, r)$ , dann wird  $S_1^!$  akzeptiert und  $S_1^! = S_1^!$  gesetzt.
    - (v) Ansonsten, d.h., wenn  $S_1^! \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} B(S_i, r)$ , wird ein Bernoulli–Experiment durchgeführt, wobei  $S_1^!$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\lambda_2/\lambda_1$  verworfen wird.
  - Danach wird  $S_2^!$  generiert und geprüft, ob  $S_2^! \in \bigcup_{i=1}^n B(S_i, r)$ .
    - (i) Wenn  $S_2^! \in \bigcup_{i=1}^n B(S_i, r)$ , dann wird  $S_2^!$  akzeptiert.
    - (ii) Ansonsten werden weitere Abstände  $|S_{n+1}|, \dots, |S_{n+m}|$  und Winkel  $U_{n+1}, \dots, U_{n+m}$  generiert, bis  $|S_{n+m}| > S_2^! + r$ .
    - (iii) Wenn  $S_2^! \in \bigcup_{i=1}^{n+m-1} B(S_i, r)$ , dann wird  $S_2^!$  akzeptiert, und wir setzen
 
$$S_2^! = \begin{cases} S_1^!, & \text{falls } S_1^! \text{ gelöscht wurde,} \\ S_2^!, & \text{falls } S_1^! \text{ akzeptiert wurde.} \end{cases}$$
    - (iv) Ansonsten wird erneut ein Bernoulli–Experiment durchgeführt, wobei  $S_2^!$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\lambda_2/\lambda_1$  verworfen wird.
  - Auf die gleiche Weise wird  $S_3^!$  generiert und geprüft, ob  $S_3^!$  ein Atom des Cox–Prozesses  $\{N_B^!\}$  ist, usw.
- Genauso wie bei der Simulation der typischen Zelle von Poisson–Voronoi–Mosaiken wird die folgende *Stoppregel* verwendet; vgl. Abschnitt 4.1.4:

- Die radiale Generierung von Punkten  $\{S_n^!\}$  des Cox-Prozesses  $\{N_B^!\}$  zunächst so lange fortgesetzt, bis sich durch die Mittelsenkrechten der Strecken  $(o, S_1^!), (o, S_2^!), \dots$  ein beschränktes (und konvexes) Polygon um den Nullpunkt bilden lässt, das *Initialzelle* genannt wird.
- Danach wird geprüft, ob die Initialzelle mit der in (57) gegebenen typischen Zelle  $\Xi^*$  übereinstimmt oder ob die Initialzelle noch (so wie in Abschnitt 4.1.4) durch die Erzeugung weiterer Punkte des Cox-Prozesses  $\{N_B^!\}$  verkleinert werden muss.

## 2. Cox-Prozesse auf Poissonschen Geradensystemen

- Sei  $\{N_B\}$  ein stationärer Cox-Prozess, dessen zufälliges Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B\}$  durch (53) gegeben ist, und sei  $\Xi^*$  die Voronoi-Zelle

$$\Xi^* = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq |x - S_n^!| \forall n \geq 1\} \quad (58)$$

des Nullpunktes  $o \in \mathbb{R}^2$  bezüglich der Punkte  $\{S_n^!\}$  des Cox-Prozesses  $\{N_B^!\}$ , dessen zufälliges Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B^0\}$  durch (55) gegeben ist.

- Die Darstellungsformel (55) von  $\{\Lambda_B^0\}$  führt nun zu dem folgenden Algorithmus zur Simulation der (typischen) Voronoi-Zelle  $\Xi^*$ , wobei wir die Tatsache nutzen,
- dass die Verteilung von  $\{S_n^!\}$  mit der Verteilung der Vereinigungsmenge der Atome der (linearen) homogenen Poisson-Prozesse mit der Intensität  $\lambda^{(1)}$  übereinstimmt, die auf den Geraden des Geradenprozesses  $\ell_{o, V_0} \cup X_\ell$  liegen (vgl. Abschnitt 4.2.3).
- So wie bisher besteht der Algorithmus aus zwei Teilen, wobei zuerst die Initialzelle generiert wird.
  - Hierfür wird zunächst eine Realisierung des Winkels  $V_0 \sim U([0, \pi))$  generiert.
  - Anschließend wird jeweils eine Realisierung der (unabhängigen) Zufallsvariablen  $|S_0^+|$  und  $|S_0^-|$  generiert, wobei  $|S_0^+|, |S_0^-| \sim \text{Exp}(\lambda^{(1)})$ .
  - Damit sind die Punkte  $S_0^+ = (|S_0^+|, V_0)$  und  $S_0^- = (-|S_0^-|, V_0)$  auf der Geraden  $\ell_0 = \ell_{o, V_0}$  gegeben, die dem Nullpunkt am nächsten liegen.
  - Danach wird die Gerade  $\ell_1 = \ell_{R_1, V_1}$  generiert und der Schnittpunkt  $\ell_0 \cap \ell_1$  bestimmt.
  - Genauso wie  $S_0^+$  und  $S_0^-$  werden nun die beiden Punkte  $S_1^+$  und  $S_1^-$  auf der Geraden  $\ell_1$  generiert, die dem Schnittpunkt  $\ell_0 \cap \ell_1$  am nächsten liegen.
  - Man kann sich leicht überlegen, dass sich aus den Mittelsenkrechten der Strecken  $(o, S_0^+), (o, S_0^-), (o, S_1^+)$  und  $(o, S_1^-)$  ein beschränktes (und konvexes) Polygon um den Nullpunkt bilden lässt.
  - D.h., bei Cox-Prozessen auf Poissonschen Geradensystemen werden stets nur *vier* Punkte zur Konstruktion der Initialzelle benötigt.
- Danach wird wiederum geprüft, ob die Initialzelle mit der in (58) gegebenen typischen Zelle  $\Xi^*$  übereinstimmt oder ob die Initialzelle noch (so wie in Abschnitt 4.1.4) durch die Erzeugung weiterer Punkte des Cox-Prozesses  $\{N_B^!\}$  verkleinert werden muss.

### 4.2.5 Poissonsche Cluster-Prozesse

In diesem Abschnitt betrachten wir die Palmische Verteilung  $P_N^0$  von stationären Poissonschen Cluster-Prozessen, die in Abschnitt 3.3.1 eingeführt worden sind. Dabei leiten wir eine Darstellungsformel für  $P_N^0$  her, die als eine weitere Verallgemeinerung des Satzes von Slivnyak (vgl. Formel (19) in Theorem 4.5) aufgefasst werden kann.

- Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein stationärer Poissonscher Cluster-Prozess mit

$$N_B = \sum_{n=1}^{\infty} N_{B-S_n}^{(n)} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (59)$$

- wobei  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson–Prozess mit der Intensität  $\lambda_0$  ist
- und  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Punktprozessen ist, die von  $\{S_n\}$  unabhängig sind und deren Intensitätsmaß  $\{\mu^{(1)}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  endlich ist, d.h.,  $\mu^{(1)}(\mathbb{R}^d) < \infty$ .

- Zur Erinnerung:

- Die Intensität  $\lambda$  von  $\{N_B\}$  ist gegeben durch  $\lambda = \lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d)$ , vgl. Theorem 3.14.
- Außerdem ist das erzeugende Funktional  $\mathbf{G} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$  von  $\{N_B\}$  gegeben durch

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{G}^{[x]}(f) - 1) dx\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (60)$$

- wobei  $\mathbf{G}^{[x]} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$  das erzeugende Funktional des (um den Vektor  $x \in \mathbb{R}^d$  verschobenen Sekundär–) Punktprozesses  $\{N_{B-x}^{(1)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ist, vgl. Korollar 3.3.

- Um eine Darstellungsformel für die Palmische Verteilung  $P_N^0$  von  $\{N_B\}$  herleiten zu können, führen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\tilde{P} : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  ein, wobei

$$\tilde{P}(A) = \frac{1}{\mu^{(1)}(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi) \varphi(dx) P_{N^{(1)}}(d\varphi) \quad \forall A \in \mathcal{N} \quad (61)$$

und  $P_{N^{(1)}}$  die Verteilung der Sekundärprozesse  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  bezeichnet.

Das folgende Resultat kann als Verallgemeinerung des Satzes von Slivnyak (vgl. Formel (19) in Theorem 4.5) aufgefasst werden.

#### Theorem 4.9

- Sei  $\{N_B^0\}$  ein zufälliger Punktprozess mit der Palmischen Verteilung  $P_N^0$ , und sei  $\{\tilde{N}_B\}$  ein zufälliger Punktprozess mit der in (61) eingeführten Verteilung  $\tilde{P}$ , der über dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum wie  $\{N_B\}$  gegeben und von  $\{N_B\}$  unabhängig ist.
- Dann gilt

$$\{N_B^0, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\} \stackrel{D}{=} \{N_B + \tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}. \quad (62)$$

#### Beweis

- Es genügt zu zeigen, dass für jede  $(\mathcal{N}, \mathcal{B}([0, \infty)))$ –messbare Funktion  $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$

$$\int_{\mathbb{N}} g(\varphi) P_N^0(d\varphi) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} g(\varphi' + \varphi'') \tilde{P}(d\varphi'') P_N(d\varphi'). \quad (63)$$

- Für jedes  $\varphi \in \mathbb{N}$ , so dass  $\varphi(\{x\}) \leq 1$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ , sei das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P^{[\varphi]} : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  gegeben durch

$$P^{[\varphi]}(A) = P\left(\sum_{n=1}^{\varphi(\mathbb{R}^d)} N_{B-s_n}^{(n)} \in A\right) \quad \forall A \in \mathcal{N}, \quad (64)$$

wobei  $s_1, s_2, \dots$  eine messbare Indizierung der Atome von  $\varphi$  ist.

- Dann ergibt sich aus der Definitionsgleichung (59) des stationären Poissonschen Cluster-Prozesses  $\{N_B\}$ , dass für jede  $(\mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}([0, \infty)))$ -messbare Funktion  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi', x) \varphi'(dx) P^{[\varphi]}(d\varphi') P_0(d\varphi),$$

wobei  $P_0$  die Verteilung des Poissonschen Primärprozesses  $\{S_n\}$  bezeichnet.

- Hieraus und aus der Unabhängigkeit der Sekundärprozesse  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  ergibt sich mit Hilfe der Definitionsgleichung (33) für das reduzierte Campbellsche Maß  $\gamma_{P_0}^1$  des Poissonschen Primärprozesses  $\{S_n\}$ , dass

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi' + \varphi'', x) \varphi''(dx) P^{[\delta_{s_n}]}(d\varphi'') P^{[\varphi - \delta_{s_n}]}(d\varphi') \right) P_0(d\varphi) \\ &\stackrel{(33)}{=} \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi' + \varphi'', x) \varphi''(dx) P^{[\delta_y]}(d\varphi'') P^{[\varphi - \delta_y]}(d\varphi') \right) \gamma_{P_0}^1(d(\varphi, y)) \\ &\stackrel{\text{Theorem 4.6}}{=} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \left( \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi' + \varphi'', x) \varphi''(dx) P^{[\delta_y]}(d\varphi'') P^{[\varphi]}(d\varphi') \right) P_0(d\varphi) dy, \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Produktdarstellung des reduzierten Campbellschen Maßes  $\gamma_{P_0}^1$  des (homogenen) Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$  ergibt, die in Theorem 4.6 hergeleitet worden ist.

- Durch die erneute Anwendung der Definitionsgleichung (59) des stationären Poissonschen Cluster-Prozesses  $\{N_B\}$  ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi' + \varphi'', x) \varphi''(dx) P^{[\delta_y]}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy \\ &= \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi' + \mathbf{T}_y \varphi'', x - y) \varphi''(dx) P^{[\delta_o]}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy \\ &= \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi' + \mathbf{T}_{x-y} \varphi'', y) \varphi''(dx) P^{[\delta_o]}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy \\ &\stackrel{\text{Stationarität von } \{N_B\}}{=} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{T}_{-y}(\varphi' + \mathbf{T}_x \varphi''), y) \varphi''(dx) P^{[\delta_o]}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy \\ &\stackrel{(61)}{=} \lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(\mathbf{T}_{-y}(\varphi' + \varphi''), y) \tilde{P}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy. \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Definitionsgleichung (61) des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\tilde{P}$  ergibt.

- Wegen  $\lambda = \lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d)$  ergibt sich somit, dass

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(\mathbf{T}_{-y}(\varphi' + \varphi''), y) \tilde{P}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy. \quad (65)$$

- Andererseits ergibt sich aus der Definitionsgleichung (6) der Palmischen Verteilung  $P_N^0$  von  $\{N_B\}$  (vgl. auch die Formel (42)), dass

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) dx P_N^0(d\varphi) = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{T}_x \varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi)$$

bzw.

$$\lambda \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{T}_{-x} \varphi, x) dx P_N^0(d\varphi) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \quad (66)$$

für jede  $(\mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}([0, \infty)))$ -messbare Funktion  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ .

- Insgesamt ergibt sich somit aus (65) und (66), dass für jede  $(\mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}([0, \infty)))$ -messbare Funktion  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} g(\varphi, x) dx P_N^0(d\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} g(\varphi' + \varphi'', y) \tilde{P}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy$$

bzw. für jede  $(\mathcal{N}, \mathcal{B}([0, \infty)))$ -messbare Funktion  $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$

$$\int_{\mathbb{N}} g(\varphi) P_N^0(d\varphi) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} g(\varphi' + \varphi'') \tilde{P}(d\varphi'') P_N(d\varphi'). \quad \square$$

### Beachte

- Theorem 4.9 kann als eine Verallgemeinerung des Satzes von Slivnyak (vgl. Formel (20) in Theorem 4.5) aufgefasst werden. Denn in dem Spezialfall, dass  $\tilde{P} = \delta_{\delta_o}$ , ergibt sich aus Theorem 4.9 insbesondere, dass  $P_N^0 = P_N * \delta_{\delta_o}$ .
- Weil das Produkt der erzeugenden Funktionale zweier unabhängiger Punktprozesse mit dem erzeugenden Funktional ihrer Summe (im Sinne der Addition zufälliger Zählmaße) übereinstimmt, ergibt sich aus Theorem 4.9 die folgende Darstellungsformel

$$\mathbf{G}^0(f) = \mathbf{G}(f) \tilde{\mathbf{G}}(f) \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad (67)$$

für das erzeugende Funktional  $\mathbf{G}^0 : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$  der Palmischen Verteilung  $P_N^0$ , wobei

$$\mathbf{G}^0(f) = \int_{\mathbb{N}} \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \log f(x) \varphi(dx)\right) P_N^0(d\varphi) \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

und  $\mathbf{G}$  bzw.  $\tilde{\mathbf{G}}$  die erzeugenden Funktionale von  $P_N$  bzw.  $\tilde{P}$  sind.

- Ähnlich wie für die in Abschnitt 4.2.4 betrachteten Cox–Voronoi–Mosaik lässt sich mit Hilfe von Theorem 4.9 ein Algorithmus zur Simulation der typischen Zelle von Voronoi–Mosaiken herleiten, die durch stationäre Poissonsche Cluster–Prozesse generiert werden.
  - Dabei muss lediglich vorausgesetzt werden, dass die Verteilung des Sekundärprozesses  $\{N_B^{(1)}\}$  und damit auch die in (61) eingeführte Verteilung  $\tilde{P}$  eine hinreichende einfache (implementierbare) Gestalt hat.
  - Beispiele, für die dies zutrifft, sind die in Abschnitt 3.2.3 eingeführten Matérn–Cluster–Prozesse bzw. die in Abschnitt 3.3.3 eingeführten Gauß–Poisson–Prozesse.

### 4.2.6 Gibbs–Prozesse

Hier soll noch ein Abschnitt über (unendliche) stationäre Gibbs–Prozesse in unbeschränkten Gebieten eingefügt werden, wobei Eigenschaften der Palmischen Verteilung solcher Gibbs–Prozesse diskutiert werden.

## 4.3 Weitere Kenngrößen von Punktprozessen und ihre Schätzer

- In diesem Abschnitt betrachten wir Kenngrößen von stationären zufälligen Zählmaßen, die zur statistischen Analyse der Struktureigenschaften von unregelmäßigen Punktmustern genutzt werden können.
- Dabei führen wir zunächst den Begriff der Kontaktverteilungsfunktion ein, die zur Analyse der geometrischen Beschaffenheit der Leerbereiche zwischen den Punkten geeignet ist. Danach betrachten wir Kenngrößen von stationären zufälligen Zählmaßen, die sich mit Hilfe ihrer Palmischen Verteilung ausdrücken lassen.
- Insbesondere untersuchen wir Eigenschaften von nichtparametrischen Schätzern dieser Kenngrößen, die die Form von so genannten *Summary–Statistiken* haben.

### 4.3.1 Kontaktverteilungsfunktion; Minus-Sampling

Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein (einfaches) stationäres zufälliges Zählmaß mit der Intensität  $\lambda \in (0, \infty)$ , und sei  $\{S_n\}$  eine messbare Indizierung seiner Atome. Dabei setzen wir stets voraus, dass  $P(N_{\mathbb{R}^d} = 0) = 0$ .

#### Definition

- Für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  betrachten wir die Zufallsvariable  $Z_x : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$Z_x = \min\{r \geq 0 : N_{B(x,r)} > 0\} = \min_{n \geq 1} |x - S_n|, \quad (68)$$

die *sphärischer Kontaktabstand* des Punktes  $x \in \mathbb{R}^d$  zu den Atomen  $\{S_n\}$  des zufälligen Zählmaßes  $\{N_B\}$  genannt wird.

- Die Verteilungsfunktion  $H : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  mit  $H(r) = P(Z_x \leq r)$  Für jede  $r \geq 0$ , die wegen der Stationarität des zufälligen Zählmaßes  $\{N_B\}$  nicht von  $x \in \mathbb{R}^d$  abhängt, wird die *sphärische Kontaktverteilungsfunktion* von  $\{N_B\}$  genannt.

**Theorem 4.10** Für beliebige  $r \geq 0$  und  $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$  gilt

$$H(r) = P\left(o \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) \quad (69)$$

und

$$H(r) = \frac{1}{\nu_d(W)} \mathbb{E} \nu_d\left(W \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right). \quad (70)$$

#### Beweis

- Die Gültigkeit von (69) ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass

$$\left\{\omega \in \Omega : o \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n(\omega), r)\right\} = \left\{\omega \in \Omega : \min_{n \geq 1} |S_n(\omega)| \leq r\right\} = \{\omega \in \Omega : Z_o(\omega) \leq r\}.$$

- Außerdem ergibt sich aus der Stationarität von  $\{N_B\}$  und aus dem Satz von Fubini über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge, dass

$$\begin{aligned} \nu_d(W) P\left(o \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) &= \int_W P\left(o \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) dx \\ \stackrel{\text{Stationarität von } \{N_B\}}{=} &\int_W P\left(x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) dx = \int_W \mathbb{E} \mathbb{1}_{\{x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\}} dx \\ \stackrel{\text{Satz von Fubini}}{=} &\mathbb{E} \int_W \mathbb{1}_{\{x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\}} dx = \mathbb{E} \nu_d\left(W \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right). \end{aligned}$$

- Hieraus und aus (69) ergibt sich nun die Gültigkeit von (70). □

#### Beachte

- Die Darstellungsformel (70) für die sphärische Kontaktverteilungsfunktion  $H : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  führt zu den folgenden (erwartungstreuen) Schätzern für  $H(r)$ .

- Sei  $r > 0$  und  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  eine beliebige beschränkte Borel-Menge mit  $\nu_d(W \ominus B(o, r)) > 0$ , wobei  $W \ominus B(o, r) = \{x \in W : B(x, r) \subset W\}$ .
- Wenn der Punktprozess  $\{S_n\}$  in dem dilatierten Fenster  $W \oplus B(o, r)$  beobachtet werden kann (so genanntes Plus-Sampling), wobei  $W \oplus B(o, r) = \{x + y : x \in W, y \in B(o, r)\}$ , dann folgt aus (70), dass durch den Ansatz

$$\widehat{H}_W^{(1)}(r) = \frac{\nu_d\left(W \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right)}{\nu_d(W)} \quad (71)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für  $H(r)$  gegeben ist.

- Ein weiterer Schätzer für  $H(r)$ , der auf dem Prinzip des „Minus-Samplings“ beruht und der wegen (70) ebenfalls erwartungstreu für  $H(r)$  ist, ist gegeben durch

$$\widehat{H}_W^{(2)}(r) = \frac{\nu_d\left((W \ominus B(o, r)) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right)}{\nu_d(W \ominus B(o, r))}. \quad (72)$$

- Der in (72) betrachtete Schätzer  $\widehat{H}_W^{(2)}(r)$  besitzt zwar den Vorteil,
  - dass zu seiner Berechnung nur Information über  $\{S_n\}$  in dem (ursprünglichen, nicht dilatierten) Beobachtungsfenster  $W$  erforderlich ist.
  - Ein Nachteil des Schätzers  $\widehat{H}_W^{(2)}(r)$  besteht allerdings darin, dass  $\widehat{H}_W^{(2)}(r)$  im allgemeinen keine monotone Funktion in  $r$  ist.

Aus Theorem 3.17 ergibt sich, dass die Schätzer  $\widehat{H}_W^{(1)}(r)$  und  $\widehat{H}_W^{(2)}(r)$  die folgende (starke) Konsistenzeigenschaft besitzen, wenn der Punktprozess  $\{N_B\}$  ergodisch ist.

**Theorem 4.11** Sei  $\{N_B\}$  ein ergodischer Punktprozess. Dann gilt für jedes  $r > 0$

$$P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(1)}(r) = H(r)\right) = P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(2)}(r) = H(r)\right) = 1. \quad (73)$$

**Beweis**

- Ähnlich wie im Beweis von Theorem 3.18 kann man sich leicht überlegen, dass für beliebige  $k \geq 1$

$$\nu_d\left([-k, k]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu_d\left([-k, k]^d \cap [y, y+1] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) dy.$$

- Hieraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} & \int_{[-k, k-1]^d} \nu_d\left([y, y+1] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) dy \\ & \leq \nu_d\left([-k, k]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) \leq \int_{[-k-1, k]^d} \nu_d\left([y, y+1] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) dy \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \int_{[-k, k-1]^d} \nu_d\left([0, 1]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\mathbf{T}_y S_n, r)\right) dy = \int_{[-k, k-1]^d} \nu_d\left([0, 1]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n - y, r)\right) dy \\ & \leq \nu_d\left([-k, k]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) \leq \int_{[-k-1, k]^d} \nu_d\left([0, 1]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n - y, r)\right) dy \\ & = \int_{[-k-1, k]^d} \nu_d\left([0, 1]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\mathbf{T}_y S_n, r)\right) dy, \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{T}_y S_n = S_n - y$ .

- Weil  $\{W_k\}$  und  $\{W'_k\}$  mit  $W_k = [-k, k-1]^d$  bzw.  $W'_k = [-k-1, k]^d$  mittelnde Folgen sind und weil

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu_d([-k, k-1]^d)}{\nu_d([-k, k]^d)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu_d([-k-1, k]^d)}{\nu_d([-k, k]^d)} = 1,$$

ergibt sich nun mit Hilfe von Theorem 3.17, dass der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(1)}(r) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu_d\left([-k, k]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right)}{\nu_d([-k, k]^d)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d([-k, k]^d)} \int_{[-k, k]^d} \nu_d\left([0, 1]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\mathbf{T}_y S_n, r)\right) dy \end{aligned}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert und konstant ist.

- Weil  $\{N_B\}$  ergodisch ist, ergibt sich nun durch die erneute Anwendung von Theorem 3.17, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(1)}(r) = \mathbb{E} \nu_d\left([0, 1]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) \stackrel{(70)}{=} H(r),$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Darstellungsformel (70) für  $H(r)$  ergibt, die in Theorem 4.10 hergeleitet wurde.

- Auf die gleiche Weise lässt sich zeigen, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(2)}(r) = H(r)$  mit Wahrscheinlichkeit 1.  $\square$

### Beachte

- Wenn  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson-Prozess ist, dann ergibt sich aus der Darstellungsformel (69) für  $H(r)$ , dass

$$H(r) = 1 - \exp(-\lambda \kappa_d r^d) \quad \forall r \geq 0, \quad (74)$$

wobei  $k_d = \nu_d(B(o, 1))$  das Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

- Außerdem kann man zeigen, dass dann die Schätzer  $\widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(1)}(r)$  und  $\widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(2)}(r)$  für  $k \rightarrow \infty$  asymptotisch normalverteilt sind, d.h., es gilt für  $i = 1, 2$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{\frac{(2k)^d}{\sigma^2}} \left(\widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(i)}(r) - H(r)\right) \leq x\right) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (75)$$

wobei  $\sigma^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (2k)^d \text{Var} \widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(i)}(r)$  die asymptotische Schätzvarianz und  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

### 4.3.2 Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion; randkorrigiertes Minus-Sampling

Wir führen nun den Begriff der Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion ein, die im ergodischen Fall als die Verteilungsfunktion des Abstandes eines zufällig herausgegriffenen Atoms  $S_n$  von  $\{N_B\}$  zum nächsten Nachbarn von  $S_n$  unter den übrigen Atomen  $S_m$  mit  $m \neq n$  interpretiert werden kann.

#### Definition

- Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein (einfaches) stationäres zufälliges Zählmaß mit der Intensität  $\lambda \in (0, \infty)$ , so dass  $P(N_{\mathbb{R}^d} = 0) = 0$ , und sei  $\{S_n\}$  eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N_B\}$ .

- Die Verteilungsfunktion  $D : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  mit

$$D(r) = 1 - P_N^0(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r) \setminus \{o\}) = 0) \quad \forall r \geq 0 \quad (76)$$

wird die *Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion* von  $\{N_B\}$  genannt, wobei  $P_N^0$  die Palmische Verteilung von  $\{N_B\}$  ist.

**Theorem 4.12** Für beliebige  $r \geq 0$  und  $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$  gilt

$$D(r) = \frac{1}{\lambda \nu_d(W)} \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \in W, \min_{m \neq n} |S_m - S_n| \leq r\}}. \quad (77)$$

**Beweis** Aus der Definitionsgleichung (76) der Verteilungsfunktion  $D : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  und aus der Darstellungsformel (6) für die Palmische Verteilung  $P_N^0$  ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} D(r) &\stackrel{(76)}{=} 1 - P_N^0(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r) \setminus \{o\}) = 0) \\ &\stackrel{(6)}{=} 1 - \frac{1}{\lambda \nu_d(W)} \int_{\mathbb{N}} \sum_{n: s_n(\varphi) \in W} \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N} : \varphi'(B(o, r) \setminus \{o\}) = 0\}}(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)} \varphi) P_N(d\varphi) \\ &= \frac{1}{\lambda \nu_d(W)} \int_{\mathbb{N}} \sum_{n: s_n(\varphi) \in W} \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N} : \varphi'(B(o, r) \setminus \{o\}) > 0\}}(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)} \varphi) P_N(d\varphi) \\ &= \frac{1}{\lambda \nu_d(W)} \int_{\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mathbb{1}_W(s_n(\varphi)) \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N} : \varphi'(B(o, r) \setminus \{o\}) > 0\}}(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)} \varphi) \right) P_N(d\varphi) \\ &= \frac{1}{\lambda \nu_d(W)} \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \in W, \min_{m \neq n} |S_m - S_n| \leq r\}}. \quad \square \end{aligned}$$

Wenn  $\{N_B\}$  ein stationärer Poissonscher Cluster-Prozess ist, dann lässt sich mit Hilfe von Theorem 4.9 noch eine weitere Darstellungformel für die Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion  $D : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  herleiten.

**Theorem 4.13** Sei  $\{N_B\}$  ein stationärer Poissonscher Cluster-Prozess. Dann gilt

$$D(r) = 1 - (1 - H(r))(1 - G(r)) \quad \forall r \geq 0, \quad (78)$$

wobei  $H : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  die sphärische Kontaktverteilungsfunktion von  $\{N_B\}$  ist. Die in (78) betrachtete Verteilungsfunktion  $G : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  ist gegeben durch

$$G(r) = P\left(\min_{n: \tilde{S}_n \neq o} |\tilde{S}_n| \leq r\right), \quad (79)$$

wobei  $\{\tilde{S}_n\}$  eine messbare Indizierung der Atome eines zufälligen Zahlmaßes mit der in (61) eingeführten Verteilung  $\tilde{P}$  ist.

**Beweis** Aus der Definitionsgleichung (76) der Verteilungsfunktion  $D : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  ergibt sich mit Hilfe von Theorem 4.9, dass

$$\begin{aligned} 1 - D(r) &\stackrel{(76)}{=} P_N^0(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r) \setminus \{o\}) = 0) \\ &\stackrel{\text{Theorem 4.9}}{=} P(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r)) = 0) \tilde{P}(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r) \setminus \{o\}) = 0) \\ &= (1 - H(r))(1 - G(r)). \quad \square \end{aligned}$$

Aus den Theoremen 4.10 und 4.13 ergibt sich sofort das folgende Resultat.

**Korollar 4.2**

- Wenn  $\{N_B\}$  ein stationärer Poissonscher Cluster-Prozess ist, dann gilt

$$D(r) \geq H(r) \quad \forall r \geq 0. \quad (80)$$

- Wenn  $\{N_B\}$  ein homogener Poisson-Prozess ist, dann gilt insbesondere

$$D(r) = H(r) = 1 - \exp(-\lambda \kappa_d r^d) \quad \forall r \geq 0. \quad (81)$$

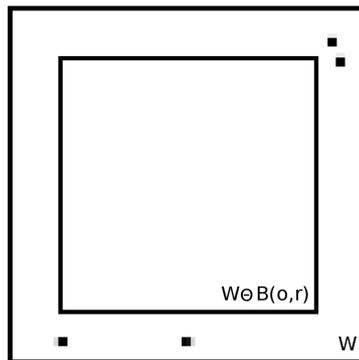


Abbildung 22: Schätzung der Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion

**Beachte**

- Die Darstellungsformel (77) für die Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion  $D : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  führt zu dem folgenden (erwartungstreuen) Schätzer für  $\lambda D(r)$ , der auf dem Prinzip des „Minus-Samplings“ beruht.

- Sei  $r > 0$  und  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  eine beliebige beschränkte Borel-Menge mit  $\nu_d(W \ominus B(o, r)) > 0$ .
- Dann betrachten wir den Schätzer  $\widehat{\lambda D(r)}$ , der gegeben ist durch den Ansatz

$$\widehat{\lambda D(r)} = \frac{1}{\nu_d(W \ominus B(o, r))} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{S_n \in W \ominus B(o, r), \min_{m \neq n} |S_m - S_n| \leq r\}}.$$

- Hieraus ergibt sich der „natürliche“ *Minus-Sampling-Schätzer*

$$\widehat{D}_W^{(1)}(r) = \frac{\widehat{\lambda D(r)}}{\widehat{\lambda(r)}} \quad (82)$$

für  $D(r)$ , wobei  $\widehat{\lambda(r)} = \#\{n : S_n \in W \ominus B(o, r)\} / \nu_d(W \ominus B(o, r))$ , d.h.

$$\widehat{D}_W^{(1)}(r) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{S_n \in W \ominus B(o, r), \min_{m \neq n} |S_m - S_n| \leq r\}}}{\#\{n : S_n \in W \ominus B(o, r)\}}. \quad (83)$$

- Ein Nachteil des in (82) bzw. (83) eingeführten Schätzers  $\widehat{D}_W^{(1)}(r)$  besteht darin, dass bei diesem Schätzansatz nur diejenige Information genutzt wird, die in dem „erodierten“ Beobachtungsfenster  $W \ominus B(o, r)$  enthalten ist, wobei der Erosionsradius  $r$  nicht von den Daten abhängt.

- Dies führt bei größeren Werten von  $r$  zu unnötig großen Schätzvarianzen.
- Außerdem ist  $\widehat{D}_W^{(1)}(r)$  im allgemeinen keine monotone Funktion in  $r$ .
- Ein anderer (randkorrigierter) Schätzer für  $D(r)$ , der diese Nachteile nicht aufweist, ist durch den folgenden Ansatz gegeben:
  - Für jedes  $r > 0$  sei

$$\widehat{D}_W^{(2)}(r) = \frac{\widetilde{\lambda D(r)}}{\widetilde{\lambda}}, \quad (84)$$

wobei

$$\widetilde{\lambda D(r)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{I}_{\{S_n \in W \ominus B(o, Z_n), Z_n \leq r\}}}{\nu_d(W \ominus B(o, Z_n))}, \quad \widetilde{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{I}_{\{S_n \in W \ominus B(o, Z_n)\}}}{\nu_d(W \ominus B(o, Z_n))}, \quad Z_n = \min_{m \neq n, S_m \in W} |S_m - S_n| \quad (85)$$

und  $\frac{0}{0} = 0$  gesetzt wird.

- Der in (84) bzw. (85) eingeführte Schätzer  $\widehat{D}_W^{(2)}(r)$  erfasst diejenigen Punkte  $S_n$ , die in  $W$  liegen und für die bekannt ist, dass ihr nächster Nachbar ebenfalls in  $W$  liegt und einen Abstand von  $S_n$  hat, der kleiner oder gleich  $r$  ist.
- Die Abbildung 22 dient zur Illustration dieses Zählverfahrens: Der Punkt in der rechten oberen Ecke des Beobachtungsfensters  $W$  wird bei der Summation in (85) zur Berechnung von  $\widetilde{\lambda D(r)}$  berücksichtigt, während die übrigen drei Punkte in  $W$  nicht berücksichtigt werden.
- Aus den Definitionsgleichungen (84) und (85) ergibt sich sofort, dass  $\widehat{D}_W^{(2)}(r)$  eine monotone Funktion in  $r$  ist.

Aus Theorem 3.17 ergibt sich, dass die in (82) bzw. (84) eingeführten Statistiken  $\widehat{D}_W^{(1)}(r)$  und  $\widehat{D}_W^{(2)}(r)$  konsistente Schätzer für  $D(r)$  sind, wenn der Punktprozess  $\{N_B\}$  ergodisch ist.

**Theorem 4.14** *Sei  $\{N_B\}$  ein ergodischer Punktprozess. Dann gilt für jedes  $r > 0$*

$$P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{D}_{[-k, k]^d}^{(1)}(r) = D(r)\right) = P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{D}_{[-k, k]^d}^{(2)}(r) = D(r)\right) = 1. \quad (86)$$

Der Beweis von Theorem 4.14 ist analog zum Beweis von Theorem 4.11 und wird deshalb weggelassen.

### Beachte

- Außer der Kontaktverteilungsfunktion  $H(r)$  und der Nächster-Abstand-Verteilungsfunktion  $D(r)$  kann auch die so genannte  $J$ -Funktion  $J : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ , wobei

$$J(r) = \frac{1 - D(r)}{1 - H(r)} \quad \text{für jedes } r > 0 \text{ mit } H(r) < 1, \quad (87)$$

zur statistischen Analyse der Struktureigenschaften von unregelmäßigen Punktmustern genutzt werden.

- Denn aus den Formeln (80) und (81) ergibt sich, dass für jedes  $r > 0$

$$J(r) \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad J(r) = 1, \quad (88)$$

wenn  $\{N_B\}$  ein stationärer Poissonscher Cluster-Prozess bzw. ein homogener Poisson-Prozess ist.

- Wenn sich also aus der Analyse der Daten ergibt, dass  $\widehat{J}(r) < 1$  für jedes  $r > 0$ , wobei

$$\widehat{J}(r) = \frac{1 - \widehat{D}(r)}{1 - \widehat{H}(r)}$$

und  $\widehat{D}(r)$  bzw.  $\widehat{H}(r)$  geeignet gewählte Schätzer für  $D(r)$  bzw.  $H(r)$  sind, dann könnte ein Poissonscher Cluster-Prozess ein geeignetes Modell zur Beschreibung der Daten sein.

### 4.3.3 Höhere Momentenmaße

In diesem Abschnitt betrachten wir höhere Momentenmaße von zufälligen Zählmaßen. Von besonderem Interesse ist das so genannte faktorielle Momentenmaß zweiter Ordnung.

Es bildet die Grundlage zur Definition der Ripleyschen  $K$ -Funktion und der Paarkorrelationsfunktion von stationären und isotropen Punktprozessen, die ebenfalls zur statistischen Analyse der Struktureigenschaften von unregelmäßigen Punktmustern genutzt werden können; vgl. die Abschnitte 4.3.4 und 4.3.5.

- Sei  $m \geq 1$  eine beliebige natürliche Zahl, und sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein zufälliges Zählmaß im  $\mathbb{R}^d$ , das einfach ist (d.h., mit Wahrscheinlichkeit 1 keine Mehrfachpunkte besitzt) und der Integrierbarkeitsbedingung  $\mathbb{E}(N_B^m) < \infty$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  genügt.
- Zur Erinnerung: Das in (3.4) eingeführte Intensitätsmaß  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  des zufälligen Zählmaßes  $\{N_B\}$  ist gegeben durch

$$\mu(B) = \mathbb{E} N_B \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (89)$$

- In Verallgemeinerung von (89) kann man für jedes  $m \geq 1$  das  $m$ -te Momentenmaß  $\mu_m : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{md}) \rightarrow [0, \infty]$  des zufälligen Zählmaßes  $\{N_B\}$  definieren durch

$$\mu_m(B_1 \times \dots \times B_m) = \mathbb{E}(N_{B_1} \dots N_{B_m}) \quad \forall B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (90)$$

- Beachte: Die Definitionsgleichung (90) des  $m$ -ten Momentenmaßes  $\mu_m$  ist äquivalent mit

$$\mu_m(B_1 \times \dots \times B_m) = \mathbb{E} \sum_{n_1, \dots, n_m} \mathbb{1}_{B_1 \times \dots \times B_m}(S_{n_1}, \dots, S_{n_m}) \quad \forall B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

- Auf ähnliche Weise wird das  $m$ -te faktorielle Momentenmaß  $\alpha_m : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{md}) \rightarrow [0, \infty]$  von  $\{N_B\}$  definiert:

$$\alpha_m(B_1 \times \dots \times B_m) = \mathbb{E} \sum_{n_1, \dots, n_m}^{\neq} \mathbb{1}_{B_1 \times \dots \times B_m}(S_{n_1}, \dots, S_{n_m}) \quad \forall B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (91)$$

wobei sich die Summation in (91) über alle  $m$ -Tupel  $(n_1, \dots, n_m)$  von paarweise verschiedenen Indizes erstreckt und  $\{S_n\}$  eine messbare Indizierung der Atome von  $\{N_B\}$  ist.

**Beachte** Unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (90) und (91) von  $\mu_2$  bzw.  $\alpha_2$  ergibt sich, dass

$$\mu_2(B_1 \times B_2) = \alpha_2(B_1 \times B_2) + \mu(B_1 \cap B_2) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (92)$$

bzw.

$$\text{Var } N_B = \alpha_2(B \times B) + \mu(B) - (\mu(B))^2 \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (93)$$

Mit Hilfe der Produktdarstellung  $\gamma^! = P_N \times \mu$  des reduzierten Campbellschen Maßes  $\gamma^!$  von Poisson-Prozessen, die in Theorem 4.6 hergeleitet worden ist, zeigen wir nun, dass das zweite faktorielle Momentenmaß  $\alpha_2$  von Poisson-Prozessen ebenfalls ein Produktmaß ist.

**Theorem 4.15** Wenn  $\{N_B\}$  ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu$  ist, dann gilt  $\alpha_2 = \mu \times \mu$ , d.h.,

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \mu(B_1) \mu(B_2) \quad (94)$$

für beliebige  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

**Beweis**

- Aus der Definitionsgleichung (91) des zweiten faktoriellen Momentenmaßes  $\alpha_2$  ergibt sich, dass

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) \stackrel{(91)}{=} \mathbb{E} \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \mathbb{1}_{B_1 \times B_2}(S_{n_1}, S_{n_2}) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi - \delta_x, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi),$$

wobei

$$f(\varphi, x) = \varphi(B_1) \mathbb{1}_{B_2}(x). \quad (95)$$

- Hieraus und aus der Definitionsgleichung (33) des reduzierten Campbellschen Maßes  $\gamma^!$  von  $\{N_B\}$  ergibt sich, dass  $\alpha_2(B_1 \times B_2) = \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \gamma^!(d(\varphi, x))$ .
- Mit Hilfe der Produktdarstellung  $\gamma^! = P_N \times \mu$ , die in Theorem 4.6 hergeleitet worden ist, ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} \alpha_2(B_1 \times B_2) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} f(\varphi, x) P_N(d\varphi) \mu dx \\ &\stackrel{(95)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \varphi(B_1) \mathbb{1}_{B_2}(x) P_N(d\varphi) \mu dx = \mu(B_1) \mu(B_2). \quad \square \end{aligned}$$

Aus Theorem 4.15 und aus der Definitionsgleichung (3.26) von Cox-Prozessen ergibt sich sofort das folgende Resultat.

**Korollar 4.3** Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein Cox-Prozess mit dem zufälligen Intensitätsmaß  $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ . Dann gilt

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \int_{\mathbb{M}} \eta(B_1) \eta(B_2) P_\Lambda(d\eta) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (96)$$

Außerdem lässt sich mit Hilfe von Theorem 4.15 eine Darstellungsformel für das zweite faktorielle Momentenmaß von Poissonschen Cluster-Prozessen herleiten.

**Theorem 4.16**

- Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein Poissonscher Cluster-Prozess mit

$$N_B = \sum_{n=1}^{\infty} N_{B-S_n}^{(n)} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (97)$$

– wobei  $\{S_n\}$  ein Poisson-Prozess mit dem (lokal endlichen und diffusen) Intensitätsmaß  $\mu^{(0)}$  ist, für das  $\mu^{(0)}(\mathbb{R}^d) = \infty$  gilt,

– und  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Punktprozessen mit dem endlichen Intensitätsmaß  $\mu^{(1)}$  ist, die von  $\{S_n\}$  unabhängig sind und für die

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu_2^{(1)}(B_1 - x, B_2 - x) \mu^{(0)}(dx) < \infty \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \quad (98)$$

gilt, wobei  $\mu_2^{(1)}$  das zweite Momentenmaß von  $\{N_B^{(1)}\}$  bezeichnet.

- Für das zweite faktorielle Momentenmaß  $\alpha_2$  von  $\{N_B\}$  gilt dann

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_2^{(1)}(B_1 - x, B_2 - x) \mu^{(0)}(dx) + \mu(B_1) \mu(B_2) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d), \quad (99)$$

wobei  $\alpha_2^{(1)}$  das zweite faktorielle Momentenmaß von  $\{N_B^{(1)}\}$  und  $\mu$  das Intensitätsmaß des Poissonschen Cluster-Prozesses  $\{N_B\}$  bezeichnet.

**Beweis**

- Aus der Definitionsgleichung (90) des zweiten Momentenmaßes  $\mu_2$  von  $\{N_B\}$  und aus der Darstellungsformel (97) für  $N_B$  ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \mu_2(B_1 \times B_2) &\stackrel{(97)}{=} \mathbb{E} \left( \sum_{n_1=1}^{\infty} N_{B_1-S_{n_1}}^{(n_1)} \sum_{n_2=1}^{\infty} N_{B_2-S_{n_2}}^{(n_2)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{n=1}^{\infty} N_{B_1-S_n}^{(n)} N_{B_2-S_n}^{(n)} \right) + \mathbb{E} \left( \sum_{n_1, n_2}^{\neq} N_{B_1-S_{n_1}}^{(n_1)} N_{B_2-S_{n_2}}^{(n_2)} \right) \\ &= \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2^{(1)}((B_1 - S_n) \times (B_2 - S_n)) + \mathbb{E} \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \mu^{(1)}(B_1 - S_{n_1}) \mu^{(1)}(B_2 - S_{n_2}), \end{aligned}$$

wobei sich der zweite Summand des letzten Ausdruckes aus der Unabhängigkeit der Punktprozesse  $\{N_B^{(n_1)}\}$  und  $\{N_B^{(n_2)}\}$  für  $n_1 \neq n_2$  ergibt.

- Außerdem ergibt sich aus der in Theorem 4.15 hergeleiteten Darstellungsformel  $\alpha_2^{(0)} = \mu^{(0)} \times \mu^{(0)}$  für das zweite faktorielle Momentenmaß  $\alpha_2^{(0)}$  des Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$ , dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \mu^{(1)}(B_1 - S_{n_1}) \mu^{(1)}(B_2 - S_{n_2}) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mu^{(1)}(B_1 - x_1) \mu^{(1)}(B_2 - x_2) \alpha_2^{(0)}(d(x_1, x_2)) \\ &\stackrel{(94)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B_1 - x_1) \mu^{(0)}(dx_1) \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B_2 - x_2) \mu^{(0)}(dx_2). \end{aligned}$$

- Somit gilt insgesamt

$$\begin{aligned} \mu_2(B_1 \times B_2) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mu_2^{(1)}((B_1 - x) \times (B_2 - x)) \mu^{(0)}(dx) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B_1 - x_1) \mu^{(0)}(dx_1) \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B_2 - x_2) \mu^{(0)}(dx_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mu_2^{(1)}((B_1 - x) \times (B_2 - x)) \mu^{(0)}(dx) + \mu(B_1) \mu(B_2), \end{aligned}$$

wobei sich der zweite Summand des letzten Ausdruckes aus der Darstellungsformel

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B - x) \mu^{(0)}(dx) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (100)$$

für das Intensitätsmaß  $\mu$  von  $\{N_B\}$  ergibt, die in Theorem 3.14 hergeleitet worden ist; vgl. (3.78).

- Hieraus ergibt sich nun mit Hilfe von (92) und (100), dass

$$\begin{aligned} \alpha_2(B_1 \times B_2) &\stackrel{(92)}{=} \mu_2(B_1 \times B_2) - \mu(B_1 \cap B_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mu_2^{(1)}((B_1 - x) \times (B_2 - x)) \mu^{(0)}(dx) + \mu(B_1) \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2) \\ &\stackrel{(100)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \mu_2^{(1)}((B_1 - x) \times (B_2 - x)) - \mu^{(1)}((B_1 \cap B_2) - x) \right) \mu^{(0)}(dx) + \mu(B_1) \mu(B_2) \\ &\stackrel{(92)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_2^{(1)}(B_1 - x, B_2 - x) \mu^{(0)}(dx) + \mu(B_1) \mu(B_2). \quad \square \end{aligned}$$

**4.3.4 Zweites reduziertes Momentenmaß; Ripleysche K-Funktion**

Sei  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein stationärer Punktprozess mit der Intensität  $\lambda \in (0, \infty)$ , so dass  $\mathbb{E} N_B^2 < \infty$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist das zweite faktorielle Momentenmaß  $\alpha_2$  von  $\{N_B\}$  lokal endlich, und es lässt sich durch das Intensitätsmaß der reduzierten Palmischen Verteilung  $P_N^!$  von  $\{N_B\}$  ausdrücken. Um dies zu zeigen, ist das folgende *verfeinerte Campbellsche Theorem* nützlich.

**Lemma 4.1** Für jede messbare Funktion  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  gilt

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \mathbf{T}_x \varphi - \delta_o) \varphi(dx) P_N(d\varphi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} f(x, \varphi) P_N^1(d\varphi) dx. \quad (101)$$

Der *Beweis* von Lemma 4.1 ergibt sich mit algebraischer Induktion aus der Definitionsgleichung (18) der reduzierten Palmischen Verteilung  $P_N^1$ . Er verläuft ähnlich wie der Beweis von Theorem 3.1 und wird deshalb weggelassen.

**Theorem 4.17** Für beliebige  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  gilt

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \lambda \int_{B_1} \mu^1(B_2 - x) dx, \quad (102)$$

wobei  $\mu^1 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  das Intensitätsmaß der reduzierten Palmischen Verteilung  $P_N^1$  von  $\{N_B\}$  ist, d.h.,

$$\mu^1(B) = \int_{\mathbb{N}} \varphi(B) P_N^1(d\varphi) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (103)$$

**Beweis**

- Aus der Definitionsgleichung (91) von  $\alpha_2$  ergibt sich, dass für beliebige  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \alpha_2(B_1 \times B_2) &\stackrel{(91)}{=} \mathbb{E} \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \mathbb{1}_{B_1 \times B_2}(S_{n_1}, S_{n_2}) \\ &= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_1 \times B_2}(x_1, x_2) (\varphi - \delta_{x_1})(dx_2) \varphi(dx_1) P_N(d\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_1 \times B_2}(x_1, x_1 + x_2) (\mathbf{T}_{x_1} \varphi - \delta_o)(dx_2) \varphi(dx_1) P_N(d\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \mathbf{T}_x \varphi - \delta_o) \varphi(dx) P_N(d\varphi), \end{aligned}$$

wobei

$$f(x, \varphi) = \mathbb{1}_{B_1}(x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_2 - x}(y) \varphi(dy).$$

- Hieraus ergibt sich mit Hilfe von Lemma 4.1, dass

$$\begin{aligned} \alpha_2(B_1 \times B_2) &\stackrel{(101)}{=} \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} f(x, \varphi) P_N^1(d\varphi) dx \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_1}(x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_2 - x}(y) \varphi(dy) P_N^1(d\varphi) dx \\ &= \lambda \int_{B_1} \mu^1(B_2 - x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

**Definition** Das Maß  $K : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  mit

$$K(B) = \frac{\mu^1(B)}{\lambda} \quad (104)$$

wird das *zweite reduzierte Momentenmaß* von  $\{N_B\}$  genannt. Wenn  $\{N_B\}$  stationär und isotrop ist, dann heißt  $K : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  mit  $K(r) = K(B(o, r))$  die *Ripleysche K-Funktion*. Darüber hinaus wird noch die so genannte L-Funktion  $L : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  betrachtet mit

$$L(r) = \left( \frac{K(r)}{\kappa_d} \right)^{1/d} \quad \forall r \geq 0, \quad (105)$$

wobei  $\kappa_d = \nu_d(B(o, 1))$  das Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

**Beachte**

- Wenn  $\{N_B\}$  ein homogener Poisson-Prozess ist, dann ergibt sich aus der Definitionsgleichung (104) mit Hilfe des Satzes von Slivnyak (vgl. Theorem 4.5), dass

$$K(B) = \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad \text{bzw.} \quad L(r) = r \quad \forall r \geq 0. \quad (106)$$

- Wenn  $\{N_B\}$  ein Poissonscher Cluster-Prozess mit der Intensität  $\lambda$  ist, dann ergibt sich aus (104) mit Hilfe von Theorem 4.9, dass

$$K(B) = \nu_d(B) + \lambda^{-1} \mu_{\tilde{N}-\delta_o}(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (107)$$

wobei  $\mu_{\tilde{N}-\delta_o}$  das Intensitätsmaß von  $\tilde{N} - \delta_o$  und  $\{\tilde{N}_B\}$  ein zufälliger Punktprozess mit der in (61) eingeführten Verteilung  $\tilde{P}$  ist. Insbesondere gilt somit

$$K(B) \geq \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (108)$$

Die Definitionsgleichung (104) des zweiten reduzierten Momentenmaßes führt zu dem folgenden (erwartungstreuen) Schätzer für die Größe  $\lambda^2 K(B)$ .

**Theorem 4.18** Für beliebige  $B, W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ , so dass  $\nu_d(W \cap (W + z)) > 0$  für jedes  $z \in B$ , ist durch

$$\widehat{\lambda^2 K(B)} = \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{\mathbb{1}_B(S_{n_2} - S_{n_1}) \mathbb{1}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2})}{\nu_d(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))} \quad (109)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für  $\lambda^2 K(B)$  gegeben.

**Beweis**

- Die Funktion  $f : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow [0, \infty)$  sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \frac{\mathbb{1}_B(x_2 - x_1) \mathbb{1}_{W \times W}(x_1, x_2)}{\nu_d(W \cap (W + (x_2 - x_1)))}.$$

- Dann ergibt sich aus der Definitionsgleichung (91) des zweiten faktoriellen Momentenmaßes  $\alpha_2$  und mit Hilfe von (102) bzw. (109), dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \widehat{\lambda^2 K(B)} &\stackrel{(109)}{=} \mathbb{E} \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{\mathbb{1}_B(S_{n_2} - S_{n_1}) \mathbb{1}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2})}{\nu_d(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))} \\ &\stackrel{(91)}{=} \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(x_1, x_2) \alpha_2(d(x_1, x_2)) \\ &\stackrel{(102)}{=} \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, x + y) K(dy) dx \\ &= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, x + y) dx K(dy) \\ &= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathbb{1}_B(y)}{\nu_d(W \cap (W + y))} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{W \times W}(x, x + y) dx K(dy) \\ &= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(y) K(dy) \\ &= \lambda^2 K(B). \end{aligned} \quad \square$$

**Beachte**

- Aus Theorem 4.15 ergibt sich, dass

$$\widehat{\lambda^2} = \frac{N_W(N_W - 1)}{\nu_d^2(W)} \quad (110)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für  $\lambda^2$  ist, wenn  $\{N_B\}$  ein homogener Poisson-Prozess ist. Zusammen mit Theorem 4.18 führt dies zu dem folgenden „natürlichen“ Schätzer für  $K(B)$ :

$$\widehat{K(B)} = \frac{\lambda^2 \widehat{K(B)}}{\widehat{\lambda^2}}. \quad (111)$$

- Wenn  $\{N_B\}$  stationär und isotrop ist, dann ergibt sich aus Theorem 4.18 insbesondere, dass

$$\lambda^2 \widehat{K(r)} = \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{\mathbb{1}_{B(o,r)}(S_{n_2} - S_{n_1}) \mathbb{1}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2})}{\nu_d(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))} \quad (112)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für  $\lambda^2 K(r)$  ist. Ähnlich wie in (111) führt dies zu den Schätzern

$$\widehat{K}(r) = \frac{\lambda^2 \widehat{K(r)}}{\widehat{\lambda^2}} \quad \text{und} \quad \widehat{L}(r) = \left( \frac{\widehat{K}(r)}{\kappa_d} \right)^{1/d} \quad (113)$$

für  $K(r)$  bzw.  $L(r)$ , wobei  $\widehat{\lambda^2}$  in (110) gegeben ist.

- Wenn  $\{N_B\}$  ein ergodischer isotroper Punktprozess ist, dann kann man auf ähnliche Weise wie in Theorem 4.11 bzw. in Theorem 4.14 zeigen, dass  $\widehat{K}(r)$  und  $\widehat{L}(r)$  (stark) konsistente Schätzer für  $K(r)$  bzw.  $L(r)$  sind.
- Im isotropen Fall wird außer  $\widehat{K}(r)$  bzw.  $\widehat{L}(r)$  noch eine weitere Art von Schätzern für  $K(r)$  bzw.  $L(r)$  betrachtet. Dabei wird der Schätzer  $\widehat{\lambda^2}$  in (113) für jedes  $r > 0$  ersetzt durch  $(\widetilde{\lambda}(r))^2$  mit

$$\widetilde{\lambda}(r) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_W(S_n) \nu_d(W \cap B(S_n, r))}{d \kappa_d \int_0^r u^{d-1} \bar{c}_W(u) du}, \quad (114)$$

wobei die „isotropisierte“ Mengenkovarianzfunktion  $\bar{c}_W : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  von  $W$  gegeben ist durch

$$\bar{c}_W(u) = \frac{1}{\nu_{d-1}(\partial B(o, 1))} \int_{\partial B(o, 1)} c_W(u, v) dv \quad \forall u \geq 0 \quad (115)$$

und  $c_W : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  die (eigentliche) Mengenkovarianzfunktion von  $W$  ist mit

$$c_W(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_W(y) \mathbb{1}_W(y - x) dy \quad (116)$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  mit der Darstellung  $x = (u, v)$  in Polarkoordinaten.

**4.3.5 Produktdichte und Paarkorrelationsfunktion; randkorrigierte Kernschätzer**

Wir betrachten nun den Fall, dass das zweite faktorielle Momentenmaß  $\alpha_2$  des zufälligen Zählmaßes  $\{N_B\}$  absolutstetig bezüglich des  $2d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes ist, d.h.,  $\alpha_2$  hat eine Dichte  $\rho_2 : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow [0, \infty)$ , so dass

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \int_{B_1} \int_{B_2} \rho_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (117)$$

Die in (117) gegebene Funktion  $\rho_2$  wird die *Produktdichte* zweiter Ordnung von  $\{N_B\}$  genannt.

**Beachte**

- Mit ähnlichen Argumenten wie bei der lokalen Charakterisierung der Intensität von stationären Punktprozessen (vgl. den Satz von Korolyuk in Theorem 4.4) kann man sich überlegen, dass die Größe  $\rho_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$  näherungsweise als die Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, dass in den infinitesimalen Umgebungen  $dx_1$  und  $dx_2$  von  $x_1 \neq x_2$  jeweils ein Atom des zufälligen Zählmaßes  $\{N_B\}$  liegt.
- Wenn  $\{N_B\}$  ein stationäres zufälliges Zählmaß mit der Intensität  $\lambda \in (0, \infty)$  ist, dann hängt die Produktdichte  $\rho_2(x_1, x_2)$  nur von der Differenz  $x_2 - x_1$  ab. Wenn  $\{N_B\}$  stationär und isotrop ist, dann gilt

$$\rho_2(x_1, x_2) = \rho_2(r), \quad \text{wobei } r = |x_2 - x_1|. \quad (118)$$

- Im letzteren Fall wird darüber hinaus die *Paarkorrelationsfunktion*  $g : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty)$  betrachtet, wobei

$$g(r) = \frac{\rho_2(r)}{\lambda^2} \quad \forall r \geq 0. \quad (119)$$

- Wenn die Ripleysche K-Funktion differenzierbar ist, dann ergibt sich unmittelbar aus den entsprechenden Definitionsgleichungen, dass sich die Paarkorrelationsfunktion  $g(r)$  durch die Ableitung  $dK(r)/dr$  der K-Funktion ausdrücken lässt. Und zwar gilt dann

$$g(r) = \frac{dK(r)/dr}{d\kappa_d r^{d-1}} \quad \forall r > 0. \quad (120)$$

Wenn  $\{N_B\}$  stationär und isotrop ist, dann werden in der Literatur als Schätzer  $\hat{\rho}_2(r)$  für die Produktdichte  $\rho(r) = \rho_2(x_1, x_2)$  mit  $r = |x_2 - x_1|$  randkorrigierte Kernschätzer vorgeschlagen:

$$\hat{\rho}_2(r) = \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{k(|S_{n_2} - S_{n_1}| - r) \mathbb{1}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2})}{d\kappa_d r^{d-1} \nu_d(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))}, \quad (121)$$

wobei  $k : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  eine Kernfunktion ist, beispielsweise

$$k(t) = \frac{1}{2h} \mathbb{1}_{[-h, h]}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

für eine gewisse Bandbreite  $h > 0$ . Ähnlich wie in (111) führt dies zu dem Schätzer

$$\hat{g}(r) = \frac{\hat{\rho}_2(r)}{(\hat{\lambda}(r))^2} \quad \forall r > 0 \quad (122)$$

für die Paarkorrelationsfunktion  $g(r)$ , wobei  $\hat{\lambda}(r)$  ein (randkorrigierter) Schätzer für  $\lambda$  ist, beispielsweise

$$\hat{\lambda}(r) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_W(S_n) \nu_{d-1}(W \cap \partial B(S_n, r))}{d\kappa_d r^{d-1} \bar{c}_W(r)}.$$

**4.3.6 Beispiele: Poisson-, Cox- und Cluster-Prozesse; Matérn-Hardcore-Prozesse**

In diesem Abschnitt zeigen wir zunächst, dass für die Paarkorrelationsfunktion  $g(r)$  von homogenen Poisson-Prozessen die Identität  $g(r) \equiv 1$  für jedes  $r > 0$  gilt. Außerdem diskutieren wir Beispiele von stationären und isotropen Punktprozessen (Cox-Prozesse, Poissonsche Cluster-Prozesse), für deren Paarkorrelationsfunktion  $g(r)$  die Ungleichung  $g(r) \geq 1$  für jedes  $r > 0$  gilt. Darüber hinaus geben wir eine Klasse von Punktprozessen (Matérn-Hardcore-Prozesse) an, für die die Punktepaare einen vorgegebenen Mindestabstand nicht unterschreiten.

## 1. Poisson-Prozesse

- Sei  $\{N_B\}$  ein Poisson-Prozess mit dem absolutstetigen Intensitätsmaß  $\mu$ , d.h., es gibt eine (Borel-messbare) Intensitätsfunktion  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ , so dass

$$\mu(B) = \int_B \lambda(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (123)$$

- Dann ergibt sich mit Hilfe von Theorem 4.15, dass

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) \stackrel{(94)}{=} \mu(B_1)\mu(B_2) \stackrel{(123)}{=} \int_{B_1} \int_{B_2} \lambda(x_1)\lambda(x_2) dx_1 dx_2.$$

- In diesem Fall ist also die Produktdichte  $\rho_2$  gegeben durch

$$\rho_2(x_1, x_2) = \lambda(x_1)\lambda(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d. \quad (124)$$

- Wenn  $\{N_B\}$  ein homogener (und somit auch isotroper) Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$  ist, dann gilt insbesondere

$$\rho_2(x_1, x_2) = \lambda^2 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d \quad (125)$$

bzw.

$$g(r) = 1 \quad \forall r \geq 0. \quad (126)$$

- Wenn sich also aus der Analyse der Daten ergibt, dass  $\hat{g}(r) > 1$ , wobei  $\hat{g}(r)$  ein geeignet gewählter Schätzer für  $g(r)$  ist, dann bedeutet dies, dass die relative Häufigkeit von Punkttepaaren mit Abstand  $r$  größer als bei einem homogenen Poisson-Prozess ist.

## 2. Cox-Prozesse

- Sei  $\{N_B\}$  ein Cox-Prozess, so dass die Realisierungen des zufälligen Intensitätsmaßes  $\{\Lambda_B\}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 absolutstetig bezüglich des  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes sind.
- D.h., es gibt ein zufälliges Feld  $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ , so dass

$$\Lambda_B = \int_B \lambda_x dx \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (127)$$

- Wegen Korollar 4.3 ist dann das zweite faktorielle Momentenmaß  $\alpha_2$  von  $\{N_B\}$  gegeben durch

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \int_{\mathbb{M}} \eta(B_1)\eta(B_2) P_\Lambda(d\eta) = \int_{B_1} \int_{B_2} \mathbb{E}(\lambda_{x_1}\lambda_{x_2}) dx_1 dx_2. \quad (128)$$

- Die Produktdichte  $\rho_2$  von  $\{N_B\}$  ist also gegeben durch  $\rho_2(x_1, x_2) = \mathbb{E}(\lambda_{x_1}\lambda_{x_2})$  für beliebige  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$  mit  $x_1 \neq x_2$ .
- Wenn das zufällige Intensitätsfeld  $\{\lambda_x\}$  stationär ist, dann ist  $\{N_B\}$  ein stationärer Cox-Prozess (vgl. die Theoreme 3.8 und 3.9), und es gilt

$$\rho_2(x_1, x_2) = \mathbb{E}(\lambda_o\lambda_{x_2-x_1}) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d \text{ mit } x_1 \neq x_2. \quad (129)$$

- Wir betrachten nun den Spezialfall, dass  $\{N_B\}$  ein modulierter Poisson-Prozess ist, wobei das zufällige Intensitätsfeld  $\{\lambda_x\}$  durch (3.52) gegeben ist. D.h., es gelte

$$\lambda_x = \begin{cases} \lambda_1, & \text{falls } x \in \Xi, \\ \lambda_2, & \text{falls } x \notin \Xi. \end{cases} \quad (130)$$

- Dabei seien  $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$  beliebige Zahlen mit  $\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$ , und für ein  $r_0 > 0$  gelte  $\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(S_i, r_0)$ , wobei  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda_0$  sei.
- Für die Produktdichte  $\rho_2$  von  $\{N_B\}$  ergibt sich dann aus (129) und (130), dass

$$\begin{aligned} \rho_2(x_1, x_2) &= \lambda_1^2 P(x_1 \in \Xi, x_2 \in \Xi) + \lambda_1 \lambda_2 (P(x_1 \in \Xi, x_2 \notin \Xi) + P(x_1 \notin \Xi, x_2 \in \Xi)) \\ &\quad + \lambda_2^2 P(x_1 \notin \Xi, x_2 \notin \Xi) \\ &= \lambda_1^2 p_{o, x_2 - x_1} + 2\lambda_1 \lambda_2 (p_o - p_{o, x_2 - x_1}) + \lambda_2^2 (1 - 2p_o + p_{o, x_2 - x_1}), \end{aligned}$$

d.h.,

$$\rho_2(x_1, x_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 p_{o, x_2 - x_1} + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 p_o + \lambda_2^2 \quad \forall x_1 \neq x_2, \quad (131)$$

wobei die Überdeckungswahrscheinlichkeiten

$$p_o = P(o \in \Xi) \quad \text{und} \quad p_{o, x_2 - x_1} = P(o \in \Xi, x_2 - x_1 \in \Xi)$$

in (3.67) bzw. (3.71) gegeben sind.

- Außerdem hatten wir in Theorem 3.11 gezeigt, dass die Intensität  $\lambda$  von  $\{N_B\}$  gegeben ist durch  $\lambda = \lambda_1 p_o + \lambda_2 (1 - p_o)$ .
- Aus (131) ergibt sich somit für die Paarkorrelationsfunktion  $g(r)$  von  $\{N_B\}$ , dass

$$g(r) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 p_{o, x_2 - x_1} + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 p_o + \lambda_2^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 p_o^2 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 p_o + \lambda_2^2} \quad \forall r = |x_2 - x_1| > 0. \quad (132)$$

- Wegen (3.71) gilt dabei, dass  $g(r) > 1$  für  $r < 2r_0$  bzw.  $g(r) = 1$  für  $r \geq 2r_0$ .

### 3. Poissonsche Cluster-Prozesse

- Sei  $\{N_B\}$  ein Poissonscher Cluster-Prozess mit

$$N_B = \sum_{n=1}^{\infty} N_{B-S_n}^{(n)},$$

so dass das Intensitätsmaß  $\mu^{(1)}$  und das zweite faktorielle Momentenmaß  $\alpha_2^{(1)}$  von  $\{N_B^{(1)}\}$  absolutstetige Maße bezüglich des  $d$ -dimensionalen bzw. des  $2d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes sind, wobei wir die Dichten mit  $d\mu^{(1)}/d\nu_d$  bzw.  $d\alpha_2^{(1)}/d\nu_{2d}$  bezeichnen.

- Aus der Darstellungsformel (99), die in Theorem 4.16 für das zweite faktorielle Momentenmaß  $\alpha_2$  von  $\{N_B\}$  hergeleitet worden ist, ergibt sich dann, dass

$$\begin{aligned} \alpha_2(B_1 \times B_2) &\stackrel{(99)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_2^{(1)}(B_1 - y, B_2 - y) \mu^{(0)}(dy) + \mu(B_1)\mu(B_2) \\ &\stackrel{(100)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_2^{(1)}(B_1 - y, B_2 - y) \mu^{(0)}(dy) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B_1 - y_1) \mu^{(0)}(dy_1) \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B_2 - y_2) \mu^{(0)}(dy_2) \\ &= \int_{B_1} \int_{B_2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{d\nu_{2d}}(x_1 - y, x_2 - y) \mu^{(0)}(dy) dx_1 dx_2 \\ &\quad + \int_{B_1} \int_{B_2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu^{(1)}}{d\nu_d}(x_1 - y_1) \mu^{(0)}(dy_1) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu^{(1)}}{d\nu_d}(x_2 - y_2) \mu^{(0)}(dy_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

- Die Produktdichte  $\rho_2$  von  $\{N_B\}$  ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \rho_2(x_1, x_2) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{d\nu_{2d}}(x_1 - y, x_2 - y) \mu^{(0)}(dy) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu^{(1)}}{d\nu_d}(x_1 - y_1) \mu^{(0)}(dy_1) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu^{(1)}}{d\nu_d}(x_2 - y_2) \mu^{(0)}(dy_2). \quad (133) \end{aligned}$$

- Wenn  $\mu^{(0)} = \lambda_0 \nu_d$  für ein  $\lambda_0 > 0$ , dann ergibt sich aus Theorem 3.14, dass  $\{N_B\}$  ein stationärer Poissonscher Cluster-Prozess mit der Intensität  $\lambda = \lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d)$  ist, und es gilt

$$\rho_2(x_1, x_2) = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{d\nu_{2d}}(x_1 - y, x_2 - y) dy + \lambda_0^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu^{(1)}}{d\nu_d}(x_1 - y_1) dy_1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu^{(1)}}{d\nu_d}(x_2 - y_2) dy_2$$

bzw.

$$\rho_2(x_1, x_2) = (\lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d))^2 + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{d\nu_{2d}}(x_1 - y, x_2 - y) dy. \quad (134)$$

- Wir betrachten nun den Spezialfall, dass  $\{N_B\}$  ein Neyman–Scott–Prozess ist, vgl. Abschnitt 3.3.3. D.h., die Sekundärprozesse  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$  sind gegeben durch

$$N_B^{(n)} = \sum_{i=1}^{T^{(n)}} \delta_{S_i^{(n)}}(B) \quad \forall n \geq 1, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (135)$$

wobei

- $\{S_i^{(n)}, i, n \geq 1\}$  eine Doppel-Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren  $S_i^{(n)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist, die von dem Poissonschen Primärprozess  $\{S_n\}$  unabhängig ist.
- und  $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen (mit nichtnegativen ganzzahligen Werten) ist, die von den Folgen  $\{S_i^{(n)}\}$  und  $\{S_n\}$  unabhängig ist.
- Dabei nehmen wir an, dass die Verteilungsfunktion von  $|S_2^{(1)} - S_1^{(1)}|$  differenzierbar ist.
  - Für das Integral des zweiten faktoriellen Momentenmaßes  $\alpha_2^{(1)}$  von  $\{N_B^{(1)}\}$  in (134) gilt dann mit der Schreibweise  $r = |x_2 - x_1|$ , dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{d\nu_{2d}}(x_1 - y, x_2 - y) dy &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{d\nu_{2d}}(y, x_2 - x_1 + y) dy \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(T^{(1)} = n) \frac{d}{dr} \frac{P(|S_2^{(1)} - S_1^{(1)}| \leq r)}{d\kappa_d r^{d-1}}. \end{aligned}$$

- Insgesamt ergibt sich aus (134), dass die Paarkorrelationsfunktion des Neyman–Scott–Prozesses  $\{N_B\}$  gegeben ist durch

$$g(r) = 1 + \frac{1}{\lambda \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d)} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(T^{(1)} = n) \frac{d}{dr} \frac{P(|S_2^{(1)} - S_1^{(1)}| \leq r)}{d\kappa_d r^{d-1}} \quad \forall r > 0. \quad (136)$$

- Sei nun  $\{N_B\}$  insbesondere ein Matérn–Cluster–Prozess ist (vgl. Abschnitt 3.2.3), d.h.,

$$T^{(1)} \sim \text{Poi}(\lambda^{(1)} \nu_d(B(o, R))) \quad \text{und} \quad S_1^{(1)} \sim U(B(o, R))$$

für gewisse Konstanten  $\lambda^{(1)} > 0$  und  $R > 0$ .

- Dann gilt  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(T^{(1)} = n) = (\lambda^{(1)} \nu_d(B(o, R)))^2$ , und aus (136) ergibt sich, dass

$$g(r) = 1 + \frac{1}{\lambda_0} \frac{d}{dr} \frac{P(|S_2^{(1)} - S_1^{(1)}| \leq r)}{d\kappa_d r^{d-1}} \quad \forall r > 0. \quad (137)$$

- Für  $d = 2$  gilt dabei, dass

$$\frac{d}{dr} P(|S_2^{(1)} - S_1^{(1)}| \leq r) = \begin{cases} \frac{4r}{\pi R^2} \left( \arccos\left(\frac{r}{2R}\right) - \frac{r}{2R} \sqrt{1 - \frac{r^2}{4R^2}} \right), & \text{falls } r \leq 2R, \\ 0, & \text{falls } r > 2R. \end{cases} \quad (138)$$

## 4. Matérn–Hardcore–Prozesse

- Ein einfaches Beispiel von stationären und isotropen Punktprozessen, für die es einen positiven Mindestabstand  $r_0 > 0$  zwischen den Punktepaaren gibt, so dass  $g(r) = 0$  für jedes  $r \in (0, r_0)$ , ist durch Matérn–Hardcore–Prozesse gegeben.
  - Sei  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson–Prozess mit der Intensität  $\lambda_0$ . Außerdem sei  $\{M_n\}$  eine Folge von unabhängigen und in  $[0, 1]$ –gleichverteilten Zufallsvariablen, so dass die Folgen  $\{S_n\}$  und  $\{M_n\}$  unabhängig sind.
  - Mit  $\{N_B\}$  bezeichnen wir den folgenden Punktprozess, der aus einer Teilfamilie von Atomen  $S_n$  des Poisson–Prozesses  $\{S_n\}$  gebildet und *Matérn–Hardcore–Prozess* mit dem Hardcore–Radius  $r_0 > 0$  genannt wird:

$$N_B = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_B(S_n) \mathbb{1}_{(0, Z_n)}(M_n) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (139)$$

wobei

$$Z_n = \begin{cases} \min_{k: 0 < |S_k - S_n| \leq r_0} M_k, & \text{falls } \#\{k : 0 < |S_k - S_n| \leq r_0\} > 0, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

das Minimum der „Marken“  $M_k$  derjenigen Punkte  $S_k \neq S_n$  ist, die in der Kugel  $B(S_n, r_0)$  um den Mittelpunkt  $S_n$  liegen.

- Man kann sich leicht überlegen, dass der in (139) definierte Punktprozess  $\{N_B\}$  stationär und isotrop ist. Außerdem kann man zeigen, dass die Intensität  $\lambda$  von  $\{N_B\}$  gegeben ist durch

$$\lambda = \frac{1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r_0^d)}{\kappa_d r_0^d}, \quad (140)$$

denn es gilt

$$\lambda = p \lambda_0 \quad \text{mit} \quad p = \int_0^1 p(t) dt = \frac{1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r_0^d)}{\lambda_0 \kappa_d r_0^d},$$

wobei  $p(t) = \exp(-\lambda_0 \kappa_d r_0^d t)$  die (Palmsche) Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass ein (willkürlich ausgewählter) Punkt des Poisson–Prozesses  $\{S_n\}$ , dessen Marke gleich  $t$  ist, nicht gestrichen wird.

- Die Produktdichte  $\rho_2(x_1, x_2)$  des Matérn–Hardcore–Prozesses  $\{N_B\}$  ist gegeben durch

$$\rho_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{falls } r \leq r_0, \\ \frac{2c_{r_0}(r)(1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r_0^d)) - 2\kappa_d r_0^d(1 - \exp(-\lambda_0 c_{r_0}(r)))}{\kappa_d r_0^d c_{r_0}(r)(c_{r_0}(r) - \kappa_d r_0^d)}, & \text{falls } r_0 < r \leq 2r_0, \\ \lambda^2 & \text{falls } r > 2r_0, \end{cases} \quad (141)$$

wobei  $c_{r_0}(r) = \nu_d(B(o, r_0) \cup B(x_2 - x_1, r_0))$  und  $r = |x_2 - x_1|$ .

- Für die Paarkorrelationsfunktion  $g(r)$  von  $\{N_B\}$  gilt also

$$g(r) = 0, \text{ falls } r \leq r_0, \quad \text{bzw.} \quad g(r) \geq 1, \text{ falls } r_0 < r \leq 2r_0, \quad \text{bzw.} \quad g(r) = 1, \text{ falls } r > 2r_0.$$

## 5 Markierte Punktprozesse

### 5.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff des markierten Punktprozesses ein und diskutieren einige grundlegende Eigenschaften dieses stochastischen Modells. Insbesondere betrachten wir stationäre markierte Punktprozesse, ihre Palmische Verteilung bzw. die so genannte Palmische Markenverteilung, die als die Verteilung der Marke des typischen Punktes interpretiert werden kann.

#### 5.1.1 Markenraum; unabhängige Markierung

- Zur Erinnerung:

- Eine Folge  $\{S_n\}$  von Zufallsvektoren  $S_1, S_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  über einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  wird *zufälliger Punktprozess* im  $\mathbb{R}^d$  genannt, wenn

$$\#\{n : S_n \in B\} < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (1)$$

- Wenn zusätzlich zu der *lokalen Endlichkeitsbedingung* (1) gilt, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$S_i \neq S_j \quad \forall i, j \geq 1 \text{ mit } i \neq j, \quad (2)$$

dann wird  $\{S_n\}$  ein *einfacher* zufälliger Punktprozess genannt.

- Im folgenden werden wir stets voraussetzen, dass  $\{S_n\}$  ein einfacher Punktprozess ist. Dabei ist durch den Ansatz

$$N_B = \#\{n : S_n \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

ein (lokal endliches) zufälliges Zählmaß  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  gegeben.

- In vielen Fällen ist es zweckmäßig, nicht nur eine Art von Punkten zu betrachten, sondern zwischen verschiedenen Typen von Punkten zu unterscheiden bzw. allgemeiner gesagt: außer den Lokationen  $S_n$  der Punkte noch zusätzliche Informationen über die Punkte im Modell zu erfassen. Dabei wird jedem Punkt  $S_n$  eine weitere Zufallsvariable  $L_n$  zugeordnet.

- Mit anderen Worten: Neben der Folge  $\{S_n\}$  betrachten wir noch eine weitere Folge  $\{L_n\}$  von Zufallsvariablen  $L_n : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$  über dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , die ihre Werte in einem messbaren Raum  $(\mathbb{L}, \mathcal{L})$  annehmen.
- Dabei werden die meisten Beispiele so beschaffen sein, dass  $\mathbb{L}$  ein metrischer Raum und  $\mathcal{L}$  die  $\sigma$ -Algebra der Borel-Mengen in  $\mathbb{L}$  ist, die durch die betrachtete Metrik induziert wird.
- Man sagt dann, dass die Folge  $\{(S_n, L_n)\}$  ein (zufälliger) *markierter Punktprozess* ist. Dabei heißt  $L_n$  die *Marke* (bzw. das *Label*) von  $S_n$ , und  $\mathbb{L}$  wird der *Markenraum* von  $\{(S_n, L_n)\}$  genannt.
- Durch den Ansatz

$$N_{B \times C} = \#\{n : S_n \in B, L_n \in C\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), C \in \mathcal{L} \quad (3)$$

ist ein (lokal endliches) zufälliges Zählmaß über der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{L}$  gegeben.

- Wenn die Zufallsvariablen  $L_1, L_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$  unabhängig und identisch verteilt sind und wenn die Folgen  $\{S_n\}$  und  $\{L_n\}$  unabhängig sind, dann sagt man, dass  $\{(S_n, L_n)\}$  ein *unabhängig markierter* Punktprozess ist.
- Beachte: Jeder markierte Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  in  $\mathbb{R}^d$  mit dem Markenraum  $\mathbb{L}$  kann als (unmarkierter) Punktprozess in dem Produktraum  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{L}$  aufgefasst werden.

## Beispiele

- Wenn  $\{(S_n, L_n)\}$  ein unabhängig markierter Punktprozess ist, so dass  $\{S_n\}$  ein Poisson-Prozess im  $\mathbb{R}^d$  ist, dann nennt man  $\{(S_n, L_n)\}$  einen *zusammengesetzten Poisson-Prozess*.
- Ein Beispiel eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses ist bereits in Abschnitt 2.1.5 diskutiert worden, und zwar im Zusammenhang mit der Konstruktion von Poisson-Prozessen in höherdimensionalen euklidischen Räumen; vgl. auch die Bemerkung nach Theorem 2.8.
- Eine andere Art von zusammengesetzten Poisson-Prozessen wird bei der Konstruktion von modulierten Poisson-Prozessen betrachtet; vgl. Abschnitt 3.2.3.
  - Man kann nämlich in Verallgemeinerung des Keim-Korn-Modells  $\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(S_i, r)$ , das in Abschnitt 3.2.3 verwendet wurde, anstelle des deterministischen Kornradius  $r > 0$  eine Folge von zufälligen Kornradien  $L_1, L_2, \dots : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  betrachten, die unabhängig und identisch verteilt sind, wobei die Folgen  $\{S_n\}$  und  $\{L_n\}$  unabhängig sind.
  - Der zusammengesetzte Poisson-Prozess  $\{(S_n, L_n)\}$  generiert dann das Keim-Korn-Modell

$$\Xi' = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(S_i, L_i). \quad (4)$$

- Sei nun  $\{S'_n\}$  ein Cox-Prozess im  $\mathbb{R}^d$ , dessen (zufälliges) Intensitätsfeld  $\{\lambda'_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  gegeben ist durch

$$\lambda'_x = \begin{cases} \lambda_1, & \text{falls } x \in \Xi', \\ \lambda_2, & \text{falls } x \notin \Xi', \end{cases} \quad (5)$$

wobei  $\Xi'$  in (4) gegeben ist und  $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$  beliebige Zahlen mit  $\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$  sind.

- Dann können wir den Punkten  $S'_n$  die Marken  $L'_n$  zuordnen, wobei

$$L'_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } S'_n \in \Xi', \\ 0, & \text{falls } S'_n \notin \Xi'. \end{cases} \quad (6)$$

- Beachte: Wenn  $0 < \mathbb{E} L'_n < \infty$ , dann ist der markierte Punktprozess  $\{(S'_n, L'_n)\}$  *nicht* unabhängig markiert. Denn man kann zeigen, dass die Marken von Punkte-Paaren, die hinreichend nahe beieinander liegen, positiv korreliert sind.
- Eine weitere spezielle Klasse von zusammengesetzten Poisson-Prozessen ist durch die in Abschnitt 3.3.1 eingeführten Poissonschen Cluster-Prozesse gegeben.
  - Die Folge der Marken  $L_1, L_2, \dots$  ist dabei eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Punktprozessen  $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$ , die von  $\{S_n\}$  unabhängig sind und deren Intensitätsmaß  $\{\mu^{(1)}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  endlich ist.
  - Der Markenraum  $\mathbb{L}$  ist also in diesem Fall durch den Raum  $\mathbb{N}$  aller lokal endlichen Zählmaße in  $\mathbb{R}^d$  gegeben, wobei  $\mathcal{L}$  mit der in Abschnitt 2.1.1 eingeführten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N}$  von Teilmengen von  $\mathbb{N}$  übereinstimmt.

## 5.1.2 Intensitätsmaß und Campbellsches Theorem

- Ähnlich wie bei unmarkierten Punktprozessen (vgl. Abschnitt 3.1.1) kann man auch für jeden markierten Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  bzw. für das zugehörige Zählmaß  $N = \{N_{B \times C}\}$  den Begriff des *Intensitätsmaßes*  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$  einführen, wobei

$$\mu(B \times C) = \mathbb{E} N_{B \times C} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), C \in \mathcal{L}. \quad (7)$$

- Dabei wird stets vorausgesetzt, dass das Maß  $\mu(\cdot \times \mathbb{L})$  lokal endlich ist.

Das folgende Resultat wird in der Literatur das *Campbellsche Theorem* für markierte Punktprozesse genannt. Es kann als eine Verallgemeinerung von Theorem 3.1 aufgefasst werden.

**Theorem 5.1**

- Sei  $\{(S_n, L_n)\}$  ein markierter Punktprozess mit dem Intensitätsmaß  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$ , und sei  $f : (\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}) \times \mathbb{L} \rightarrow [0, \infty)$  eine nichtnegative Borel-messbare Funktion mit  $f(\infty, l) = 0$  für jedes  $l \in \mathbb{L}$ .
- Dann gilt

$$\mathbb{E} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f(S_n, L_n) \right) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{L}} f(x, l) \mu(d(x, l)), \quad (8)$$

d.h.,  $\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n, L_n)$  ist ein erwartungstreuer Schätzer des Integrals  $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{L}} f(x, l) \mu(d(x, l))$ .

Der Beweis von Theorem 5.1 verläuft analog zum Beweis von Theorem 3.1 und wird deshalb weggelassen.

### 5.1.3 Stationarität und Ergodizität

Unter der Stationarität eines markierten Punktprozesses versteht man die folgende Invarianzeigenschaft seiner endlich-dimensionalen Wahrscheinlichkeiten bezüglich beliebiger Verschiebungen des Nullpunktes.

**Definition** Der markierte Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  bzw. das zugehörige Zählmaß  $N = \{N_{B \times C}\}$  heißt *stationär*, wenn

$$(N_{B_1 \times C_1}, \dots, N_{B_n \times C_n}) \stackrel{D}{=} (N_{(B_1+x) \times C_1}, \dots, N_{(B_n+x) \times C_n}) \quad (9)$$

für beliebige  $n \geq 1$ ,  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,  $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{L}$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ , wobei  $B_i + x = \{y + x : y \in B_i\}$  die Verschiebung der Borel-Menge  $B_i$  um den Vektor  $x$  bezeichnet und

$$N_{B_i \times C_i} = \#\{n : S_n \in B_i, L_n \in C_i\}.$$

**Beachte**

- Die in (9) betrachtete Invarianzeigenschaft bezieht sich lediglich auf die Verschiebung der Lokationen  $S_n$  der Punkte um den Vektor  $-x$  (was der Verschiebung des Nullpunktes um den Vektor  $x$  entspricht), während die Marken  $L_n$  nicht verändert werden.
- Man kann sich leicht überlegen, dass jeder unabhängig markierte Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  stationär ist, wenn der zugrundeliegende (unmarkierte) Punktprozess  $\{S_n\}$  stationär ist.
- Außerdem ergibt sich unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (3.16) und (9), dass der (unmarkierte) Punktprozess  $\{S_n\}$ , der einem stationären markierten Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  zugrunde liegt, ebenfalls stationär ist.
- Umgekehrt kann man Beispiele dafür finden, so dass  $\{S_n\}$  stationär ist, obwohl der markierte Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  nicht stationär ist.

Ähnlich wie in Theorem 3.5 kann man zeigen, dass stationäre markierte Punktprozesse mit Wahrscheinlichkeit 1 entweder unendlich viele Punkte mit Marken aus einer vorgegebenen Markenmenge  $C \in \mathcal{L}$  haben oder überhaupt keinen Punkt mit einer Marke aus  $C$  besitzen. Dabei ergibt sich das folgende Resultat.

**Theorem 5.2** Sei  $\{(S_n, L_n)\}$  ein stationärer markierter Punktprozess. Dann gilt

$$P(\{N_{\mathbb{R}^d \times C} = \infty\} \cup \{N_{\mathbb{R}^d \times C} = 0\}) = 1 \quad \forall C \in \mathcal{L}, \quad (10)$$

wobei  $N_{\mathbb{R}^d \times C} = \#\{n : S_n \in \mathbb{R}^d, L_n \in C\}$ .

**Beweis** Die Gültigkeit von (10) ergibt sich unmittelbar aus Theorem 3.5, wenn  $\{N_{\cdot \times C}\}$  als das zufällige Zählmaß eines unmarkierten stationären Punktprozesses aufgefasst wird, und zwar des stationären Punktprozesses aller derjenigen Punkte  $S_n$  mit einer Marke aus  $C$ .  $\square$

Auf die gleiche Weise wie Theorem 5.2 ergibt sich das folgende Resultat aus Theorem 3.6.

**Theorem 5.3** Sei  $\{(S_n, L_n)\}$  ein stationärer markierter Punktprozess. Dann gibt es für jedes  $C \in \mathcal{L}$  eine Konstante  $\lambda_C < \infty$ , so dass

$$\mu(B \times C) = \lambda_C \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (11)$$

und

$$P(N_{\{x\} \times C} > 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (12)$$

### Beachte

- Offenbar gilt  $\lambda_C = \mathbb{E} N_{[0,1]^d \times C}$ , d.h., die Konstante  $\lambda_C$  in (11) ist die Intensität derjenigen Punkte  $S_n$ , die eine Marke aus  $C$  haben. Deshalb wird  $\lambda_C$  auch kurz  $C$ -Intensität des stationären markierten Punktprozesses  $\{(S_n, L_n)\}$  genannt.
- Aus (11) ergibt sich außerdem, dass

$$\widehat{\lambda}_{C,W} = \frac{N_{W \times C}}{\nu_d(W)} \quad (13)$$

für jedes  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\lambda_C$  ist.

- Wenn  $W_1, W_2, \dots$  eine Folge von Beobachtungsfenstern  $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  ist und wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } N_{W_n \times C}}{\nu_d^2(W_n)} = 0, \quad (14)$$

dann ergibt sich aus der Tschebyschew-Ungleichung (vgl. Theorem WR-4.18), dass der erwartungstreue Schätzer  $\widehat{\lambda}_{C,W_n}$  schwach konsistent ist.

- Ähnlich wie im unmarkierten Fall kann anstelle der Bedingung (14) vorausgesetzt werden, dass der stationäre markierte Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  ergodisch ist, um zu gewährleisten, dass  $\widehat{\lambda}_{C,W_n}$  ein (stark) konsistenter Schätzer für  $\lambda_C$  ist.

Um den Begriff der Ergodizität von stationären markierten Punktprozessen einführen zu können, betrachten wir den folgenden kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum.

- Sei  $\mathbb{N}_{\mathbb{L}}$  die Familie aller Zählmaße  $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{L} \rightarrow \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$ , so dass  $\varphi(B \times \mathbb{L}) < \infty$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .

- Außerdem betrachten wir

- die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N}_{\mathbb{L}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\mathbb{L}})$ , wobei  $\mathcal{N}_{\mathbb{L}}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\mathbb{N}_{\mathbb{L}}$  ist, so dass  $\varphi \mapsto \varphi(B \times C)$  für beliebige  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $C \in \mathcal{L}$  eine  $(\mathcal{N}_{\mathbb{L}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Abbildung ist,
- und die Familie  $\{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  von  $(\mathcal{N}_{\mathbb{L}}, \mathcal{N}_{\mathbb{L}})$ -messbaren Verschiebungsoperatoren  $\mathbf{T}_x : \mathbb{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow \mathbb{N}_{\mathbb{L}}$ , so dass

$$(\mathbf{T}_x \varphi)(B \times C) = \varphi((B + x) \times C) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), C \in \mathcal{L}, \quad (15)$$

d.h., jedem Zählmaß  $\varphi = \sum_n a_n \delta_{(s_n, l_n)}$  aus  $\mathbb{N}_{\mathbb{L}}$  wird das Zählmaß  $\mathbf{T}_x \varphi = \sum_n a_n \delta_{(s_n - x, l_n)}$  zugeordnet, wobei die (Lokations-) Komponenten  $s_n$  der Atome  $(s_n - x, l_n)$  von  $\varphi$  um den Vektor  $-x$  verschoben werden.

- Die „Gewichte“  $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und die Marken  $l_n$  der Punkte  $s_n$  bleiben dabei unverändert.

- Man kann sich leicht überlegen, dass der markierte Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  bzw. das zugehörige zufällige Zählmaß  $N = \{N_{B \times C}\}$  genau dann stationär ist,

- wenn seine Verteilung  $P_N$  invariant bezüglich  $\{\mathbf{T}_x\}$  ist, wobei  $P_N(A) = P(N \in A)$  für jedes  $A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}$ ,
- d.h., die Definitionsgleichung (9) für die Stationarität von markierten Punktprozessen gilt genau dann, wenn

$$P_N(A) = P_N(\mathbf{T}_x A) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}, \quad \text{wobei } \mathbf{T}_x A = \{\mathbf{T}_x \varphi : \varphi \in A\}. \quad (16)$$

### Beachte

- Ähnlich wie im unmarkierten Fall bildet der kanonische Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathbb{N}_{\mathbb{L}}, \mathcal{N}_{\mathbb{L}}, P_N)$  zusammen mit der in (15) eingeführten Gruppe  $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  von Verschiebungsoperatoren ein dynamisches System; vgl. Abschnitt 3.4.1.
- Dabei heißt der stationäre markierte Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  *ergodisch*, wenn das dynamische System  $(\mathbb{N}_{\mathbb{L}}, \mathcal{N}_{\mathbb{L}}, P_N, \mathbf{T})$  ergodisch ist.

Ähnlich wie bei der Herleitung von Theorem 3.18 für unmarkierte Punktprozesse ergibt sich auch im markierten Fall aus Theorem 3.17, dass der Intensitätsschätzer  $\hat{\lambda}_{C,W} = N_{W \times C} / \nu_d(W)$  die folgende (starke) Konsistenz-eigenschaft besitzt, wenn der markierte Punktprozess  $N = \{N_{B \times C}\}$  ergodisch ist.

**Theorem 5.4** *Sei  $N = \{N_{B \times C}\}$  ein ergodischer markierter Punktprozess mit der  $C$ -Intensität  $\lambda_C$ , wobei  $C \in \mathcal{L}$  eine beliebige (messbare) Teilmenge des Markenraumes  $\mathbb{L}$  ist. Dann gilt*

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{C,[-n,n]^d} = \lambda_C\right) = 1. \quad (17)$$

### Beachte

- Man kann sich leicht überlegen, dass jeder unabhängig markierte Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  ergodisch ist, wenn der zugrundeliegende (unmarkierte) Punktprozess  $\{S_n\}$  ergodisch ist.
- Außerdem kann man zeigen, dass der in (5) – (6) eingeführte (nicht unabhängig) markierte Punktprozess  $\{(S'_n, L'_n)\}$  stationär und auch ergodisch ist.

## 5.2 Palmsche Verteilungen

### 5.2.1 Definition durch Intensitätsquotienten; typischer Punkt

Ähnlich wie bei unmarkierten Punktprozessen (vgl. Abschnitt 4.1) besteht die Grundidee bei der Definition von Palmschen Verteilungen stationärer markierter Punktprozesse  $\{(S_n, L_n)\}$  darin, für beliebige (jedoch fest vorgegebene)  $A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}$  und  $C \in \mathcal{L}$  nur diejenigen Atome von  $\{(S_n, L_n)\}$  zu betrachten, die eine Marke aus  $C$  haben und aus deren Sicht das zugehörige zufällige Zählmaß die Eigenschaft  $A$  hat.

Dies führt zu der folgenden verallgemeinerten Version der Definitionsgleichung (4.6) für die Palmsche Verteilung von (unmarkierten) stationären Punktprozessen.

**Definition** Sei  $C \in \mathcal{L}$  eine beliebige (messbare) Teilmenge des Markenraumes  $\mathbb{L}$  mit  $0 < \lambda_C < \infty$ . Dann heißt die Mengenfunktion  $P_N^C : \mathcal{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$P_N^C(A) = \frac{\mathbb{E} \#\{n : S_n \in [0, 1]^d, L_n \in C, \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{(S_m - S_n, L_m)} \in A\}}{\lambda_C} \quad \forall A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}} \quad (18)$$

die *Palmsche Verteilung* von  $\{(S_n, L_n)\}$  bezüglich der Markenmenge  $C \in \mathcal{L}$ .

**Beachte**

- Mit der gleichen Begründung wie bei der Herleitung von (4.6) ergibt sich, dass für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(B) < \infty$  und für jedes  $A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}$

$$\begin{aligned} P_N^C(A) &= \frac{\mathbb{E} \# \{n : S_n \in B, L_n \in C, \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{(S_m - S_n, L_m)} \in A\}}{\lambda_C \nu_d(B)} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \sum_{n: s_n(\varphi) \in B, l_n(\varphi) \in C} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)} \varphi) P_N(d\varphi)}{\lambda_C \nu_d(B)}. \end{aligned}$$

- Außerdem ergibt sich genauso wie im Beweis von Theorem 4.2, dass

$$P_N^C(\mathbb{N}_{\mathbb{L}}^C) = 1, \quad (19)$$

wobei  $\mathbb{N}_{\mathbb{L}}^C = \{\varphi \in \mathbb{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(\{o\} \times C) > 0\}$  die Menge derjenigen Zählmaße aus  $\mathbb{N}_{\mathbb{L}}$  ist, die im Nullpunkt ein Atom mit einer Marke aus  $C$  besitzen. Wegen (19) genügt es, die Palm'sche Verteilung  $P_N^C$  auf der Spur- $\sigma$ -Algebra

$$\mathcal{N}_{\mathbb{L}}^C = \mathcal{N}_{\mathbb{L}} \cap \mathbb{N}_{\mathbb{L}}^C$$

zu betrachten.

- Wenn der stationäre markierte Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  ergodisch ist, dann ergibt sich so wie im Beweis von Theorem 4.3, dass für jedes  $A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}$

$$P_N^C(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{[-n, n]^d \times C, A}}{N_{[-n, n]^d \times C}}, \quad (20)$$

wobei

$$N_{[-n, n]^d \times C, A} = \# \{n : S_n \in [-n, n]^d, L_n \in C, \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{(S_m - S_n, L_m)} \in A\}, \quad N_{[-n, n]^d \times C} = N_{[-n, n]^d \times C, \mathbb{N}_{\mathbb{L}}}.$$

- Weil die Palm'sche Wahrscheinlichkeit  $P_N^C(A)$  im ergodischen Fall als Grenzwert der relativen Häufigkeiten  $N_{[-n, n]^d \times C, A} / N_{[-n, n]^d \times C}$  in (20) dargestellt werden kann, kann man  $P_N^C(A)$  als die Wahrscheinlichkeit auffassen, dass der stationäre markierte Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  aus der Sicht eines zufällig herausgegriffenen Punktes  $S_m$  mit einer Marke  $L_m$  aus  $C$  die Eigenschaft  $A$  hat.
- Man sagt deshalb auch, dass  $P_N^C(A)$  die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass der *typische Punkt* von  $\{(S_n, L_n)\}$  mit einer Marke aus  $C$  die Eigenschaft  $A$  hat.
- Im ergodischen Fall liefert die Formel (20) somit einen natürlichen Ansatz zur (konsistenten) Schätzung der Palm'schen Wahrscheinlichkeit  $P_N^C(A)$ , wenn die Anzahlen  $N_{[-n, n]^d \times C}$  und  $N_{[-n, n]^d \times C, A}$  für ein großes  $n$ , d.h., für ein großes Beobachtungsfenster  $W_n = [-n, n]^d$  bestimmt werden können.

Unmittelbar aus der Definitionsgleichung (18) der Palm'schen Verteilung  $P_N^C$  ergibt sich durch algebraische Induktion das folgende Campbellsche Theorem für stationäre markierte Punktprozesse (vgl. auch das Lemma 4.1 für den unmarkierten Fall).

**Theorem 5.5**

- Sei  $\{(S_n, L_n)\}$  ein stationärer markierter Punktprozess, und sei  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, \infty)$  eine nichtnegative messbare Funktion.
- Dann gilt für jedes  $C \in \mathcal{L}$  mit  $\lambda_C > 0$

$$\int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \mathbf{T}_x \varphi) \varphi(dx \times C) P_N(d\varphi) = \lambda_C \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} f(x, \varphi) P_N^C(d\varphi) dx. \quad (21)$$

Außerdem ergibt sich aus Theorem 5.5 das folgende (duale) Campbellsche Theorem.

**Korollar 5.1** Sei  $\{(S_n, L_n)\}$  ein stationärer markierter Punktprozess, und sei  $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, \infty)$  eine nichtnegative messbare Funktion. Dann gilt für jedes  $C \in \mathcal{L}$  mit  $\lambda_C > 0$

$$\int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \varphi) \varphi(dx \times C) P_N(d\varphi) = \lambda_C \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} g(x, \mathbf{T}_{-x}\varphi) P_N^C(d\varphi) dx. \quad (22)$$

**Beweis**

- Die Funktion  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{M}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, \infty)$  sei gegeben durch  $f(x, \varphi) = g(x, \mathbf{T}_{-x}\varphi)$ .
- Dann ergibt sich aus Formel (21) in Theorem 5.5, dass

$$\begin{aligned} \lambda_C \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} g(x, \mathbf{T}_{-x}\varphi) P_N^C(d\varphi) dx &= \lambda_C \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} f(x, \varphi) P_N^C(d\varphi) dx \\ &\stackrel{(21)}{=} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \mathbf{T}_x\varphi) \varphi(dx \times C) P_N(d\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \mathbf{T}_{-x}(\mathbf{T}_x\varphi)) \varphi(dx \times C) P_N(d\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \varphi) \varphi(dx \times C) P_N(d\varphi). \quad \square \end{aligned}$$

**Beachte**

- Für jedes  $C \in \mathcal{L}$  ist das *Campbellsche Maß*  $\gamma^C : \mathcal{N}_{\mathbb{L}} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  des stationären markierten Punktprozesses  $\{(S_n, L_n)\}$  gegeben durch

$$\gamma^C(A \times B) = \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \varphi(B \times C) \mathbb{1}_A(\varphi) P_N(d\varphi) \quad \forall A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (23)$$

- Für  $g(x, \varphi) = \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_A(\varphi)$  ergibt sich dann aus Korollar 5.1, dass für jedes  $C \in \mathcal{L}$  mit  $\lambda_C > 0$

$$\gamma^C(A \times B) = \lambda_C \int_B P_x^C(A) dx \quad \forall A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (24)$$

wobei für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_x^C : \mathcal{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, 1]$  gegeben ist durch

$$P_x^C(A) = P_N^C(\mathbf{T}_x A) \quad \forall A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}. \quad (25)$$

### 5.2.2 Lokale Charakterisierung; Zwei-Punkt-Palm-Verteilung

Ähnlich wie in Abschnitt 4.1.2 lässt sich auch für stationäre markierte Punktprozesse eine lokale Charakterisierung der in (18) eingeführten Palmschen Verteilung  $P_N^C$  herleiten. Dabei ergibt sich genauso wie in Theorem 4.4 bzw. in Korollar 4.1 das folgende Resultat.

**Theorem 5.6** Sei  $B_k = [-1/k, 1/k]^d$  für jedes  $k \geq 1$ .

- Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(B_k \times C) > 0)}{\nu_d(B_k)} = \lambda_C \quad \forall C \in \mathcal{L}. \quad (26)$$

- Darüber hinaus gilt für jedes  $C \in \mathcal{L}$  mit  $0 < \lambda_C < \infty$ , dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_N^C - P_{k,C}\| = 0, \quad (27)$$

wobei die (bedingte) Verteilung  $P_{k,C} : \mathcal{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, 1]$  gegeben ist durch

$$P_{k,C}(A) = P_N(\{\varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}} : \mathbf{T}_{s^{(k)}(\varphi)} \varphi \in A\} \mid \{\varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(B_k \times C) > 0\}) \quad \forall A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}} \quad (28)$$

und  $s^{(k)}(\varphi)$  dasjenige Atom von  $\varphi$  in  $B_k$  mit einer Marke aus  $C$  bezeichnet, das den kleinsten Abstand vom Nullpunkt hat.

### Beachte

- Ähnlich wie Theorem 4.4 im unmarkierten Fall wird Theorem 5.6 der *Satz von Korolyuk* für stationäre markierte Punktprozesse genannt.
- Man kann sich leicht überlegen, dass sich aus Theorem 5.6 das folgende Resultat ergibt, das in der Literatur der *Satz von Dobrushin* genannt wird.

**Korollar 5.2** Für jedes  $C \in \mathcal{L}$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_N(\varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(B_k \times C) > 1)}{\nu_d(B_k)} = 0 \quad (29)$$

und somit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_N(\varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(B_k \times C) = 1)}{\nu_d(B_k)} = \lambda_C. \quad (30)$$

### Beweis

- Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{P_N(\varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(B_k \times C) > 1)}{\nu_d(B_k)} \\ & \leq \frac{1}{\nu_d(B_k)} \left( \sum_{j=1}^{\infty} j P_N(\varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(B_k \times C) = j) - \sum_{j=1}^{\infty} P_N(\varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(B_k \times C) = j) \right) \\ & = \lambda_C - \frac{1}{\nu_d(B_k)} P_N(\varphi \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(B_k \times C) > 0). \end{aligned}$$

- Hieraus und aus Theorem 5.6 ergibt sich die Gültigkeit von (29) und (30).  $\square$

Auf ähnliche Weise wie die lokale Charakterisierung (27) der Palmschen Verteilung  $P_N^C$  lässt sich das folgende zweidimensionale Analogon von (27) herleiten.

- Dabei benötigen wir den Begriff der *Nullfolge von gerichteten Zerlegungen* des  $\mathbb{R}^d$  in paarweise disjunkte und beschränkte Borel-Mengen, vgl. auch Abschnitt 3.5.4. Sei also  $\{\{B_{kj}, j \geq 1\}, k \geq 1\}$  eine Familie von beschränkten Borel-Mengen  $B_{kj} \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit den folgenden Eigenschaften:
  - Für beliebige  $i, j, k \geq 1$  mit  $i \neq j$  gelte  $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{kj} = \mathbb{R}^d$  und  $B_{ki} \cap B_{kj} = \emptyset$ .
  - Für jedes  $k \geq 1$  und für jede beschränkte Borel-Menge  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  gilt  $B_{kj} \cap B \neq \emptyset$  nur für endliche viele  $j \geq 1$  (lokale Endlichkeit).
  - Für beliebige  $k, j \geq 1$  gibt es eine Zahl  $i \geq 1$ , so dass  $B_{k+1,j} \subset B_{ki}$  (Gerichtetheit bzw. „Nesting“).
  - Es gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{j \geq 1} \sup_{x, y \in B_{kj}} |x - y| = 0$  (beliebig hohe Feinheit).

- Außerdem sei  $\alpha_2^{C_1, C_2} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d}) \rightarrow [0, \infty]$  das zweite *faktorielle Momentenmaß* von  $\{(S_n, L_n)\}$  bezüglich der Markenmengen  $C_1, C_2 \in \mathcal{L}$ , wobei

$$\alpha_2^{C_1, C_2}(B_1 \times B_2) = \mathbb{E} \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \mathbb{1}_{B_1 \times B_2}(S_{n_1}, S_{n_2}) \mathbb{1}_{C_1 \times C_2}(L_{n_1}, L_{n_2}) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (31)$$

wobei sich die Summation in (31) über alle Paare  $(n_1, n_2)$  von verschiedenen Indizes erstreckt.

### Theorem 5.7

- Seien  $C_1, C_2 \in \mathcal{L}$  beliebige Teilmengen des Markenraumes  $\mathbb{L}$ , und sei  $\{\{B_{kj}, j \geq 1\}, k \geq 1\}$  eine Nullfolge von gerichteten Zerlegungen des  $\mathbb{R}^d$ .
- Dann gibt es für  $\alpha_2^{C_1, C_2}$ -fast jeden Vektor  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2d}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_{x_1, x_2}^{C_1, C_2} : \mathcal{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$P_{x_1, x_2}^{C_1, C_2}(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_N(A \mid \{\varphi \in \mathbb{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(B_k(x_1) \times C_1) > 0, \varphi(B_k(x_2) \times C_2) > 0\}) \quad \forall A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}, \quad (32)$$

wobei  $B_k(x)$  diejenige Komponente  $B_{kj}$  der Zerlegung  $\{B_{kj}, j \geq 1\}$  bezeichnet, für die  $x \in B_{kj}$  gilt.

Der *Beweis* von Theorem 5.7 geht über den Rahmen dieser einführenden Vorlesung hinaus, denn er erfordert relativ tiefliegende Hilfsmittel aus der Maßtheorie, vgl. O. Kallenberg (1986) *Random Measures*, Academic Press, London.

### Beachte

- Das in Theorem 5.7 betrachtete Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_{x_1, x_2}^{C_1, C_2}$  heißt *Zwei-Punkt-Palm-Verteilung* von  $\{(S_n, L_n)\}$  bezüglich der Markenmengen  $C_1, C_2 \in \mathcal{L}$ .
- Wegen (32) kann  $P_{x_1, x_2}^{C_1, C_2}$  als bedingte Verteilung von  $\{(S_n, L_n)\}$  aufgefasst werden unter der Bedingung, dass in (infinitesimal kleinen Umgebungen der) Lokationen  $x_1$  und  $x_2$  mit  $x_1 \neq x_2$  jeweils ein Punkt des Punktprozesses  $\{(S_n, L_n)\}$  mit einer Marke aus  $C_1$  bzw.  $C_2$  liegt.

Mit Hilfe von (ebenfalls relativ tiefliegenden) Hilfsmitteln aus der Maß- und Integrationstheorie kann man zeigen, dass die in (32) gegebene Familie der Wahrscheinlichkeiten  $\{P_{x_1, x_2}^{C_1, C_2}(A), x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d\}$  als eine Radon-Nikodym-Dichte des Campbellschen Maßes zweiter Ordnung von  $\{(S_n, L_n)\}$  aufgefasst werden kann.

### Theorem 5.8

- Für beliebige, fest vorgegebene  $C_1, C_2 \in \mathcal{L}$  sei  $\gamma^{C_1, C_2} : \mathcal{N}_{\mathbb{L}} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d}) \rightarrow [0, \infty]$  das Campbellsche Maß zweiter Ordnung des stationären markierten Punktprozesses  $\{(S_n, L_n)\}$ , wobei

$$\gamma^{C_1, C_2}(A \times B_1 \times B_2) = \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \mathbb{1}_A(\varphi) \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \mathbb{1}_{B_1 \times B_2}(S_{n_1}(\varphi), S_{n_2}(\varphi)) \mathbb{1}_{C_1 \times C_2}(L_{n_1}(\varphi), L_{n_2}(\varphi)) P_N(d\varphi). \quad (33)$$

- Dann gilt

$$\gamma^{C_1, C_2}(A \times B_1 \times B_2) = \int_{B_1 \times B_2} P_{x_1, x_2}^{C_1, C_2}(A) \alpha_2^{C_1, C_2}(d(x_1, x_2)) \quad \forall A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}, B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (34)$$

### Beweis

- Unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (31) und (33) von  $\alpha_2^{C_1, C_2}$  bzw.  $\gamma^{C_1, C_2}$  ergibt sich, dass aus  $\alpha_2^{C_1, C_2}(B_1 \times B_2) = 0$  die Gültigkeit von  $\gamma^{C_1, C_2}(A \times B_1 \times B_2) = 0$  folgt, und zwar für beliebige  $A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}$  und  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

- D.h., für jedes  $A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}$  ist das  $\sigma$ -endliche Maß  $\gamma_A^{C_1, C_2} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d}) \rightarrow [0, \infty]$  mit

$$\gamma_A^{C_1, C_2}(B_1 \times B_2) = \gamma^{C_1, C_2}(A \times B_1 \times B_2) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

absolutstetig bezüglich des zweiten faktoriellen Momentenmaßes  $\alpha_2^{C_1, C_2}$ .

- Es gibt somit eine Radon–Nikodym–Dichte  $d\gamma_A^{C_1, C_2}/d\alpha_2^{C_1, C_2}$  mit

$$\gamma_A^{C_1, C_2}(B_1 \times B_2) = \int_{B_1 \times B_2} \frac{d\gamma_A^{C_1, C_2}}{d\alpha_2^{C_1, C_2}}(x_1, x_2) \alpha_2^{C_1, C_2}(d(x_1, x_2)) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (35)$$

- Außerdem kann man zeigen, dass der stochastische Kern  $p : \mathbb{R}^{2d} \times \mathcal{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, 1]$  in (35) mit

$$p(x, A) = \frac{d\gamma_A^{C_1, C_2}}{d\alpha_2^{C_1, C_2}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2d}, A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}$$

so gewählt werden kann,

- dass die Mengenfunktion  $p_x : \mathcal{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, 1]$  mit  $p_x(A) = p(x, A)$  für  $\alpha_2^{C_1, C_2}$ -fast jedes  $x = (x_1, x_2)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h.,  $\sigma$ -additiv ist,
- das mit der in (32) eingeführten Zwei-Punkt-Palm-Verteilung  $P_{x_1, x_2}^{C_1, C_2} : \mathcal{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, 1]$  übereinstimmt; vgl. § 15 in O. Kallenberg (1986) Random Measures, Academic Press, London.  $\square$

### 5.2.3 Palmsche Markenverteilung

Wenn in der Definitionsgleichung (18) der Palmschen Verteilung  $P_N^C$  spezielle Ereignisse  $A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}^C$  betrachtet werden, dann führt dies zu dem folgenden Begriff der Palmschen Markenverteilung.

**Definition** Sei  $C \in \mathcal{L}$  eine beliebige Teilmenge des Markenraumes  $\mathbb{L}$  mit  $0 < \lambda_C < \infty$ , und sei  $\mathcal{L}_C = \mathcal{L} \cap C$ . Dann heißt die Mengenfunktion  $P_{o, C} : \mathcal{L}_C \rightarrow [0, 1]$  mit

$$P_{o, C}(C') = \frac{\lambda_{C'}}{\lambda_C} \quad \forall C' \in \mathcal{L}_C \quad (36)$$

die (bedingte) *Palmsche Markenverteilung* von  $\{(S_n, L_n)\}$  bezüglich der Markenmenge  $C \in \mathcal{L}$ .

#### Beachte

- Sei  $C' \in \mathcal{L}_C$ . Wenn in (18) die Menge  $A_{C'} \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}^C$  mit  $A_{C'} = \{\varphi \in \mathbb{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(\{o\} \times C') > 0\}$  eingesetzt wird, dann ergibt sich, dass

$$P_{o, C}(C') = P_N^C(A_{C'}). \quad (37)$$

- Im ergodischen Fall kann die Größe  $P_{o, C}(C')$  somit als die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür aufgefasst werden, dass der typische Punkt von  $\{(S_n, L_n)\}$  eine Marke aus  $C' \in \mathcal{L}_C$  hat unter der Bedingung, dass die Marke des typischen Punktes aus  $C$  ist.
- Insbesondere ist dann  $P_o : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  mit  $P_o(C) = P_{o, \mathbb{L}}(C)$  die (unbedingte) Markenverteilung des typischen Punktes von  $\{(S_n, L_n)\}$ .

Wir zeigen nun, welche Form die in (36) eingeführte Palmsche Markenverteilung  $P_{o, C} : \mathcal{L}_C \rightarrow [0, 1]$  bei unabhängiger Markierung besitzt.

**Theorem 5.9**

- Der stationäre markierte Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  sei unabhängig markiert, wobei  $G : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$G(C) = P(L_n \in C) \quad \forall C \in \mathcal{L} \quad (38)$$

die Verteilung der (unabhängigen und identisch verteilten) Zufallsvariablen  $L_1, L_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$  bezeichnet.

- Für jedes  $C \in \mathcal{L}$  mit  $G(C) > 0$  gilt dann, dass  $\lambda_C > 0$  und

$$P_{o,C}(C') = \frac{G(C')}{G(C)} \quad \forall C' \in \mathcal{L}_C. \quad (39)$$

**Beweis**

- Gemäß Theorem 5.3 ist die Intensität  $\lambda_C$  des stationären markierten Punktprozesses  $\{(S_n, L_n)\}$  gegeben durch

$$\lambda_C = \mathbb{E} \#\{n : S_n \in [0, 1]^d, L_n \in C\} \quad \forall C \in \mathcal{L}.$$

- Außerdem ergibt sich aus der unabhängigen Markierung von  $\{(S_n, L_n)\}$ , dass

$$\begin{aligned} \lambda_C &= \mathbb{E} \#\{n : S_n \in [0, 1]^d, L_n \in C\} \\ &= \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[0, 1]^d}(S_n) \mathbb{1}_C(L_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} (\mathbb{1}_{[0, 1]^d}(S_n) \mathbb{1}_C(L_n)) \\ &\stackrel{\text{unabhängige Markierung}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \mathbb{1}_{[0, 1]^d}(S_n) \mathbb{E} \mathbb{1}_C(L_n) \\ &= P(L_1 \in C) \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in [0, 1]^d) \end{aligned}$$

- Hieraus folgt insbesondere, dass  $\lambda_C > 0$  genau dann, wenn  $P(L_1 \in C) > 0$ .

- Die Markenmenge  $C \in \mathcal{L}$  sei nun so gewählt, dass  $P(L_1 \in C) > 0$ . Dann ergibt sich aus der oben geführten Rechnung, dass für jedes  $C' \in \mathcal{L}_C$

$$P_{o,C}(C') = \frac{\lambda_{C'}}{\lambda_C} = \frac{P(L_1 \in C') \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in [0, 1]^d)}{P(L_1 \in C) \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in [0, 1]^d)} = \frac{G(C')}{G(C)}. \quad \square$$

**5.3 Weitere Kenngrößen von markierten Punktprozessen und ihre Schätzer**

Wir diskutieren nun einige Kenngrößen von stationären und ergodischen markierten Punktprozessen,

- deren Definitionen mit den in Abschnitt 5.2 eingeführten Begriffen der Palmschen Verteilung  $P_N^C$  bzw. der Zwei-Punkt-Palm-Verteilung  $P_{x_1, x_2}^{C_1, C_2}$  zusammenhängen
- und die zur statistischen Analyse der Struktureigenschaften von unregelmäßigen markierten Punktmustern genutzt werden können.

### 5.3.1 Markenkovarianzfunktion

Dabei betrachten wir zunächst für markierte Punktprozesse mit reellwertigen Marken die Kovarianz der Marken von zwei zufällig ausgewählten Punkten des Punktprozesses, die einen vorgegebenen Abstand voneinander haben.

Sei  $\{(S_n, L_n)\}$  ein stationärer und isotroper markierter Punktprozess, dessen Marken reelle Zahlen sind, d.h.  $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ , sei  $\{\{B_{kj}, j \geq 1\}, k \geq 1\}$  eine Nullfolge von gerichteten Zerlegungen des  $\mathbb{R}^d$ , und sei  $B_k(x)$  diejenige Komponente  $B_{kj}$  der Zerlegung  $\{B_{kj}, j \geq 1\}$ , für die  $x \in B_{kj}$  gilt.

Außerdem verwenden wir für  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$  und  $C_1, C_2 \in \mathcal{L}$  die abkürzende Schreibweise

$$A_{x_1, x_2, k}^{C_1, C_2} = \{\varphi \in \mathbb{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(B_k(x_1) \times C_1) > 0, \varphi(B_k(x_2) \times C_2) > 0\}.$$

#### Definition

- Ähnlich wie in Theorem 5.7 kann man zeigen, dass es für  $\alpha_2^{\mathbb{L}, \mathbb{L}}$ -fast jeden Vektor  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2d}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_{x_1, x_2} : \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  gibt mit

$$P_{x_1, x_2}(C_1 \times C_2) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_N(A_{x_1, x_2, k}^{C_1, C_2} \mid A_{x_1, x_2, k}^{\mathbb{L}, \mathbb{L}}) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathcal{L}. \quad (40)$$

- Das in (40) gegebene Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_{x_1, x_2}$  heißt die (unbedingte) *Palmsche Zwei-Punkt-Markenverteilung* von  $\{(S_n, L_n)\}$  bezüglich des Punktepaars  $(x_1, x_2)$ .
- Außerdem heißt die Funktion  $\theta : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\theta(r) = \int_{\mathbb{L} \times \mathbb{L}} l_1 l_2 P_{x_1, x_2}(dl_1 \times dl_2) - \left( \int_{\mathbb{L}} l P_o(dl) \right)^2 \quad (41)$$

die *Markenkovarianzfunktion* von  $\{(S_n, L_n)\}$ , wobei  $P_o$  die in Abschnitt 5.2.3 eingeführte *Palmsche Markenverteilung* ist und vorausgesetzt wird, dass

$$\int_{\mathbb{L} \times \mathbb{L}} |l_1 l_2| P_{x_1, x_2}(dl_1 \times dl_2) < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{L}} |l| P_o(dl) < \infty.$$

**Beachte** Wegen der Stationarität und Isotropie von  $\{(S_n, L_n)\}$  hängt das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_{x_1, x_2}$  in (40) und somit auch der Wert des Integrals in (41) lediglich vom Abstand  $r = |x_2 - x_1|$  der Lokationen  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$  ab.

#### Theorem 5.10

- Wenn der Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  unabhängig markiert ist, dann ist das in (40) eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_{x_1, x_2} : \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  ein Produktmaß, das nicht von  $x_1, x_2$  (und damit natürlich auch nicht von  $r = |x_2 - x_1|$ ) abhängt, wobei

$$P_{x_1, x_2}(C_1 \times C_2) = P(L_1 \in C_1) P(L_1 \in C_2) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathcal{L}. \quad (42)$$

- Insbesondere gilt dann

$$\theta(r) = 0 \quad \forall r > 0. \quad (43)$$

#### Beweis

- Aus der Definitionsgleichung (40) der *Palmschen Zwei-Punkt-Markenverteilung*  $P_{x_1, x_2}$  und aus Formel (29) in Korollar 5.2 ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} P_{x_1, x_2}(C_1 \times C_2) &\stackrel{(40)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} P_N(A_{x_1, x_2, k}^{C_1, C_2} \mid A_{x_1, x_2, k}^{\mathbb{L}, \mathbb{L}}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} P_N(\{\varphi \in \mathbb{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(B_k(x_1) \times C_1) > 0, \varphi(B_k(x_2) \times C_2) > 0\} \mid A_{x_1, x_2, k}^{\mathbb{L}, \mathbb{L}}) \\ &\stackrel{(29)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} P_N(\{\varphi \in \mathbb{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(B_k(x_1) \times C_1) = 1, \varphi(B_k(x_2) \times C_2) = 1\} \mid A_{x_1, x_2, k}^{\mathbb{L}, \mathbb{L}}). \end{aligned}$$

- Hieraus und aus der unabhängigen Markiertheit von  $\{(S_n, L_n)\}$  ergibt sich dann für jede hinreichend große Zahl  $k \geq 1$  mit  $B_k(x_1) \cap B_k(x_2) = \emptyset$ , dass

$$\begin{aligned} P_{x_1, x_2}(C_1 \times C_2) &= P(L_1 \in C_1) P(L_1 \in C_2) \\ &\quad \times \lim_{k \rightarrow \infty} P_N(\{\varphi \in \mathbb{N}_{\mathbb{L}} : \varphi(B_k(x_1) \times \mathbb{L}) = 1, \varphi(B_k(x_2) \times \mathbb{L}) = 1\} \mid A_{x_1, x_2, k}^{\mathbb{L}, \mathbb{L}}) \\ &= P(L_1 \in C_1) P(L_1 \in C_2), \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit durch die erneute Anwendung von Korollar 5.2 ergibt.

- Damit ist (42) bewiesen. Hieraus und aus (39) ergibt sich die Gültigkeit von (43).  $\square$

Ein weiterer interessanter Spezialfall ist gegeben, wenn die Marken  $L_n$  von  $\{(S_n, L_n)\}$  durch ein zufälliges Feld  $\{Z_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  generiert werden, dass von dem (unmarkierten) Punktprozess  $\{S_n\}$  unabhängig ist, und wenn dabei  $L_n = Z_{S_n}$  gesetzt wird.

### Theorem 5.11

- Sei  $\{S_n\}$  ein stationärer und isotroper Punktprozess im  $\mathbb{R}^d$ , und sei  $\{Z_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  ein stationäres und isotropes Zufallsfeld mit Werten in  $\mathbb{R}$ , so dass  $\mathbb{E} Z_x^2 < \infty$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ .
- Die stochastischen Prozesse  $\{S_n\}$  und  $\{Z_x\}$  seien unabhängig, und die Abbildung  $Z_{S_n} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$Z_{S_n}(\omega) = Z_{S_n(\omega)}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

sei für jedes  $n \geq 1$  eine wohldefinierte Zufallsvariable.

- Dann ist  $\{(S_n, L_n)\}$  mit  $L_n = Z_{S_n}$  ein stationärer und isotroper markierter Punktprozess in  $\mathbb{R}^d$  mit Marken in  $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ , wobei das in (40) eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_{x_1, x_2} : \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  gegeben ist durch

$$P_{x_1, x_2}(C_1 \times C_2) = P(Z_{x_1} \in C_1, Z_{x_2} \in C_2) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathcal{L}.$$

- Insbesondere gilt

$$\theta(r) = \mathbb{E}(Z_o Z_{x_2 - x_1}) - (\mathbb{E} Z_o)^2 \quad \forall r = |x_2 - x_1| > 0. \quad (44)$$

Der Beweis von Theorem 5.11 verläuft analog zum Beweis von Theorem 5.10.

### Beachte

- Für das in Theorem 5.11 betrachtete Modell stimmt die Markenkovarianzfunktion  $\theta : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Kovarianzfunktion des Zufallsfeldes  $\{Z_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  überein.
- Zur Konstruktion eines Schätzers  $\hat{\theta}(r)$  für die Markenkovarianzfunktion  $\theta(r)$  von  $\{(S_n, L_n)\}$  kann eine verallgemeinerte Version des Schätzansatzes verwendet werden, der in Abschnitt 4.3.5 bei der Schätzung der Produktdichte  $\rho_2(r)$  betrachtet wurde.
- Ähnlich wie in (4.121) kann man beispielsweise den folgenden randkorrigierten Schätzer  $\hat{\theta}(r)$  für  $\theta(r)$  betrachten:

$$\hat{\theta}(r) = \frac{\sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{k(|S_{n_2} - S_{n_1}| - r) \mathbb{I}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2})(Z_{S_{n_1}} - \bar{Z}_W)(Z_{S_{n_2}} - \bar{Z}_W)}{\nu_d(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))}}{\sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{k(|S_{n_2} - S_{n_1}| - r) \mathbb{I}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2})}{\nu_d(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))}}, \quad (45)$$

wobei das Stichprobenmittel

$$\bar{Z}_W = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_W(S_n) Z_{S_n}}{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_W(S_n)}$$

ein Schätzer für  $\mathbb{E} Z_o$  und  $k : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  eine Kernfunktion ist, beispielsweise

$$k(t) = \frac{1}{2h} \mathbb{I}_{[-h, h]}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

für eine gewisse Bandbreite  $h > 0$ .

### 5.3.2 Bedingte K-Funktionen und bedingte Paarkorrelationsfunktionen

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Begriffe der Ripleyschen K-Funktion und der Paarkorrelationsfunktion, die in den Abschnitten 4.3.4 bzw. 4.3.5 für den unmarkierten Fall eingeführt worden sind.

Dabei nehmen wir an, dass  $\{(S_n, L_n)\}$  ein stationärer und isotroper markierter Punktprozess ist und dass der Markenraum  $\mathbb{L}$  von  $\{(S_n, L_n)\}$  eine nichtleere *endliche* Menge ist, wobei  $\mathcal{L}$  die Potenzmenge von  $\mathbb{L}$  bezeichnet. Die Marke  $L_n$  von  $S_n$  interpretieren wir als den *Typ* des Punktes  $S_n$ .

#### Beachte

- Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir das in (31) eingeführte zweite faktorielle Momentenmaß  $\alpha_2^{\{i\}, \{j\}}$  von  $\{(S_n, L_n)\}$  bezüglich der Markenmengen  $\{i\}, \{j\} \subset \mathbb{L}$  mit  $\alpha_2^{ij}$ , d.h.,

$$\alpha_2^{ij}(B_1 \times B_2) = \mathbb{E} \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \mathbb{I}_{B_1 \times B_2}(S_{n_1}, S_{n_2}) \mathbb{I}_{\{i\} \times \{j\}}(L_{n_1}, L_{n_2}) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (46)$$

wobei sich die Summation über alle Paare  $(n_1, n_2)$  von verschiedenen Indizes erstreckt.

- Außerdem bezeichnen wir die Intensität  $\lambda_{\{i\}}$  der Punkte vom Typ  $i \in \mathbb{L}$  kurz mit  $\lambda_i$ , wobei wir annehmen, dass  $\lambda_i > 0$  für jedes  $i \in \mathbb{L}$ .

Auf ähnliche Weise wie in Theorem 4.17 lässt sich dann die folgende *Desintegrationsformel* für  $\alpha_2^{ij}$  herleiten.

#### Theorem 5.12

- Für beliebige  $i, j \in \mathbb{L}$  sei  $P_N^{ij} : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$P_N^{ij}(A) = \frac{\mathbb{E} \#\{n : S_n \in [0, 1]^d, L_n = i, \varphi_{n,j} \in A\}}{\lambda_i} \quad \forall A \in \mathcal{N} \quad (47)$$

die *reduzierte Palmische Verteilung der Punkte von  $\{(S_n, L_n)\}$  mit Typ  $j$  bezüglich der „Markenmenge“  $\{i\} \subset \mathbb{L}$ , wobei das (lokal endliche) Zählmaß  $\varphi_{n,j}$  gegeben ist durch*

$$\varphi_{n,j} = \sum_{m \geq 1: m \neq n, L_m = j} \delta_{S_m - S_n}.$$

- Dann gilt für beliebige  $i, j \in \mathbb{L}$  und  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\alpha_2^{ij}(B_1 \times B_2) = \lambda_i \int_{B_1} \mu^{ij}(B_2 - x) dx, \quad (48)$$

wobei  $\mu^{ij} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  das Intensitätsmaß der reduzierten Palmischen Verteilung  $P_N^{ij}$  bezeichnet mit  $\mu^{ij}(B) = \int_{\mathbb{N}} \varphi(B) P_N^{ij}(d\varphi)$  für jedes  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

Die Darstellungsformel (48) des zweiten faktoriellen Momentenmaßes  $\alpha_2^{ij}$  in Theorem 5.12 motiviert die folgenden Verallgemeinerungen der Ripleyschen  $K$ -Funktion bzw. der  $L$ -Funktion, die in (4.104) bzw. (4.105) für den unmarkierten Fall eingeführt worden sind.

### Definition

- Für beliebige  $i, j \in \mathbb{L}$  wird die Funktion  $K_{ij} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$K_{ij}(r) = \frac{\mu^{ij}(B(o, r))}{\lambda_j} \quad (49)$$

die bedingte *Ripleysche  $K$ -Funktion* der Punkte von  $\{(S_n, L_n)\}$  mit Typ  $j$  bezüglich der Punkte mit Typ  $i$  genannt (d.h. unter der Bedingung, dass im Nullpunkt ein Punkt von  $\{(S_n, L_n)\}$  mit Typ  $i$  liegt).

- Darüber hinaus wird für beliebige  $i, j \in \mathbb{L}$  die bedingte  $L$ -Funktion  $L_{ij} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  betrachtet mit

$$L_{ij}(r) = \left( \frac{K_{ij}(r)}{\kappa_d} \right)^{1/d} \quad \forall r \geq 0, \quad (50)$$

wobei  $\kappa_d = \nu_d(B(o, 1))$  das Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Außerdem ergibt sich mit Hilfe von Theorem 5.12 das folgende Resultat.

**Theorem 5.13** *Für beliebige  $i, j \in \mathbb{L}$  gilt*

$$K_{ij}(r) = K_{ji}(r) \quad \forall r \geq 0. \quad (51)$$

Wenn  $\{(S_n, L_n)\}$  unabhängig markiert ist, dann gilt insbesondere

$$K_{ij}(r) = K(r) \quad \forall i, j \in \mathbb{L}, r \geq 0, \quad (52)$$

wobei  $K(r)$  die  $K$ -Funktion des (unmarkierten) Punktprozesses  $\{S_n\}$  ist.

### Beweis

- Wir zeigen zuerst die Gültigkeit von (51).
  - Aus der Definitionsgleichung (49) von  $K_{ij}(r)$  und aus Formel (21) in Theorem 5.5 ergibt sich für  $C = \{i\}$  und  $f_j(x, \varphi) = \mathbb{1}_{B(o, s)}(x) \varphi((B(o, r) \setminus \{o\}) \times \{j\})$ , wobei  $s > r$ , dass

$$\begin{aligned} \lambda_i \lambda_j K_{ij}(r) &\stackrel{(49)}{=} \lambda_i \mu^{ij}(B(o, r)) \\ &= \frac{\lambda_i}{\kappa_d s^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} f_j(x, \varphi) P_N^{\{i\}}(d\varphi) dx \\ &\stackrel{(21)}{=} \frac{1}{\kappa_d s^d} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} f_j(x, \mathbf{T}_x \varphi) \varphi(dx \times \{i\}) P_N(d\varphi) \\ &= \frac{1}{\kappa_d s^d} \mathbb{E} \sum_{n, m \geq 1} \mathbb{1}_{[0, s]}(|S_n|) \mathbb{1}_{(0, r]}(|S_m - S_n|) \mathbb{1}_{\{i\}}(L_n) \mathbb{1}_{\{j\}}(L_m), \end{aligned}$$

d.h.

$$\lambda_i \lambda_j K_{ij}(r) = \frac{1}{\kappa_d s^d} \mathbb{E} \sum_{n, m \geq 1} \mathbb{1}_{[0, s]}(|S_n|) \mathbb{1}_{(0, r]}(|S_m - S_n|) \mathbb{1}_{\{i\}}(L_n) \mathbb{1}_{\{j\}}(L_m). \quad (53)$$

– Mit Hilfe der elementaren Ungleichungen

$$|S_n| \leq |S_m| + |S_m - S_n| \quad \text{bzw.} \quad |S_m| \leq |S_n| + |S_m - S_n|$$

ergeben sich hieraus die Abschätzungen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa_d s^d} \mathbb{E} \sum_{n,m \geq 1} \mathbb{1}_{[0,s-r]}(|S_m|) \mathbb{1}_{(0,r]}(|S_m - S_n|) \mathbb{1}_{\{i\}}(L_n) \mathbb{1}_{\{j\}}(L_m) \\ &= \frac{1}{\kappa_d s^d} \mathbb{E} \sum_{n,m \geq 1} \mathbb{1}_{[0,r]}(|S_n|) \mathbb{1}_{[0,s-r]}(|S_m|) \mathbb{1}_{(0,r]}(|S_m - S_n|) \mathbb{1}_{\{i\}}(L_n) \mathbb{1}_{\{j\}}(L_m) \\ &\leq \frac{1}{\kappa_d s^d} \mathbb{E} \sum_{n,m \geq 1} \mathbb{1}_{[0,r]}(|S_n|) \mathbb{1}_{(0,r]}(|S_m - S_n|) \mathbb{1}_{\{i\}}(L_n) \mathbb{1}_{\{j\}}(L_m) \\ &= \lambda_i \lambda_j K_{ij}(r) \\ &= \frac{1}{\kappa_d s^d} \mathbb{E} \sum_{n,m \geq 1} \mathbb{1}_{[0,r]}(|S_n|) \mathbb{1}_{[0,s+r]}(|S_m|) \mathbb{1}_{(0,r]}(|S_m - S_n|) \mathbb{1}_{\{i\}}(L_n) \mathbb{1}_{\{j\}}(L_m) \\ &\leq \frac{1}{\kappa_d s^d} \mathbb{E} \sum_{n,m \geq 1} \mathbb{1}_{[0,s+r]}(|S_m|) \mathbb{1}_{(0,r]}(|S_m - S_n|) \mathbb{1}_{\{i\}}(L_n) \mathbb{1}_{\{j\}}(L_m). \end{aligned}$$

– Die erneute Anwendung von Theorem 5.5 ergibt somit, dass

$$\frac{\kappa_d (s-r)^d}{\kappa_d s^d} \lambda_i \lambda_j K_{ji}(r) \leq \lambda_i \lambda_j K_{ij}(r) \leq \frac{\kappa_d (s+r)^d}{\kappa_d s^d} \lambda_i \lambda_j K_{ji}(r).$$

– Weil  $s \in (r, \infty)$  beliebig groß gewählt werden kann, ist damit die Gültigkeit von (51) bewiesen.

- Wir nehmen nun an, dass  $\{(S_n, L_n)\}$  unabhängig markiert ist.

– Dann ergibt sich aus (53), dass

$$\begin{aligned} K_{ij}(r) &\stackrel{(53)}{=} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j \kappa_d s^d} \mathbb{E} \sum_{n,m \geq 1} \mathbb{1}_{[0,s]}(|S_n|) \mathbb{1}_{(0,r]}(|S_m - S_n|) \mathbb{1}_{\{i\}}(L_n) \mathbb{1}_{\{j\}}(L_m) \\ &\stackrel{\text{unabh. Markierung}}{=} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j \kappa_d s^d} \mathbb{E} \sum_{n,m \geq 1} \mathbb{1}_{[0,s]}(|S_n|) \mathbb{1}_{(0,r]}(|S_m - S_n|) P(L_1 = i) P(L_1 = j) \\ &\stackrel{(36),(39)}{=} \frac{1}{\lambda^2 \kappa_d s^d} \mathbb{E} \sum_{n,m \geq 1} \mathbb{1}_{[0,s]}(|S_n|) \mathbb{1}_{(0,r]}(|S_m - S_n|) \\ &\stackrel{(4.18)}{=} \frac{\int_{\mathbb{N}} \varphi(B(o, r)) P^1(d\varphi)}{\lambda} \\ &\stackrel{(4.104)}{=} K(r), \end{aligned}$$

– wobei  $\lambda = \sum_{i \in \mathbb{L}} \lambda_i$  die Intensität des (unmarkierten) Punktprozesses  $\{S_n\}$  ist und  $P^1$  die reduzierte Palmsche Verteilung von  $\{S_n\}$  bezeichnet.

– Dabei ergibt sich die dritte Gleichheit aus der Definitionsgleichung (36) der Palmschen Markenverteilung und aus Formel (39) in Theorem 5.9 für den unabhängig markierten Fall.

– Die letzten beiden Gleichheiten ergeben sich aus der Definitionsgleichung (4.18) der reduzierten Palmschen Verteilung  $P^1$  bzw. aus der Definitionsgleichung (4.104) des zweiten reduzierten Momentenmaßes  $K : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$  von  $\{S_n\}$ .  $\square$

## Beachte

- Ähnlich zum unmarkierten Fall, der in Abschnitt 4.3.4 diskutiert worden ist, kann man beispielsweise den folgenden Schätzer  $\widehat{K_{ij}(r)}$  für  $K_{ij}(r)$  betrachten.

- Für beliebige  $r > 0$  und  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ , so dass  $\nu_d(W \cap (W + x)) > 0$  für jedes  $x \in B(o, r)$ , sei

$$\lambda_i \lambda_j \widehat{K_{ij}}(r) = \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{\mathbb{1}_{(0, r)}(|S_{n_2} - S_{n_1}|) \mathbb{1}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2}) \mathbb{1}_{\{i\} \times \{j\}}(L_{n_1}, L_{n_2})}{\nu_d(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))}, \quad (54)$$

wobei man auf ähnliche Weise wie im Beweis von Theorem 4.18 zeigen kann, dass  $\lambda_i \lambda_j \widehat{K_{ij}}(r)$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\lambda_i \lambda_j K_{ij}(r)$  ist.

- Dies führt dann für beliebige  $i, j \in \mathbb{L}$  zu dem Schätzer

$$\widehat{K_{ij}}(r) = \frac{\lambda_i \lambda_j \widehat{K_{ij}}(r)}{\widehat{\lambda}_i \widehat{\lambda}_j} \quad (55)$$

für  $K_{ij}(r)$ , wobei

$$\widehat{\lambda}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{W \times \{i\}}(S_n, L_n)}{\nu_d(W)} \quad \forall i \in \mathbb{L}.$$

- Wenn  $\{(S_n, L_n)\}$  ergodisch ist, dann ergibt sich ähnlich wie in Abschnitt 4.3.4, dass  $\widehat{K_{ij}}(r)$  ein (stark) konsistenter Schätzer für  $K_{ij}(r)$  ist.
- Aus (54) und (55) ergibt sich, dass  $\widehat{K_{ij}}(r) = \widehat{K_{ji}}(r)$  für beliebige  $i, j \in \mathbb{L}$  und  $r > 0$ . Für das markierte Punktmuster in Abbildung 23 mit  $\mathbb{L} = \{o, +\}$  gilt insbesondere

$$\widehat{K_{o,+}}(r) = \widehat{K_{+,o}}(r) > 0 \quad \text{und} \quad \widehat{K_{o,o}}(r) > 0, \quad \text{jedoch} \quad \widehat{K_{+,+}}(r) = 0.$$

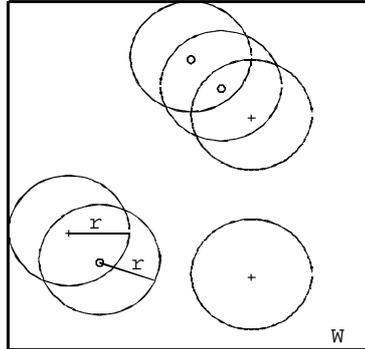


Abbildung 23: Markiertes Punktmuster und seine  $r$ -Umgebungen

Wir betrachten nun den Fall, dass das zweite faktorielle Momentenmaß  $\alpha_2^{ij}$  in (46) absolutstetig bezüglich des  $2d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes ist, d.h.,  $\alpha_2^{ij}$  hat eine Dichte  $\rho_2^{ij} : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow [0, \infty)$ , so dass

$$\alpha_2^{ij}(B_1 \times B_2) = \int_{B_1} \int_{B_2} \rho_2^{ij}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (56)$$

Die in (56) gegebene Funktion  $\rho_2^{ij}$  wird die *Produktdichte* zweiter Ordnung von  $\{(S_n, L_n)\}$  bezüglich des Markenpaares  $(i, j)$  genannt.

**Beachte**

- Weil wir voraussetzen, dass der markierte Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  stationär und isotrop ist, hängt die Produktdichte  $\rho_2^{ij}(x_1, x_2)$  nur von  $|x_2 - x_1|$  ab, d.h., es gilt

$$\rho_2^{ij}(x_1, x_2) = \rho_2^{ij}(r), \quad \text{wobei } r = |x_2 - x_1|. \quad (57)$$

- Darüber hinaus betrachten wir die *Paarkorrelationsfunktion*  $g^{ij} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , wobei

$$g^{ij}(r) = \frac{\rho_2^{ij}(r)}{\lambda_i \lambda_j} \quad \forall r \geq 0. \quad (58)$$

- Wenn  $\{(S_n, L_n)\}$  unabhängig markiert ist, dann ergibt sich aus den Theoremen 5.12 und 5.13, dass

$$g^{ij}(r) = g(r) \quad \forall i, j \in \mathbb{L}, r \geq 0, \quad (59)$$

wobei  $g(r)$  die Paarkorrelationsfunktion des (unmarkierten) Punktprozesses  $\{S_n\}$  ist.

- Ein Schätzer  $\widehat{\rho_2^{ij}(r)}$  für die Produktdichte  $\rho^{ij}(r)$  ist beispielsweise durch den folgenden Ansatz gegeben:

$$\widehat{\rho_2^{ij}(r)} = \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{k(|S_{n_2} - S_{n_1}| - r) \mathbb{1}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2}) \mathbb{1}_{\{i\} \times \{j\}}(L_{n_1}, L_{n_2})}{d \kappa_d r^{d-1} \nu_d(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))}, \quad (60)$$

wobei  $k : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  eine Kernfunktion ist.

- Ähnlich wie in (55) führt dies zu einem Schätzer für die Paarkorrelationsfunktion  $g^{ij}(r)$ :

$$\widehat{g^{ij}(r)} = \frac{\widehat{\rho_2^{ij}(r)}}{\widehat{\lambda_i} \widehat{\lambda_j}} \quad \forall r > 0. \quad (61)$$

**5.3.3 Diversitätsindizes**

In diesem Abschnitt diskutieren wir den Begriff der Diversität von markierten Punktprozessen und meinen damit eine Kenngröße, die den Grad der Unterschiedlichkeit der Marken beschreibt.

- Dabei nehmen wir so wie in Abschnitt 5.3.2 an, dass  $\{(S_n, L_n)\}$  ein stationärer und isotroper markierter Punktprozess ist und dass der Markenraum  $\mathbb{L}$  von  $\{(S_n, L_n)\}$  eine nichtleere *endliche* Menge ist, wobei  $\mathcal{L}$  die Potenzmenge von  $\mathbb{L}$  bezeichnet. Die Marke  $L_n$  von  $S_n$  interpretieren wir als den *Typ* des Punktes  $S_n$ .
- Außerdem bezeichnen wir die Intensität  $\lambda_{\{i\}}$  der Punkte vom Typ  $i \in \mathbb{L}$  wiederum kurz mit  $\lambda_i$ , wobei wir annehmen, dass  $\lambda_i > 0$  für jedes  $i \in \mathbb{L}$ .

**Definition**

- Der *Diversitätsindex*  $\Delta$  von  $\{(S_n, L_n)\}$  ist gegeben durch

$$\Delta = 1 - \sum_{i \in \mathbb{L}} \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}, \quad \text{wobei } \lambda = \sum_{i \in \mathbb{L}} \lambda_i. \quad (62)$$

- Eine (abstandsabhängige) Verallgemeinerung der in (62) eingeführten (globalen) Kenngröße  $\Delta$  von  $\{(S_n, L_n)\}$  ist der *Diversitätsindex*  $\Delta_K : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  bezüglich der Rippleyschen K-Funktion, der gegeben ist durch

$$\Delta_K(r) = \begin{cases} 1 - \sum_{i \in \mathbb{L}} \frac{\lambda_i^2 K_{ii}(r)}{\lambda^2 K(r)}, & \text{falls } K(r) > 0, \\ 0, & \text{falls } K(r) = 0, \end{cases} \quad (63)$$

wobei  $K_{ii}(r)$  die in (49) eingeführte (bedingte) K-Funktion ist und  $K(r)$  die K-Funktion des (unmarkierten) Punktprozesses  $\{S_n\}$  bezeichnet.

- Auf ähnliche Weise ist der *Diversitätsindex*  $\Delta_g : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  bezüglich der Paarkorrelationsfunktion definiert, der gegeben ist durch

$$\Delta_g(r) = \begin{cases} 1 - \sum_{i \in \mathbb{L}} \frac{\lambda_i^2 g^{ii}(r)}{\lambda^2 g(r)}, & \text{falls } g(r) > 0, \\ 0, & \text{falls } g(r) = 0, \end{cases} \quad (64)$$

wobei  $g^{ii}(r)$  die in (58) eingeführte (bedingte) Paarkorrelationsfunktion ist und  $g(r)$  die Paarkorrelationsfunktion des (unmarkierten) Punktprozesses  $\{S_n\}$  bezeichnet.

Wir betrachten nun den Fall, dass  $\{(S_n, L_n)\}$  unabhängig markiert ist. Dabei zeigen wir, dass dann die in (62) – (64) eingeführten Diversitätsindizes  $\Delta$ ,  $\Delta_K(r)$  und  $\Delta_g(r)$  übereinstimmen, und leiten eine probabilistische Interpretation von  $\Delta$  her.

### Theorem 5.14

- *Der stationäre und isotrope markierte Punktprozess  $\{(S_n, L_n)\}$  sei unabhängig markiert. Dann gilt*

$$\Delta_K(r) = \Delta \quad \forall r > 0 \text{ mit } K(r) > 0 \quad (65)$$

und

$$\Delta_g(r) = \Delta \quad \forall r > 0 \text{ mit } g(r) > 0. \quad (66)$$

- *Außerdem gilt dann für  $\alpha_2^{\mathbb{L}, \mathbb{L}}$ -fast jeden Vektor  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2d}$*

$$\Delta = \sum_{i, j \in \mathbb{L}}^{\neq} P_{x_1, x_2}(\{i\} \times \{j\}), \quad (67)$$

wobei  $P_{x_1, x_2} : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  die in (40) eingeführte Palm'sche Zwei-Punkt-Markenverteilung von  $\{(S_n, L_n)\}$  bezüglich des Punktepaars  $(x_1, x_2)$  bezeichnet.

### Beweis

- Mit Hilfe von (52) und (59) ergeben sich die Formeln (65) und (66) unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (62) – (64).
- Außerdem ergibt sich aus den Theoremen 5.9 und 5.10, dass

$$\begin{aligned} \sum_{i, j \in \mathbb{L}}^{\neq} P_{x_1, x_2}(\{i\} \times \{j\}) &\stackrel{\text{Theorem 5.10}}{=} \sum_{i, j \in \mathbb{L}}^{\neq} P(L_1 = i) P(L_1 = j) \\ &= 1 - \sum_{i \in \mathbb{L}} (P(L_1 = i))^2 \\ &\stackrel{\text{Theorem 5.9}}{=} 1 - \sum_{i \in \mathbb{L}} (P_{o, \mathbb{L}}(\{i\}))^2 \\ &\stackrel{(36)}{=} 1 - \sum_{i \in \mathbb{L}} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)^2, \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Definitionsgleichung (36) der Palmischen Markenverteilung  $P_{o,\mathbb{L}} : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$  ergibt.  $\square$

**Beachte** Wegen (67) können wir den Diversitätsindex  $\Delta$  im unabhängig markierten Fall als Wahrscheinlichkeit dafür interpretieren, dass zwei willkürlich ausgewählte Punkte von  $\{S_n\}$  voneinander verschiedene Marken besitzen.

## 5.4 Eigenschaften von Palmischen Verteilungen bei allgemeinem Markenraum

Wir betrachten nun zwei weitere Beispiele, die deutlich machen, wie das Campbellsche Theorem (vgl. Theorem 5.5 bzw. Korollar 5.1) für stationäre markierte Punktprozesse bei der Herleitung von Eigenschaften für deren Palmische Verteilungen  $P_N^C$  angewendet werden kann.

- Dabei lassen wir zu, dass der Markenraum  $\mathbb{L}$  ein beliebiger messbarer Raum ist, wobei  $\mathcal{L}$  eine beliebige  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\mathbb{L}$  ist.
- Außerdem nehmen wir an, dass

$$P(N_{\mathbb{R}^d \times C} = 0) = 0 \quad (68)$$

für jedes  $C \in \mathcal{L}$  mit  $\lambda_C > 0$ , wobei  $N_{\mathbb{R}^d \times C} = \#\{n : S_n \in \mathbb{R}^d, L_n \in C\}$  die Gesamtanzahl der Punkte des stationären markierten Punktprozesses  $\{(S_n, L_n)\}$  mit einer Marke aus  $C \in \mathcal{L}$  bezeichnet.

### 5.4.1 Umkehrformel; Mittelwertformel für Voronoi-Mosaik

Mit Hilfe von Korollar 5.1 leiten wir zunächst eine so genannte *Umkehrformel* für die Palmische Verteilung  $P_N^C$  von  $\{(S_n, L_n)\}$  her, in der die (unbedingte) Verteilung  $P_N$  von  $\{(S_n, L_n)\}$  durch die Palmische Verteilung  $P_N^C$  ausgedrückt wird. Dies bedeutet insbesondere, dass zwischen den Verteilungen  $P_N$  und  $P_N^C$  ein eindeutiger Zusammenhang besteht.

#### Theorem 5.15

- Sei  $\{(S_n, L_n)\}$  ein stationärer markierter Punktprozess, und sei  $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, \infty)$  eine nichtnegative messbare Funktion, so dass für jedes  $C \in \mathcal{L}$

$$\sum_{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(\{x\} \times C) > 0} \varphi(\{x\} \times C) h(x, \varphi) = 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{N}_{\mathbb{L}} \text{ mit } \varphi(\mathbb{R}^d \times C) > 0. \quad (69)$$

- Dann gilt für jedes  $C \in \mathcal{L}$  mit  $\lambda_C > 0$

$$P_N(A) = \lambda_C \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_{-x}\varphi) h(x, \mathbf{T}_{-x}\varphi) dx P_N^C(d\varphi) \quad \forall A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}. \quad (70)$$

#### Beweis

- Die Funktion  $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, \infty)$  sei gegeben durch

$$g(x, \varphi) = \mathbb{1}_A(\varphi) h(x, \varphi),$$

wobei  $A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}$  und die Funktion  $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, \infty)$  der Bedingung (69) genügt.

- Wegen (68) ergibt sich dann mit Hilfe von Korollar 5.1, dass

$$\begin{aligned}
P_N(A) &= \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \mathbb{1}_A(\varphi) P_N(d\varphi) \\
&\stackrel{(68),(69)}{=} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \mathbb{1}_A(\varphi) \sum_{x \in \mathbb{R}^d: \varphi(\{x\} \times C) > 0} \varphi(\{x\} \times C) h(x, \varphi) P_N(d\varphi) \\
&= \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \varphi) \varphi(dx \times C) P_N(d\varphi) \\
&\stackrel{\text{Korollar 5.1}}{=} \lambda_C \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} g(x, \mathbf{T}_{-x}\varphi) P_N^C(d\varphi) dx = \lambda_C \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \mathbf{T}_{-x}\varphi) dx P_N^C(d\varphi) \\
&= \lambda_C \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_{-x}\varphi) h(x, \mathbf{T}_{-x}\varphi) dx P_N^C(d\varphi). \quad \square
\end{aligned}$$

### Beachte

- Durch die Wahl spezieller Funktionen  $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, \infty)$ , die der Bedingung (69) genügen, kann die Umkehrformel (70) präzisiert werden.
- Sei  $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, \infty)$  beispielsweise gegeben durch

$$h(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi(\{y \in \mathbb{R}^d : |y| = |x|\} \times C)}, & \text{falls } |x| = \inf\{r > 0 : \varphi(B(o, r) \times C) > 0\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Dann nimmt (70) die folgende Gestalt an: Für jedes  $C \in \mathcal{L}$  mit  $\lambda_C > 0$  gilt

$$P_N(A) = \lambda_C \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\{y \in \mathbb{R}^d: \varphi((B(y, |y|) \setminus \{o\}) \times C) = 0\}} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_{-x}\varphi) dx P_N^C(d\varphi) \quad \forall A \in \mathcal{N}_{\mathbb{L}}, \quad (71)$$

wobei sich die innere Integration auf der rechten Seite von (71) über die „Voronoi-Zelle“ derjenigen  $y \in \mathbb{R}^d$  erstreckt, für die der Nullpunkt das nächstgelegene Atom von  $\varphi$  mit einer Marke aus  $C$  ist.

### Beispiel

Aus (71) ergibt sich sofort die folgende *Mittelwertformel für Voronoi-Mosaik*e, die durch stationäre Punktprozesse generiert werden, vgl auch Abschnitt 4.1.4.

- Die Marken  $L_n$  des stationären markierten Punktprozesses  $\{(S_n, L_n)\}$  seien die Voronoi-Zellen, die durch die Punkte  $S_n$  des (unmarkierten) Punktprozesses gebildet werden.
  - Es gelte also  $L_n = \Xi_n$  für jedes  $n \geq 1$ , wobei

$$\Xi_n = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - S_n| \leq |x - S_m| \forall m \neq n\}.$$

- D.h.,  $\Xi_n$  ist die (zufällige) Menge derjenigen  $x \in \mathbb{R}^d$ , deren Abstand von  $S_n$  nicht größer ist als die Abstände zwischen  $x$  und allen anderen Punkten  $S_m$ ,  $m \neq n$  des Punktprozesses.
- Der Markenraum  $\mathbb{L}$  ist dabei die Familie aller abgeschlossenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ , und  $\mathcal{L}$  ist eine geeignet gewählte  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\mathbb{L}$ , vgl. Abschnitt 6.2.
- Für  $A = \mathbb{N}_{\mathbb{L}}$  ergibt sich dann aus (71), dass

$$\lambda^{-1} = \int_{\mathbb{L}} \nu_d(C) P_o(dC), \quad (72)$$

wobei  $\lambda$  die Intensität von  $\{S_n\}$  ist und  $P_o$  die (unbedingte) Palmische Markenverteilung von  $\{(S_n, L_n)\}$  bezeichnet, die in (36) eingeführt worden ist.

- Der Erwartungswert  $\int_{\mathbb{L}} \nu_d(C) P_o(dC)$  des Volumens der typischen Voronoi-Zelle von  $\{(S_n, L_n)\}$  ist also umgekehrt proportional zur Intensität  $\lambda$  des Punktprozesses  $\{S_n\}$ .

### 5.4.2 Austausch-Formel von Neveu

In diesem Abschnitt zeigen wir mit Hilfe von Theorem 5.5, dass die Symmetrieeigenschaft  $K_{ij}(r) = K_{ji}(r)$  der bedingten K-Funktionen von stationären und isotropen markierten Punktprozessen, die in Theorem 5.13 hergeleitet worden ist, als ein Spezialfall eines wesentlich allgemeineren Zusammenhanges zwischen den Palmschen Verteilungen  $P_N^C$  von stationären markierten Punktprozessen aufgefasst werden kann.

Dabei betrachten wir gleichzeitig zwei verschiedene Teilmengen  $C_1, C_2 \in \mathcal{L}$  des Markenraumes  $\mathbb{L}$  mit  $\lambda_{C_1}, \lambda_{C_2} > 0$  bzw. die zugehörigen Palmschen Verteilungen  $P_N^{C_1}$  und  $P_N^{C_2}$ . Das folgende Resultat, das die Verteilungen  $P_N^{C_1}$  und  $P_N^{C_2}$  miteinander verknüpft, wird in der Literatur die *Austausch-Formel von Neveu* genannt.

**Theorem 5.16** *Für beliebige  $C_1, C_2 \in \mathcal{L}$  mit  $\lambda_{C_1}, \lambda_{C_2} > 0$  und für jede messbare Funktion  $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}_{\mathbb{L}} \rightarrow [0, \infty)$  gilt*

$$\lambda_{C_1} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \mathbf{T}_x \varphi) \varphi(dx \times C_2) P_N^{C_1}(d\varphi) = \lambda_{C_2} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(-x, \varphi) \varphi(dx \times C_1) P_N^{C_2}(d\varphi). \quad (73)$$

**Beweis**

- Um die Formel (21) in Theorem 5.5 anwenden zu können, betrachten wir eine (beliebige) beschränkte Borel-Menge  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  mit  $\nu_d(B) = 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda_{C_1} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \mathbf{T}_x \varphi) \varphi(dx \times C_2) P_N^{C_1}(d\varphi) \\ &= \lambda_{C_1} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \mathbf{T}_x \varphi) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x+y) dy \varphi(dx \times C_2) P_N^{C_1}(d\varphi) \\ &= \lambda_{C_1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \mathbf{T}_x \varphi) \mathbb{1}_B(x+y) \varphi(dx \times C_2) P_N^{C_1}(d\varphi) dy \\ &= \lambda_{C_1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} f(y, \varphi) P_N^{C_1}(d\varphi) dy, \end{aligned}$$

wobei

$$f(y, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \mathbf{T}_x \varphi) \mathbb{1}_B(x+y) \varphi(dx \times C_2). \quad (74)$$

- Hieraus ergibt sich nun mit Hilfe von Formel (21) in Theorem 5.5, dass

$$\begin{aligned} & \lambda_{C_1} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \mathbf{T}_x \varphi) \varphi(dx \times C_2) P_N^{C_1}(d\varphi) = \lambda_{C_1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} f(y, \varphi) P_N^{C_1}(d\varphi) dy \\ & \stackrel{(21)}{=} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y, \mathbf{T}_y \varphi) \varphi(dy \times C_1) P_N(d\varphi) \\ & \stackrel{(74)}{=} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \mathbf{T}_{x+y} \varphi) \mathbb{1}_B(x+y) (\mathbf{T}_y \varphi)(dx \times C_2) \varphi(dy \times C_1) P_N(d\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y, \mathbf{T}_x \varphi) \mathbb{1}_B(x) \varphi(dx \times C_2) \varphi(dy \times C_1) P_N(d\varphi), \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit durch die Substitution  $x \mapsto x - y$  der Integrationsvariablen  $x$  des inneren Integrals ergibt.

- Wenn in dem letzten Ausdruck die Integrationsreihenfolge der beiden inneren Integrale vertauscht wird, dann ergibt sich somit, dass

$$\begin{aligned} & \lambda_{C_1} \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \mathbf{T}_x \varphi) \varphi(dx \times C_2) P_N^{C_1}(d\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{N}_{\mathbb{L}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y, \mathbf{T}_x \varphi) \mathbb{1}_B(x) \varphi(dy \times C_1) \right) \varphi(dx \times C_2) P_N(d\varphi). \end{aligned}$$

- Durch die Substitution  $y \mapsto y+x$  der Integrationsvariablen  $y$  im inneren Integral des letzten Ausdruckes ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} & \lambda_{C_1} \int_{\mathbb{N}_L} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \mathbf{T}_x \varphi) \varphi(dx \times C_2) P_N^{C_1}(d\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{N}_L} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} g(-y, \mathbf{T}_x \varphi) \mathbb{1}_B(x) (\mathbf{T}_x \varphi)(dy \times C_1) \right) \varphi(dx \times C_2) P_N(d\varphi). \end{aligned}$$

- Insgesamt ergibt sich also durch die erneute Anwendung von Formel (21) in Theorem 5.5, dass

$$\begin{aligned} & \lambda_{C_1} \int_{\mathbb{N}_L} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \mathbf{T}_x \varphi) \varphi(dx \times C_2) P_N^{C_1}(d\varphi) \\ & \stackrel{(21)}{=} \lambda_{C_2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}_L} \left( \int_{\mathbb{R}^d} g(-y, \varphi) \mathbb{1}_B(x) \varphi(dy \times C_1) \right) P_N^{C_2}(d\varphi) dx \\ &= \lambda_{C_2} \int_{\mathbb{N}_L} \int_{\mathbb{R}^d} g(-y, \varphi) \varphi(dy \times C_1) P_N^{C_2}(d\varphi). \quad \square \end{aligned}$$

### Beachte

- Unmittelbar aus (73) ergibt sich die folgende (duale) Austauschformel:

$$\lambda_{C_1} \int_{\mathbb{N}_L} \int_{\mathbb{R}^d} f(-x, \mathbf{T}_x \varphi) \varphi(dx \times C_2) P_N^{C_1}(d\varphi) = \lambda_{C_2} \int_{\mathbb{N}_L} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \varphi) \varphi(dx \times C_1) P_N^{C_2}(d\varphi) \quad (75)$$

für beliebige  $C_1, C_2 \in \mathcal{L}$  mit  $\lambda_{C_1}, \lambda_{C_2} > 0$  und für jede messbare Funktion  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}_L \rightarrow [0, \infty)$ , wenn in (73) die Funktion  $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}_L \rightarrow [0, \infty)$  mit  $g(x, \varphi) = f(-x, \varphi)$  betrachtet wird.

- Wenn der Markenraum  $L$  eine endliche Menge ist, dann ergibt sich aus (73) die Symmetrieeigenschaft  $K_{ij}(r) = K_{ji}(r)$  der bedingten K-Funktionen, die in Theorem 5.13 hergeleitet worden ist.
  - Hierfür genügt es,  $C_1 = \{i\}$  und  $C_2 = \{j\}$  für  $i, j \in L$  zu setzen und für  $r > 0$  die Funktion  $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}_L \rightarrow [0, \infty)$  mit  $g(x, \varphi) = \mathbb{1}_{B(o,r)}(x)$  zu betrachten.
  - Dann ergibt sich aus der Definitionsgleichung (49) der bedingten K-Funktion  $K_{ij}(r)$  und aus der Austauschformel (73), dass

$$\begin{aligned} \lambda_i \lambda_j K_{ij}(r) & \stackrel{(49)}{=} \lambda_i \int_{\mathbb{N}_L} \int_{\mathbb{R}^d} g(x, \mathbf{T}_x \varphi) \varphi(dx \times \{j\}) P_N^{\{i\}}(d\varphi) \\ & \stackrel{(73)}{=} \lambda_j \int_{\mathbb{N}_L} \int_{\mathbb{R}^d} g(-x, \varphi) \varphi(dx \times \{i\}) P_N^{\{j\}}(d\varphi) \\ & \stackrel{(49)}{=} \lambda_i \lambda_j K_{ji}(r) \end{aligned}$$

und dass somit

$$K_{ij}(r) = K_{ji}(r) \quad \forall r > 0.$$

## 6 Keim-Korn-Modelle

In diesem Kapitel betrachten wir so genannte *Keim-Korn-Prozesse*, die als stationäre markierte Punktprozesse  $\{(S_n, L_n)\}$  im  $d$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$  aufgefasst werden können, wobei der Markenraum  $\mathbb{L}$  die Familie aller kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  ist.

- So wie bisher ist also  $\{S_n\}$  eine Folge von Zufallsvektoren mit Werten in  $\mathbb{R}^d$ , die als (zufällig positionierte) *Keime* interpretiert werden.
- Die Marken  $L_n : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$  nehmen ihre Werte in der Familie  $\mathcal{C}$  aller kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  an. Sie werden als *Körner* interpretiert, die mit den „Keimen“  $S_n$  assoziiert sind.
  - Dabei wird oft angenommen, dass die Menge  $L_n(\omega)$  für jedes  $\omega \in \Omega$  „zentriert“ ist, d.h., der Schwerpunkt oder ein anderer eindeutig bestimmter (Bezugs-) Punkt von  $L_n(\omega)$  liegt im Nullpunkt.
  - Ein einfaches Beispiel hierfür ist gegeben, wenn  $L_n$  eine Kugel mit Mittelpunkt im Nullpunkt und mit zufälligem Radius  $R_n : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  ist, d.h.,  $L_n = B(o, R_n)$ .
- Aus dem Keim-Korn-Prozess  $\{(S_n, L_n)\}$  geht dann das so genannte *Keim-Korn-Modell*

$$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (L_n + S_n) \quad (1)$$

hervor (vgl. Abbildung 24), das bei der statistischen Analyse von Binärbildern verwendet wird. Dabei bezeichnet  $L_n + S_n = \{x + S_n : x \in L_n\}$  das um den Vektor  $S_n$  verschobene Korn  $L_n$ .

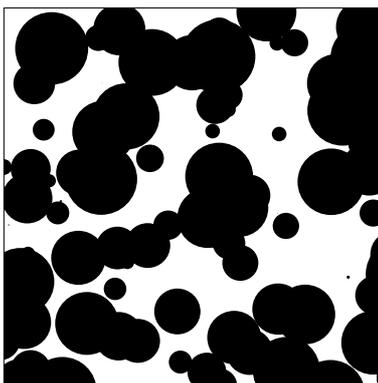


Abbildung 24: Realisierung eines Keim-Korn-Modells mit kreisförmigen Körnern

### Beachte

- In Abschnitt 6.1.3 zeigen wir, dass der (Marken-) Raum  $\mathcal{C}$  aller kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  ein metrischer Raum ist, wobei die Hausdorff-Metrik in  $\mathcal{C}$  betrachtet wird.
- Dabei wird  $\mathcal{C}$  mit einer geeignet gewählten  $\sigma$ -Algebra versehen, so dass die Abbildungen  $L_n : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$  als (messbare) Zufallsvariablen mit Werten in  $\mathcal{C}$  aufgefasst werden können.
- Dies führt zum Begriff der zufälligen Menge, den wir in Abschnitt 6.2 diskutieren.
- Außerdem benötigen wir zusätzliche Modellannahmen, damit auch die in (1) betrachtete Abbildung  $\omega \mapsto \Xi(\omega)$ , wobei

$$\Xi(\omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (L_n(\omega) + S_n(\omega)),$$

als (messbare) Zufallsvariable mit Werten in der Familie  $\mathcal{F}$  aller abgeschlossenen, jedoch im allgemeinen *nicht* kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  aufgefasst werden kann, vgl. Abschnitt 6.5.

## 6.1 Mengensysteme des $\mathbb{R}^d$ und ihre topologischen Eigenschaften

Bevor wir zur Definition der zufälligen (abgeschlossenen) Menge kommen, erinnern wir an einige elementare Familien von Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  und ihre topologischen Eigenschaften, die im weiteren Verlauf dieses Kapitel von Nutzen sein werden.

### 6.1.1 Offene und abgeschlossene Mengen; Kompaktheit und Konvexität

- Zur Erinnerung: Der euklidische Raum  $\mathbb{R}^d$  ist ein metrischer Raum, dessen Metrik  $\rho : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  gegeben ist durch

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2} \quad \forall x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d. \quad (2)$$

- Mit Hilfe der in (2) definierten (euklidischen) Metrik  $\rho : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  kann man die Familien der offenen Mengen bzw. der abgeschlossenen Mengen in  $\mathbb{R}^d$  einführen.

- Man sagt, dass  $B \subset \mathbb{R}^d$  eine *offene Menge* in  $\mathbb{R}^d$  ist, wenn es für jedes  $x \in B$  eine Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $y \in B$  für jedes  $y \in \mathbb{R}^d$  mit  $\rho(x, y) \leq \varepsilon$ , d.h., wenn

$$B = \bigcup_{\varepsilon > 0} \{x \in \mathbb{R}^d : B(x, \varepsilon) \subset B\}. \quad (3)$$

- Die Menge  $B \subset \mathbb{R}^d$  heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement  $B^c = \mathbb{R}^d \setminus B$  von  $B$  eine offene Menge ist. Mit  $\mathcal{E}$  bzw.  $\mathcal{F}$  bezeichnen wir die Familien aller offenen bzw. aller abgeschlossenen Mengen in  $\mathbb{R}^d$ .
- Beachte: Man kann sich leicht überlegen, dass die Menge  $B \subset \mathbb{R}^d$  genau dann abgeschlossen ist, wenn

$$B = \bigcap_{\varepsilon > 0} (B \oplus B(o, \varepsilon)), \quad (4)$$

wobei  $A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$  die Minkowski-Summe der Mengen  $A, B \subset \mathbb{R}^d$  bezeichnet.

- Darüber hinaus betrachten wir die Familien der beschränkten, kompakten bzw. konvexen Mengen in  $\mathbb{R}^d$ .
  - Die Menge  $B \subset \mathbb{R}^d$  heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl  $r > 0$  gibt, so dass  $\rho(o, x) \leq r$  für jedes  $x \in B$ , d.h., wenn  $B \subset B(o, r)$  für ein  $r > 0$ .
  - Man sagt, dass  $B \subset \mathbb{R}^d$  eine *kompakte Menge* ist, wenn  $B$  abgeschlossen und beschränkt ist. Mit  $\mathcal{C}$  bezeichnen wir die Familie aller kompakten Mengen in  $\mathbb{R}^d$ .
  - Die Menge  $B \subset \mathbb{R}^d$  heißt *konvex*, wenn  $cx + (1 - c)y \in B$  für beliebige  $x, y \in B$  und für jedes  $c \in [0, 1]$ .
- Man sagt, dass die Menge  $B \subset \mathbb{R}^d$  ein *konvexer Körper* ist, wenn  $B$  kompakt und konvex ist. Mit  $\mathcal{K}$  bezeichnen wir die Familie aller konvexen Körper in  $\mathbb{R}^d$ .

- Die Familie aller endlichen Vereinigungen von konvexen Körpern in  $\mathbb{R}^d$  wird *Konvexring* genannt und im folgenden mit  $\mathcal{R}$  bezeichnet.
- Unter dem *erweiterten Konvexring* in  $\mathbb{R}^d$  versteht man die Mengenfamilie

$$\mathcal{S} = \{B \in \mathcal{F} : B \cap C \in \mathcal{R} \text{ für jedes } C \in \mathcal{K}\}. \quad (5)$$

**Beachte** Sei  $B \subset \mathbb{R}^d$  eine beliebige Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ .

- Dann wird der Ausdruck auf der rechten Seite von (3) das *Innere* der Menge  $B$  genannt und mit  $\text{int } B$  bezeichnet, d.h.  $\text{int } B = \bigcup_{\varepsilon > 0} \{x \in \mathbb{R}^d : B(x, \varepsilon) \subset B\}$ .
- Der Ausdruck auf der rechten Seite von (4) wird die *Abschließung* der Menge  $B$  genannt und mit  $\text{cl } B$  bezeichnet, d.h.  $\text{cl } B = \bigcap_{\varepsilon > 0} (B \oplus B(o, \varepsilon))$ . Dabei heißt  $\partial B = \text{cl } B \cap \text{cl } B^c$  der *Rand* von  $B$ .
- Außerdem wird mit  $\text{conv } B$  die *konvexe Hülle* der Menge  $B$  bezeichnet, wobei

$$\text{conv } B = \{cx + (1 - c)y : x, y \in B, c \in [0, 1]\}. \quad (6)$$

### 6.1.2 Schnitt- $\sigma$ -Algebra; Fell-Topologie

Wir führen nun die sogenannte *Schnitt- $\sigma$ -Algebra*  $\sigma_{\mathcal{F}}$  von Teilmengen der Familie  $\mathcal{F}$  aller abgeschlossenen Mengen in  $\mathbb{R}^d$  ein, die wir bei der Definition der zufälligen (abgeschlossenen) Menge in Abschnitt 6.2 benötigen.

Dabei geben wir zunächst vier verschiedene (äquivalente) Darstellungsmöglichkeiten dieser  $\sigma$ -Algebra an und zeigen dann in den Abschnitten 6.1.3 bzw. 6.1.5, dass die Mengensysteme  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{S}$  in  $\sigma_{\mathcal{F}}$  enthalten sind.

**Definition** Sei  $\sigma_{\mathcal{F}}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\mathcal{F}$ , so dass

$$\{B \in \mathcal{F} : B \cap C \neq \emptyset\} \in \sigma_{\mathcal{F}} \quad \forall C \in \mathcal{C}. \quad (7)$$

**Lemma 6.1** Die in (7) definierte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma_{\mathcal{F}}$  wird auch durch die Mengensysteme  $\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\}$  bzw.  $\{\mathcal{F}_E : E \in \mathcal{E}\}$  bzw.  $\{\mathcal{F}^E : E \in \mathcal{E}\}$  erzeugt, d.h., es gilt

$$\sigma_{\mathcal{F}} = \sigma(\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\}) = \sigma(\{\mathcal{F}_E : E \in \mathcal{E}\}) = \sigma(\{\mathcal{F}^E : E \in \mathcal{E}\}), \quad (8)$$

wobei  $\mathcal{F}^A = \{B \in \mathcal{F} : B \cap A = \emptyset\}$  und  $\mathcal{F}_A = \{B \in \mathcal{F} : B \cap A \neq \emptyset\}$ .

**Beweis**

- Aus

$$\{B \in \mathcal{F} : B \cap A = \emptyset\} = \mathcal{F} \setminus \{B \in \mathcal{F} : B \cap A \neq \emptyset\}$$

bzw.

$$\{B \in \mathcal{F} : B \cap A \neq \emptyset\} = \mathcal{F} \setminus \{B \in \mathcal{F} : B \cap A = \emptyset\}$$

ergibt sich, dass

$$\sigma_{\mathcal{F}} = \sigma(\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\}) \quad \text{bzw.} \quad \sigma(\{\mathcal{F}_E : E \in \mathcal{E}\}) = \sigma(\{\mathcal{F}^E : E \in \mathcal{E}\}).$$

- Man kann sich leicht überlegen, dass es für jede offene Menge  $E \in \mathcal{E}$  eine Folge kompakter Mengen  $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}$  mit  $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = E$  gibt und dass dann

$$\mathcal{F}_E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_{C_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathcal{F}^{C_i})^c. \quad (9)$$

- Außerdem ergibt sich aus (4), dass es für jede kompakte Menge  $C \in \mathcal{C}$  eine Folge offener Mengen  $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}$  mit  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$  und  $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = C$  gibt und dass dann

$$\mathcal{F}^C = (\mathcal{F}_C)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathcal{F}_{E_i})^c. \quad (10)$$

- Aus (9) und (10) ergibt sich, dass  $\sigma(\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\}) = \sigma(\{\mathcal{F}_E : E \in \mathcal{E}\})$ . □

**Beachte**

- Die Familie  $\mathcal{F}$  aller abgeschlossenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  kann als topologischer Raum aufgefasst werden.
  - Dabei wird eine beliebige Menge  $A$  ein *topologischer Raum* genannt, wenn eine Familie  $\mathcal{G} \subset 2^A$  von Teilmengen von  $A$  (die so genannte *Topologie der offenen Mengen* in  $A$ ) gegeben ist, für die  $\emptyset, A \in \mathcal{G}$  gilt und die abgeschlossen bezüglich beliebiger Vereinigungen und endlicher Durchschnitte ist, d.h.,

$$\bigcup_{G \in \mathcal{G}'} G \in \mathcal{G} \quad \text{für jedes } \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$$

und

$$G_1 \cap \dots \cap G_k \in \mathcal{G} \quad \text{für beliebige } G_1, \dots, G_k \in \mathcal{G} \text{ und für jedes } k \geq 2.$$

- Eine Familie  $\mathcal{G}' \subset 2^A$  von Teilmengen von  $A$  heißt *Basis*, wenn es für jedes  $x \in A$  eine Menge  $B \in \mathcal{G}'$  gibt, so dass  $x \in B$ , und wenn es für beliebige  $B_1, B_2 \in \mathcal{G}'$  und  $x \in B_1 \cap B_2$  eine Menge  $B_3 \in \mathcal{G}'$  gibt, so dass  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .
- Eine Familie  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$  von Teilmengen von  $A$  wird *Basis der Topologie  $\mathcal{G}$*  genannt, wenn  $\mathcal{G}'$  eine Basis ist und wenn sich jede Menge  $G \in \mathcal{G}$  als Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{G}'$  darstellen lässt.
- Seien  $A_1, A_2$  zwei topologische Räume mit den Topologien  $\mathcal{G}_1$  bzw.  $\mathcal{G}_2$ . Dann ist  $A_1 \times A_2$  ebenfalls ein topologischer Raum, wobei die Topologie in  $A_1 \times A_2$  durch die Basis  $\{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{G}_1, B_2 \in \mathcal{G}_2\}$  induziert wird.
- Die kleinste  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{G})$  von Teilmengen von  $A$ , zu der sämtliche (offenen) Mengen der Topologie  $\mathcal{G}$  gehören, wird die von  $\mathcal{G}$  erzeugte *Borel- $\sigma$ -Algebra* in  $A$  genannt und mit  $\mathcal{B}(A)$  bezeichnet, d.h.,  $\mathcal{B}(A) = \sigma(\mathcal{G})$ .
  - Die Komplemente der Mengen aus  $\mathcal{G}$  bilden die Familie der *abgeschlossenen Mengen* in  $A$ .
- Für  $\mathcal{F}$  betrachten wir nun die so genannte *Fell-Topologie  $\mathcal{G}$* , wobei die Familie  $\mathcal{G} \subset 2^{\mathcal{F}}$  von Teilmengen von  $\mathcal{F}$  durch das Mengensystem  $\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\} \cup \{\mathcal{F}_E : E \in \mathcal{E}\}$  erzeugt wird.
  - D.h.,  $\mathcal{G}$  ist die kleinste Familie von Teilmengen von  $\mathcal{F}$ , die die Mengen  $\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\} \cup \{\mathcal{F}_E : E \in \mathcal{E}\}$  enthält und die abgeschlossen bezüglich beliebiger Vereinigungen und endlicher Durchschnitte ist.
  - Dann kann man sich leicht überlegen, dass das System

$$\mathcal{G}' = \{\mathcal{F}_{E_1, \dots, E_k}^C : C \in \mathcal{C}, E_1, \dots, E_k \in \mathcal{E}, k \geq 0\} \quad (11)$$

mit

$$\mathcal{F}_{E_1, \dots, E_k}^C = \begin{cases} \mathcal{F}^C \cap \mathcal{F}_{E_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{E_k}, & \text{wenn } k \geq 1, \\ \mathcal{F}^C, & \text{wenn } k = 0, \end{cases}$$

eine Basis von  $\mathcal{G}$  ist, denn es gilt

$$\mathcal{F}_{E_1, \dots, E_k}^C \cap \mathcal{F}_{E'_1, \dots, E'_m}^{C'} = \mathcal{F}_{E_1, \dots, E_k, E'_1, \dots, E'_m}^{C \cup C'}.$$

**Lemma 6.2** *Es gibt eine abzählbare Basis  $\mathcal{G}'' \subset \mathcal{G}$ , die die Fell-Topologie  $\mathcal{G} \subset 2^{\mathcal{F}}$  erzeugt.*

**Beweis**

- Sei  $\mathcal{D}$  das (abzählbare) System aller offenen Kugeln in  $\mathbb{R}^d$  mit rationalen Radien und Mittelpunkten mit rationalen Koordinaten, und sei  $\mathcal{G}'' \subset 2^{\mathcal{F}}$  das folgende (abzählbare) System von Teilmengen von  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{G}'' = \left\{ \mathcal{F}_{B_1, \dots, B_k}^{\text{cl } B'_1 \cup \dots \cup \text{cl } B'_m} : B_1, \dots, B_k, B'_1, \dots, B'_m \in \mathcal{D}, k \geq 0, m \geq 1 \right\}. \quad (12)$$

- Es genügt zu zeigen, dass sich jede Menge der in (11) betrachteten Basis  $\mathcal{G}'$  als Vereinigung von Mengen der abzählbaren Mengenfamilie  $\mathcal{G}''$  in (12) darstellen lässt.
- Sei  $\mathcal{F}_{E_1, \dots, E_k}^C \in \mathcal{G}'$  und  $B \in \mathcal{F}_{E_1, \dots, E_k}^C$ . Dann genügt es zeigen, dass es ein  $\mathcal{F}_{B_1, \dots, B_k}^{\text{cl } B'_1 \cup \dots \cup \text{cl } B'_m} \in \mathcal{G}''$  gibt, so dass

$$B \in \mathcal{F}_{B_1, \dots, B_k}^{\text{cl } B'_1 \cup \dots \cup \text{cl } B'_m} \subset \mathcal{F}_{E_1, \dots, E_k}^C. \quad (13)$$

- Wir zeigen die Gültigkeit von (13) zuerst für den Fall  $k = 0$ .
  - Weil  $B \in \mathcal{F}_{E_1, \dots, E_k}^C$  und  $C \in \mathcal{C}$  abgeschlossene Mengen sind mit  $B \cap C = \emptyset$ , gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B \cap (C \oplus B(o, \varepsilon)) = \emptyset$ .
  - Hieraus und aus der Beschränktheit der Menge  $C \in \mathcal{C}$  folgt, dass es (endlich viele) offene Kugeln  $B'_1, \dots, B'_m \in \mathcal{D}$  gibt, so dass

$$C \subset \text{cl } B'_1 \cup \dots \cup \text{cl } B'_m \quad \text{und} \quad B \cap \text{cl } B'_i = \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

– Dies bedeutet, dass

$$B \in \mathcal{F}^{\text{cl } B'_1 \cup \dots \cup \text{cl } B'_m} \subset \mathcal{F}^{\mathcal{C}}. \quad (14)$$

– Damit ist (13) für  $k = 0$  bewiesen.

• Sei nun  $k \geq 1$ .

– Dann gibt es für jedes  $i = 1, \dots, k$  ein  $x_i \in B \cap E_i$  und ein  $B_i \in \mathcal{D}$ , so dass  $x_i \in B_i \subset E_i$ .

– Hieraus und aus (14) ergibt sich, dass

$$B \in \mathcal{F}^{\text{cl } B'_1 \cup \dots \cup \text{cl } B'_m} \subset \mathcal{F}^{\mathcal{C}}_{E_1, \dots, E_k}.$$

• Damit ist (13) vollständig bewiesen, d.h., die in (12) eingeführte abzählbare Mengenfamilie  $\mathcal{G}''$  ist eine Basis der Fell–Topologie  $\mathcal{G} \subset 2^{\mathcal{F}}$ .  $\square$

Aus Lemma 6.1 und aus dem Beweis von Lemma 6.2 ergibt sich, dass die in (7) definierte Schnitt– $\sigma$ –Algebra  $\sigma_{\mathcal{F}}$  mit der Borel– $\sigma$ –Algebra der Fell–Topologie übereinstimmt.

**Theorem 6.1** Sei  $\mathcal{G} \subset 2^{\mathcal{F}}$  die Fell–Topologie in  $\mathcal{F}$ . Dann gilt  $\sigma_{\mathcal{F}} = \sigma(\mathcal{G})$ .

**Beweis**

- Aus der Definition der Fell–Topologie  $\mathcal{G}$  durch das Erzeugersystem  $\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\} \cup \{\mathcal{F}_E : E \in \mathcal{E}\}$  ergibt sich mit Hilfe von Lemma 6.1, dass  $\sigma_{\mathcal{F}} \subset \sigma(\mathcal{G})$ .
- Umgekehrt ergibt sich aus Lemma 6.1 und aus der Darstellungsformel (12) der abzählbaren Basis  $\mathcal{G}'' \subset \mathcal{G}$  von  $\mathcal{G}$ , dass  $\mathcal{G}'' \subset \sigma_{\mathcal{F}}$  und somit

$$\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}'') \subset \sigma_{\mathcal{F}}. \quad \square$$

### 6.1.3 Hausdorff–Metrik der kompakten Mengen

Sei  $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$  die Familie der nichtleeren kompakten Teilmengen in  $\mathbb{R}^d$ . Die *Hausdorff–Metrik*  $\rho : \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' \rightarrow [0, \infty)$  ist dann definiert durch

$$\rho(C, C') = \max \left\{ \max_{x \in C} \min_{y \in C'} \rho(x, y), \max_{x \in C'} \min_{y \in C} \rho(x, y) \right\} \quad \forall C, C' \in \mathcal{C}', \quad (15)$$

wobei  $\rho(x, y)$  den in (2) gegebenen euklidischen Abstand von  $x$  und  $y$  bezeichnet.

**Beachte**

- Man kann sich leicht überlegen, dass die in (15) gegebene Abbildung  $\rho : \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' \rightarrow [0, \infty)$  die Eigenschaften einer Metrik in  $\mathcal{C}'$  hat.
- Außerdem ist es nicht schwierig zu zeigen, dass der in (15) betrachtete Hausdorff–Abstand  $\rho(C, C')$  der Mengen  $C, C' \in \mathcal{C}'$  auch in der folgenden (äquivalenten) Form dargestellt werden kann: Und zwar gilt

$$\rho(C, C') = \min \{ \varepsilon \geq 0 : C \subset C' \oplus B(o, \varepsilon), C' \subset C \oplus B(o, \varepsilon) \} \quad \forall C, C' \in \mathcal{C}'. \quad (16)$$

- Die in (15) bzw. (16) gegebene Hausdorff–Metrik  $\rho : \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' \rightarrow [0, \infty)$  in  $\mathcal{C}'$  kann zu einer Metrik  $\rho : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty)$  in der Familie  $\mathcal{C}$  aller kompakten Mengen fortgesetzt werden, wobei

$$\rho(C, C') = \begin{cases} \infty, & \text{falls } C = \emptyset, C' \neq \emptyset \text{ oder } C = \emptyset, C' = \emptyset, \\ 0, & \text{falls } C = C' = \emptyset. \end{cases} \quad (17)$$

- Ähnlich wie im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$  (vgl. Abschnitt 6.1.1) lässt sich auch in dem metrischen Raum  $(\mathcal{C}, \rho)$  der Begriff der offenen Menge einführen.
  - Man sagt, dass  $C_0 \subset \mathcal{C}$  eine *offene Menge* in  $\mathcal{C}$  ist, wenn es für jedes  $C \in C_0$  eine Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $D \in C_0$  für jedes  $D \in \mathcal{C}$  mit  $\rho(C, D) \leq \varepsilon$ .
  - Die Menge  $C_0 \subset \mathcal{C}$  heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement  $C_0^c = \mathcal{C} \setminus C_0$  von  $C_0$  eine offene Menge in  $\mathcal{C}$  ist.
- Die Topologie, die durch die offenen Mengen in  $(\mathcal{C}, \rho)$  gegeben ist, wird *Hausdorff-Topologie* genannt. Die zugehörige Borel- $\sigma$ -Algebra wird mit  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$  bezeichnet.

**Lemma 6.3** Sei  $\sigma_{\mathcal{F}}$  die in (7) definierte  $\sigma$ -Algebra. Dann gilt  $\mathcal{C} \in \sigma_{\mathcal{F}}$  und die Spur- $\sigma$ -Algebra  $\sigma_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C}$  stimmt mit der Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$  überein, die durch die Hausdorff-Metrik in  $\mathcal{C}$  induziert wird.

### Beweis

- Wir zeigen zunächst die Gültigkeit von  $\mathcal{C} \in \sigma_{\mathcal{F}}$ .
  - Sei  $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}$  eine monotone Folge kompakter Mengen, so dass  $C_1 \subset C_2 \subset \dots$  und

$$C_i \subset \text{int } C_{i+1} \quad \forall i \geq 1 \quad \text{bzw.} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \mathbb{R}^d.$$

- Dann kann man sich leicht überlegen, dass

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}^{C_i^c}. \quad (18)$$

- Weil  $C_i^c$  für jedes  $i \geq 1$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^d$  ist, ergibt sich aus Lemma 6.1, dass  $\mathcal{F}^{C_i^c} \in \sigma_{\mathcal{F}}$  und somit auch  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}^{C_i^c} \in \sigma_{\mathcal{F}}$ .
- Hieraus und aus (18) ergibt sich, dass  $\mathcal{C} \in \sigma_{\mathcal{F}}$ .
- Um die zweite Teilaussage zu beweisen, zeigen wir zunächst, dass die  $r$ -Umgebung

$$\mathcal{U}_r(C) = \{C' \in \mathcal{C} : \rho(C, C') \leq r\} \quad (19)$$

für beliebige  $r \geq 0$  und  $C \in \mathcal{C}$  zu  $\sigma_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C}$  gehört.

- Sei zunächst  $C \in \mathcal{C}'$ . Dann ergibt sich aus (16), dass

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_r(C) &= \{C' \in \mathcal{C} : \rho(C, C') \leq r\} \\ &\stackrel{(16)}{=} \{C' \in \mathcal{C} : C' \subset C \oplus B(o, r)\} \cap \{C' \in \mathcal{C} : C \subset C' \oplus B(o, r)\} \\ &= \{C' \in \mathcal{C} : C' \cap (C \oplus B(o, r))^c = \emptyset\} \cap \{C' \in \mathcal{C} : C^c \cap (C' \oplus B(o, r)) = \emptyset\} \\ &= \{C' \in \mathcal{C} : C' \cap (C \oplus B(o, r))^c = \emptyset\} \cap \{C' \in \mathcal{C} : C' \cap (C^c \oplus B(o, r)) = \emptyset\}. \end{aligned}$$

- Weil  $(C \oplus B(o, r))^c$  und  $C^c \oplus B(o, r)$  offene Mengen sind, ergibt sich hieraus und aus Lemma 6.1, dass  $\mathcal{U}_r(C) \in \sigma_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C}$ .
- Für  $C = \emptyset$  ergibt sich aus (17), dass  $\mathcal{U}_r(C) \stackrel{(17)}{=} \{\emptyset\} = \mathcal{F}^{\mathbb{R}^d} \in \sigma_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C}$ .
- Außerdem lässt sich jede offene Menge in dem metrischen Raum  $(\mathcal{C}, \rho)$  als abzählbare Vereinigung von  $r$ -Umgebungen der Form (19) darstellen.
  - Dabei genügt es, nur rationale Zahlen  $r \geq 0$  bzw. endliche Mengen  $C \in \mathcal{C}$  von Punkten mit rationalen Koordinaten zu betrachten.

– Insgesamt ergibt sich dann, dass jede offene Menge in  $(\mathcal{C}, \rho)$  zu  $\sigma_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C}$  gehört bzw. dass

$$\mathcal{B}(\mathcal{C}) \subset \sigma_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C}.$$

- Umgekehrt kann man sich leicht überlegen, dass  $\mathcal{F}^E \cap \mathcal{C}$  für jedes  $E \in \mathcal{E}$  eine abgeschlossene Menge in  $(\mathcal{C}, \rho)$  ist.
  - Denn für jede Folge  $C, C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}$ , so dass  $C_i \cap E = \emptyset$  für jedes  $i \geq 1$  und  $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(C_i, C) = 0$ , gilt  $C \cap E = \emptyset$ .
  - Dies bedeutet insbesondere, dass  $\mathcal{F}^E \cap \mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ .
  - Hieraus ergibt sich mit Hilfe von Lemma 6.1, dass  $\sigma_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathcal{C})$ . □

Wir zeigen nun, dass die Mengensysteme  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{R}$  zur Schnitt- $\sigma$ -Algebra  $\sigma_{\mathcal{F}}$  gehören. Den Nachweis, dass auch der erweiterte Konvexring  $\mathcal{S}$  zu  $\sigma_{\mathcal{F}}$  gehört, führen wir später in Abschnitt 6.1.5.

**Lemma 6.4** *Sei  $\sigma_{\mathcal{F}}$  die in (7) definierte Schnitt- $\sigma$ -Algebra. Dann gilt  $\mathcal{K} \in \sigma_{\mathcal{F}}$  und  $\mathcal{R} \in \sigma_{\mathcal{F}}$ .*

**Beweis**

- Man kann sich leicht überlegen,
  - dass die Abbildung  $C \mapsto \text{conv } C$  stetig in  $(\mathcal{C}, \rho)$  ist
  - und dass somit die Mengenfamilie  $\mathcal{K} = \{C \in \mathcal{C} : C = \text{conv } C\}$  abgeschlossen in  $(\mathcal{C}, \rho)$ , also eine (Borel-) Menge aus  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$  ist.
  - Hieraus und aus Lemma 6.3 ergibt sich, dass  $\mathcal{K} \in \sigma_{\mathcal{F}}$ .
- Um die Gültigkeit von  $\mathcal{R} \in \sigma_{\mathcal{F}}$  zu zeigen, genügt es, sich zu überlegen, dass sich der Konvexring  $\mathcal{R}$  in der Form

$$\mathcal{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_k^m \tag{20}$$

darstellen lässt, wobei  $\mathcal{R}_k^m = \{K_1 \cup \dots \cup K_m : K_i \in \mathcal{K}, K_i \subset B(o, k) \text{ für jedes } i = 1, \dots, m\}$ .

- Denn für  $m = 1$  wurde bereits oben gezeigt, dass die Mengenfamilie  $\mathcal{R}_k^m$  für beliebige  $k \geq 1$  abgeschlossen in  $(\mathcal{C}, \rho)$  ist, und für  $m \geq 2$  kann man dies wie folgt zeigen.
  - Seien  $C \in \mathcal{C}$  und  $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{R}_k^m$  kompakte Mengen mit

$$C_i = K_{1i} \cup \dots \cup K_{mi}, \quad K_{1i}, \dots, K_{mi} \in \mathcal{K} \quad \text{und} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(C_i, C) = 0.$$

- Für  $m = 2$  seien für jedes  $i \geq 1$  die Konvexitätskomponenten  $K_{1i}, K_{2i}$  von  $C_i$  so numeriert, dass die Grenzwerte

$$K_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{conv}(\text{cl } \partial(K_{1i} \setminus K_{2i}) \cap \partial K_{1i})$$

bzw.

$$K_2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{conv}(\text{cl } \partial(K_{2i} \setminus K_{1i}) \cap \partial K_{2i})$$

in  $(\mathcal{C}, \rho)$  existieren. Dann gilt  $C = K_1 \cup K_2 \in \mathcal{R}_k^2$ .

- Auf ähnliche Weise ergibt sich für beliebiges  $m \geq 2$ , dass  $C \in \mathcal{R}_k^m$ .

- Insgesamt ergibt sich also mit Hilfe von Lemma 6.3, dass

$$\mathcal{R}_k^m \in \mathcal{B}(\mathcal{C}) = \sigma_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C} \quad \forall k, m \geq 1.$$

- Hieraus und aus (20) ergibt sich, dass  $\mathcal{R} \in \sigma_{\mathcal{F}}$ . □

### 6.1.4 Messbarkeit und Halbstetigkeit von Abbildungen in allgemeinen topologischen Räumen

- Bei der Untersuchung von zufälligen Mengen in Abschnitt 6.2 werden wir Abbildungen der Form  $\mathbf{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  bzw.  $\mathbf{T} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  betrachten.
- Dabei benötigen wir die Messbarkeit dieser Abbildungen bezüglich der in (7) definierten Schnitt- $\sigma$ -Algebra  $\sigma_{\mathcal{F}}$ , d.h., für jedes  $\mathcal{D} \in \sigma_{\mathcal{F}}$  soll  $\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{D}) \in \sigma_{\mathcal{F}}$  bzw.  $\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{D}) \in \sigma_{\mathcal{F}} \otimes \sigma_{\mathcal{F}}$  gelten, wobei

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{D}) = \{B \in \mathcal{F} : \mathbf{T}(B) \in \mathcal{D}\} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{D}) = \{(B_1, B_2) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : \mathbf{T}(B_1, B_2) \in \mathcal{D}\}$$

das *Urbild* von  $\mathcal{D}$  bezüglich  $\mathbf{T}$  bezeichnet.

- Hierfür führen wir für Abbildungen der Form  $\mathbf{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  bzw.  $\mathbf{T} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  zunächst die Begriffe der Halbstetigkeit von oben bzw. von unten ein.

**Definition** Sei  $(A, \mathcal{G})$  ein beliebiger topologischer Raum, wobei  $\mathcal{G}$  die Topologie der offenen Teilmengen von  $A$  bezeichnet.

- Die Abbildung  $\mathbf{T} : A \rightarrow \mathcal{F}$  heißt *nach oben halbstetig*, wenn

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{F}^C) \in \mathcal{G} \quad \forall C \in \mathcal{C}. \quad (21)$$

- Die Abbildung  $\mathbf{T} : A \rightarrow \mathcal{F}$  heißt *nach unten halbstetig*, wenn

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{F}_E) \in \mathcal{G} \quad \forall E \in \mathcal{E}. \quad (22)$$

Das folgende Resultat zeigt die Nützlichkeit dieser beiden Stetigkeitsbegriffe hinsichtlich der oben erwähnten Messbarkeitseigenschaften.

**Lemma 6.5** Wenn die Abbildung  $\mathbf{T} : A \rightarrow \mathcal{F}$  nach oben oder nach unten halbstetig ist, dann gilt

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{D}) \in \mathcal{B}(A) \quad \forall \mathcal{D} \in \sigma_{\mathcal{F}}. \quad (23)$$

**Beweis**

- Für beliebige  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots \in \sigma_{\mathcal{F}}$  gilt offenbar

$$\mathbf{T}^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{D}_i) \quad \text{und} \quad \mathbf{T}^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{D}_i).$$

- Deshalb implizieren die Bedingungen (21) bzw. (22) die Gültigkeit von

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{D}) \in \mathcal{B}(A) \quad \forall \mathcal{D} \in \sigma(\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{D}) \in \mathcal{B}(A) \quad \forall \mathcal{D} \in \sigma(\{\mathcal{F}_E : E \in \mathcal{E}\}).$$

- Hieraus ergibt sich die Behauptung, denn in Lemma 6.1 hatten wir gezeigt, dass

$$\sigma_{\mathcal{F}} = \sigma(\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\}) = \sigma(\{\mathcal{F}_E : E \in \mathcal{E}\}). \quad \square$$

Um Kriterien für die Halbstetigkeit der Abbildung  $\mathbf{T} : A \rightarrow \mathcal{F}$  herleiten zu können, benötigen wir die Begriffe der *Konvergenz*, des *Häufungspunktes* bzw. der *Kompaktheit* in topologischen Räumen.

**Definition** Sei  $(A, \mathcal{G})$  ein beliebiger topologischer Raum,  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$  eine beliebige Basis von  $\mathcal{G}$ , und  $a, a_1, a_2, \dots$  beliebige Elemente aus  $A$ .

- Man sagt, dass die Folge  $a_1, a_2, \dots \in A$  gegen  $a \in A$  konvergiert, wenn es für jedes  $\mathcal{U} \in \mathcal{G}'$  mit  $a \in \mathcal{U}$  eine natürliche Zahl  $n_{\mathcal{U}} \geq 1$  gibt, so dass  $a_n \in \mathcal{U}$  für jedes  $n \geq n_{\mathcal{U}}$ .
- Außerdem sagt man, dass  $a \in A$  ein Häufungspunkt der Folge  $a_1, a_2, \dots \in A$  ist, wenn es eine Teilfolge  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$  von  $a_1, a_2, \dots$  gibt, so dass  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$  gegen  $a$  konvergiert.
- Wenn der topologische Raum  $(A, \mathcal{G})$  eine abzählbare Basis hat, dann nennt man eine abgeschlossene Teilmenge  $B \subset A$  *kompakt*, wenn jede Folge  $a_1, a_2, \dots \in B$  eine konvergente Teilfolge besitzt (deren Grenzwert dann in  $B$  liegt).

### Beachte

- Im folgenden werden wir die Kurzschreibweise  $a_n \rightarrow a$  verwenden, um auszudrücken, dass die Folge  $a_1, a_2, \dots$  gegen  $a$  konvergiert.
- Mit  $\limsup a_n$  bezeichnen wir die Vereinigung aller Häufungspunkte von  $a_1, a_2, \dots$  und mit  $\liminf a_n$  den Durchschnitt aller dieser Häufungspunkte.
- Man kann sich leicht überlegen, dass die Menge  $B \subset A$  genau dann abgeschlossen in  $A$  ist, wenn für beliebige  $a, a_1, a_2, \dots \in A$  mit  $a_n \in B$  für jedes  $n \geq 1$  und  $a_n \rightarrow a$  folgt, dass  $a \in B$ , d.h., die Grenzwerte beliebiger konvergenter Folgen aus  $B$  gehören zu  $B$ .

**Lemma 6.6** Sei  $(A, \mathcal{G})$  ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ , und sei  $\mathbf{T} : A \rightarrow \mathcal{F}$  eine beliebige Abbildung von  $A$  in die Familie  $\mathcal{F}$  der abgeschlossenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ .

- Die Abbildung  $\mathbf{T} : A \rightarrow \mathcal{F}$  ist genau dann nach oben halbstetig, wenn

$$\limsup \mathbf{T}(a_n) \subset \mathbf{T}(a) \quad \forall a, a_1, a_2, \dots \in A \text{ mit } a_n \rightarrow a. \quad (24)$$

- Die Abbildung  $\mathbf{T} : A \rightarrow \mathcal{F}$  ist genau dann nach unten halbstetig, wenn

$$\liminf \mathbf{T}(a_n) \supset \mathbf{T}(a) \quad \forall a, a_1, a_2, \dots \in A \text{ mit } a_n \rightarrow a. \quad (25)$$

### Beweis

- Gemäß Definition (21) ist  $\mathbf{T} : A \rightarrow \mathcal{F}$  genau dann nach oben halbstetig, wenn  $\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{F}^C) \subset A$  offen in  $A$  ist für jedes  $C \in \mathcal{C}$ .

– Dabei ist die Menge  $\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{F}^C) \subset A$  genau dann offen in  $A$  für jedes  $C \in \mathcal{C}$ , wenn für jedes  $C \in \mathcal{C}$

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathcal{F}_C) = \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^C) = A \setminus \mathbf{T}^{-1}(\mathcal{F}^C)$$

abgeschlossen in  $A$  ist.

– Letzteres gilt genau dann, wenn für jedes  $C \in \mathcal{C}$  und für beliebige  $a, a_1, a_2, \dots \in A$  mit  $a_n \rightarrow a$  die folgende Implikation gilt:

$$\text{Aus } \mathbf{T}(a_n) \cap C \neq \emptyset \text{ für jedes } n \geq 1 \text{ folgt, dass } \mathbf{T}(a) \cap C \neq \emptyset. \quad (26)$$

- Um die erste Teilaussage des Lemmas zu beweisen, genügt es nun zu zeigen, dass (26) äquivalent ist mit (24).
- Dabei zeigen wir zuerst, dass (26)  $\Rightarrow$  (24).
  - Für  $a_n \rightarrow a$  und  $x \in \limsup \mathbf{T}(a_n)$  und für jede kompakte Umgebung  $C \in \mathcal{C}$  von  $x$  gilt  $\mathbf{T}(a_n) \cap C \neq \emptyset$  für unendlich viele  $n \geq 1$ .
  - Wegen (26) ergibt sich hieraus, dass  $\mathbf{T}(a) \cap C \neq \emptyset$  und somit  $x \in \mathbf{T}(a)$ , weil die Menge  $\mathbf{T}(a) \subset \mathbb{R}^d$  abgeschlossen ist.
- Wir zeigen nun umgekehrt, dass (24)  $\Rightarrow$  (26).
  - Sei  $C \in \mathcal{C}$  und sei  $a, a_1, a_2, \dots \in A$  eine Folge mit  $a_n \rightarrow a$  und  $\mathbf{T}(a_n) \cap C \neq \emptyset$  für jedes  $n \geq 1$ .

- Dann gibt es eine Folge  $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^d$ , so dass  $x_n \in \mathbf{T}(a_n) \cap C$  für jedes  $n \geq 1$ .
- Weil  $C$  kompakt ist, gibt es eine Teilfolge  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$  von  $x_1, x_2, \dots$ , so dass  $x_{n_k} \rightarrow x \in C$ .
- Wegen (24) gilt dann, dass  $x \in \limsup \mathbf{T}(a_n) \subset \mathbf{T}(a)$  und somit  $\mathbf{T}(a) \cap C \neq \emptyset$ .
- Der Beweis der zweiten Teilaussage verläuft analog und wird deshalb weggelassen. □

Mit Hilfe von Lemma 6.6 können wir die Stetigkeit der Abbildung  $\mathbf{T} : A \rightarrow \mathcal{F}$  charakterisieren, wenn  $(A, \mathcal{G})$  ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis ist. Dabei sagt man, dass  $\mathbf{T} : A \rightarrow \mathcal{F}$  stetig ist, wenn  $\mathbf{T}(a_n) \rightarrow \mathbf{T}(a)$  für beliebige  $a, a_1, a_2, \dots \in A$  mit  $a_n \rightarrow a$  gilt. Aus Lemma 6.6 ergibt sich dann sofort das folgende Resultat.

**Korollar 6.1** Sei  $(A, \mathcal{G})$  ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ . Die Abbildung  $\mathbf{T} : A \rightarrow \mathcal{F}$  ist genau dann stetig, wenn  $\mathbf{T} : A \rightarrow \mathcal{F}$  nach oben und nach unten halbstetig ist.

### 6.1.5 Konvergenzkriterien; Stetigkeitseigenschaften von Abbildungen in $\mathcal{F}$

Für den topologischen Raum  $\mathcal{F}$  der abgeschlossenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  (mit der Fell–Topologie  $\mathcal{G}$  bzw. mit der in (11) gegebenen Basis  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ ) liefert das folgende Resultat zwei weitere (äquivalente) Definitionsmöglichkeiten des Konvergenzbegriffes, der in Abschnitt 6.1.4 eingeführt worden ist.

Dabei sagen wir kurz „für fast jedes  $n \geq 1$ “ und meinen damit: für jedes  $n \geq 1$  bis auf endlich viele natürliche Zahlen.

**Lemma 6.7** Sei  $B, B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$  eine beliebige Folge von abgeschlossenen Mengen in  $\mathbb{R}^d$ . Dann sind die folgenden Aussagen (a), (b) und (c) äquivalent:

- (a) Es gilt  $B_n \rightarrow B$ .
- (b) Es gelten die beiden folgenden Aussagen (b<sub>1</sub>) und (b<sub>2</sub>):
  - (b<sub>1</sub>) Für jedes  $E \in \mathcal{E}$  folgt aus  $E \cap B \neq \emptyset$ , dass  $E \cap B_n \neq \emptyset$  für fast jedes  $n \geq 1$ .
  - (b<sub>2</sub>) Für jedes  $C \in \mathcal{C}$  folgt aus  $C \cap B = \emptyset$ , dass  $C \cap B_n = \emptyset$  für fast jedes  $n \geq 1$ .
- (c) Es gelten die beiden folgenden Aussagen (c<sub>1</sub>) und (c<sub>2</sub>):
  - (c<sub>1</sub>) Für jedes  $x \in B$  gibt es eine Folge  $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^d$ , so dass  $x_n \rightarrow x$  und  $x_n \in B_n$  für fast jedes  $n \geq 1$ .
  - (c<sub>2</sub>) Für jede Teilfolge  $B_{n_1}, B_{n_2}, \dots$  von  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$  und für jede konvergente Folge  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots \in \mathbb{R}^d$ , so dass  $x_{n_k} \in B_{n_k}$  für jedes  $k \geq 1$ , gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in B$ .

#### Beweis

- Die Äquivalenz von (a) und (b) ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Basis  $\mathcal{G}'$  in (11).
  - Wegen (11) ist  $B_n \rightarrow B$  äquivalent damit, dass  $B \in \mathcal{F}_{E_1, \dots, E_k}^C$  die Gültigkeit von  $B_n \in \mathcal{F}_{E_1, \dots, E_k}^C$  für fast jedes  $n \geq 1$  impliziert.
  - Dies wiederum ist äquivalent mit den beiden Aussagen (b<sub>1</sub>) und (b<sub>2</sub>).
- Es ist noch zu zeigen, dass auch die Aussagen (b) und (c) äquivalent sind.
- Dabei zeigen wir zuerst, dass (b<sub>1</sub>)  $\Rightarrow$  (c<sub>1</sub>).
  - Sei  $x \in B$  und  $E_n = \text{int } B(x, 1/n)$  die offene Kugel mit Mittelpunkt  $x \in \mathbb{R}^d$  und Radius  $1/n$ .
  - Offenbar gilt  $E_n \cap B \neq \emptyset$  für jedes  $n \geq 1$ .
  - Mit Hilfe von (b<sub>1</sub>) ergibt sich dann, dass auch  $E_n \cap B_k \neq \emptyset$  für beliebige  $n \geq 1$  und  $k \geq n$ .

- Dabei ist  $k_1, k_2, \dots$  eine Folge natürlicher Zahlen, für die wir (o.B.d.A.) annehmen, dass  $k_1 < k_2 < \dots$
- Es gibt also eine Folge  $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^d$ , so dass

$$\begin{aligned} x_i \in E_1 \cap B_i & \quad \text{für } i = k_1, \dots, k_2 - 1, \\ x_i \in E_2 \cap B_i & \quad \text{für } i = k_2, \dots, k_3 - 1, \\ & \quad \vdots \\ x_i \in E_j \cap B_i & \quad \text{für } i = k_j, \dots, k_{j+1} - 1, \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

- Somit gilt  $x_i \rightarrow x$ , wobei  $x_i \in B_i$  für fast jedes  $i \geq 1$ .

- Die umgekehrte Implikation  $(c_1) \Rightarrow (b_1)$  ergibt sich aus den folgenden Überlegungen.
  - Sei  $E \in \mathcal{E}$ , so dass  $E \cap B \neq \emptyset$ , d.h., es gilt  $x \in E \cap B$  für ein  $x \in \mathbb{R}^d$ .
  - Wegen  $(c_1)$  gibt es eine Folge  $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^d$ , so dass  $x_n \rightarrow x$  und  $x_n \in B_n$  für fast jedes  $n \geq 1$ .
  - Außerdem ergibt sich aus  $x \in E$  und  $x_n \rightarrow x$ , dass  $x_n \in E$  für fast jedes  $n \geq 1$ .
  - Damit gilt auch  $E \cap B_n \neq \emptyset$  für fast jedes  $n \geq 1$ .
- Wir zeigen nun, dass  $(b_2) \Rightarrow (c_2)$ .
  - Sei  $B_{n_1}, B_{n_2}, \dots$  eine Teilfolge von  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$  und  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots \in \mathbb{R}^d$  eine konvergente Folge, so dass  $x_{n_k} \in B_{n_k}$  für jedes  $k \geq 1$  und  $x_{n_k} \rightarrow x$ .
  - Falls  $x \notin B$ , dann gibt es ein  $C \in \mathcal{C}$  mit  $x \in \text{int } C$  und  $C \cap B = \emptyset$ .
  - Wegen  $(b_2)$  müsste dann auch  $C \cap B_n = \emptyset$  für fast jedes  $n \geq 1$  gelten.
  - Dies steht jedoch im Widerspruch zu  $x_{n_k} \rightarrow x$ , und somit gilt  $x \in B$ .
- Die umgekehrte Implikation  $(c_2) \Rightarrow (b_2)$  ergibt sich aus den folgenden Überlegungen.
  - Wenn die Aussage  $(b_2)$  nicht gilt, dann gibt es ein  $C \in \mathcal{C}$  mit

$$C \cap B = \emptyset \quad \text{und} \quad C \cap B_n \neq \emptyset \quad \text{für unendlich viele } n \geq 1. \quad (27)$$

- Somit gibt es eine Teilfolge  $B_{n_1}, B_{n_2}, \dots$  von  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$  und eine Folge  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots \in \mathbb{R}^d$ , so dass  $x_{n_k} \in C \cap B_{n_k}$  für jedes  $k \geq 1$ .
- Weil die Folge  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots \in C$  beschränkt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $x_{n_{i_1}}, x_{n_{i_2}}, \dots$  mit  $x_{n_{i_j}} \rightarrow x \in C$ .
- Wegen (27) bedeutet dies insbesondere, dass  $x \notin B$ , was im Widerspruch zu  $(c_2)$  steht.  $\square$

### Korollar 6.2

- Die Abbildungen  $\mathbf{T}_\cup : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  und  $\mathbf{T}_\oplus : \mathcal{F} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}$  mit

$$\mathbf{T}_\cup(B_1, B_2) = B_1 \cup B_2 \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{F} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T}_\oplus(B_1, B_2) = B_1 \oplus B_2 \quad \forall B_1 \in \mathcal{F}, B_2 \in \mathcal{C}$$

sind stetig.

- Für beliebige  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $c \geq 0$  sind die folgenden Abbildungen  $\mathbf{T}_- : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{T}_x : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{T}_c : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  bzw.  $\mathbf{T}_\delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  stetig, wobei
  - $\mathbf{T}_-(B) = \{-y : y \in B\}$  die Spiegelung der Menge  $B \in \mathcal{F}$  am Nullpunkt,
  - $\mathbf{T}_x(B) = \{y + x : y \in B\}$  die Verschiebung von  $B$  um den Vektor  $x \in \mathbb{R}^d$ ,
  - $\mathbf{T}_c(B) = \{cy : y \in B\}$  die Skalierung von  $B$  um den Faktor  $c \geq 0$ ,
  - $\mathbf{T}_\delta(B) = \{\delta(y) : y \in B\}$  und  $\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine beliebige Drehung um den Nullpunkt bezeichnet.

**Beweis**

- Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung  $\mathbf{T}_\cup : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  stetig ist.
- Weil als Basis in dem (topologischen) Produktraum  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  die Familie aller kartesischen Produkte  $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$  von offenen Teilmengen  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{F}$  betrachtet wird, ist die Konvergenz

$$(B_{1n}, B_{2n}) \rightarrow (B_1, B_2)$$

in  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  gleichbedeutend damit, dass  $B_{1n} \rightarrow B_1$  und  $B_{2n} \rightarrow B_2$  in  $\mathcal{F}$  gilt.

- Um die Stetigkeit der Vereinigungsbildung  $\mathbf{T}_\cup(B_1, B_2) = B_1 \cup B_2$  zu beweisen, ist also zu zeigen, dass

$$B_{1n} \cup B_{2n} \rightarrow B_1 \cup B_2 \quad (28)$$

für beliebige  $B_1, B_2, B_{11}, B_{21}, B_{12}, B_{22}, \dots \in \mathcal{F}$  mit  $B_{1n} \rightarrow B_1$  und  $B_{2n} \rightarrow B_2$ .

- Sei  $x \in B_1 \cup B_2$ , wobei wir (o.B.d.A.) annehmen, dass  $x \in B_1$ .
  - Aus  $B_{1n} \rightarrow B_1$  ergibt sich mit Hilfe von Lemma 6.7, dass es eine Folge  $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^d$  gibt, so dass  $x_n \rightarrow x$  und  $x_n \in B_{1n} \subset B_{1n} \cup B_{2n}$  für fast jedes  $n \geq 1$ .
  - D.h., die Bedingung (c<sub>1</sub>) in Lemma 6.7 ist für die Konvergenz (28) erfüllt.
- Außerdem gibt es für jede Teilfolge  $B_{1,n_1} \cup B_{2,n_1}, B_{1,n_2} \cup B_{2,n_2}, \dots$  von  $\{B_{1,n} \cup B_{2,n}\}$  und für jede konvergente Folge  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots \in \mathbb{R}^d$ , so dass  $x_{n_k} \in B_{1,n_k} \cup B_{2,n_k}$  für jedes  $k \geq 1$ , eine Teilfolge  $\{x_{n_{i_k}}\}$ , so dass  $x_{n_{i_k}} \in B_{1,n_{i_k}}$  oder  $x_{n_{i_k}} \in B_{2,n_{i_k}}$  für unendlich viele  $k$ .
  - Wegen  $B_{1n} \rightarrow B_1$  und  $B_{2n} \rightarrow B_2$  ergibt sich hieraus mit Hilfe von Lemma 6.7, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_{i_k}} \in B_1 \cup B_2.$$

– D.h., die Bedingung (c<sub>2</sub>) in Lemma 6.7 für die Konvergenz (28) ist ebenfalls erfüllt.

- Die Stetigkeit der Abbildungen  $\mathbf{T}_\oplus : \mathcal{F} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{T}_- : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{T}_x : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{T}_c : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  und  $\mathbf{T}_\delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  ergibt sich auf völlig analoge Weise wie im ersten Teil des Beweises.  $\square$

Mit Hilfe der Lemmas 6.6 und 6.7 leiten wir nun noch weitere Stetigkeitseigenschaften für Abbildungen vom Typ  $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  bzw.  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  her.

**Korollar 6.3**

- Die Abbildung  $\mathbf{T} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  mit  $\mathbf{T}(B_1, B_2) = B_1 \cap B_2$  für beliebige  $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$  ist nach oben halbstetig.
- Die Abbildungen  $\mathbf{T}_{\text{cl}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  und  $\mathbf{T}_\partial : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  sind nach unten halbstetig, wobei

$$\mathbf{T}_{\text{cl}}(B) = \text{cl } B^c, \quad \mathbf{T}_\partial(B) = \partial B \quad \forall B \in \mathcal{F}.$$

**Beweis**

- Mit Hilfe von Lemma 6.6 zeigen wir zunächst, dass die Durchschnittsbildung nach oben halbstetig ist.
  - Gemäß Bedingung (24) in Lemma 6.6 ist dabei zu zeigen, dass

$$\limsup (B_{1n} \cap B_{2n}) \subset B_1 \cap B_2$$

für beliebige  $B_1, B_2, B_{11}, B_{21}, B_{12}, B_{22}, \dots \in \mathcal{F}$  mit  $B_{1n} \rightarrow B_1$  und  $B_{2n} \rightarrow B_2$ .

- Sei  $x \in \limsup (B_{1n} \cap B_{2n})$ . Dann gibt es eine Teilfolge  $B_{1n_1} \cap B_{2n_1}, B_{1n_2} \cap B_{2n_2}, \dots$  und Punkte  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ , so dass  $x_{n_k} \in B_{1n_k} \cap B_{2n_k}$  für jedes  $k \geq 1$  und  $x_{n_k} \rightarrow x$ .

- Wegen  $B_{1n} \rightarrow B_1$  und  $B_{2n} \rightarrow B_2$  ergibt sich hieraus mit Hilfe von Teilaussage (c<sub>2</sub>) in Lemma 6.7, dass  $x \in B_1$  und  $x \in B_2$ , d.h.,  $x \in B_1 \cap B_2$ .
- Die Halbstetigkeit der Abbildung  $\mathbf{T}_{\text{cl}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  nach unten ergibt sich aus der folgenden Überlegung.
  - Für jede offene Menge  $E \in \mathcal{E}$  gilt offenbar, dass

$$\mathbf{T}_{\text{cl}}^{-1}(\mathcal{F}^E) = \{B \in \mathcal{F} : E \cap \text{cl} B^c = \emptyset\} = \{B \in \mathcal{F} : E \cap B^c = \emptyset\} = \{B \in \mathcal{F} : E \subset B\},$$

wobei  $\{B \in \mathcal{F} : E \subset B\}$  eine abgeschlossene Menge in  $\mathcal{F}$  ist.

- Denn für beliebige  $x \in E$  und  $B, B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ , so dass  $E \subset B_n$  für jedes  $n \geq 1$  und  $B_n \rightarrow B$ , ergibt sich aus Teilaussage (c<sub>2</sub>) in Lemma 6.7, dass  $x \in B$ , wenn dabei  $x$  als Grenzwert der (konvergenten) Folge  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots \in \mathbb{R}^d$  mit  $x_{n_k} = x$  für jedes  $k \geq 1$  aufgefasst wird.
- Insgesamt ergibt sich somit, dass das Komplement

$$\mathbf{T}_{\text{cl}}^{-1}(\mathcal{F}_E) = \mathcal{F} \setminus \mathbf{T}_{\text{cl}}^{-1}(\mathcal{F}^E)$$

eine offene Menge in  $\mathcal{F}$  ist, d.h., die Abbildung  $\mathbf{T}_{\text{cl}}$  ist nach unten halb stetig.

- Die Halbstetigkeit der Abbildung  $\mathbf{T}_{\partial} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  nach unten ergibt sich auf ähnliche Weise.
  - Für jede zusammenhängende offene Menge  $E \in \mathcal{E}$  und für jedes  $B \in \mathcal{F}$  gilt  $E \cap \partial B \neq \emptyset$  genau dann, wenn  $E \cap B \neq \emptyset$  und  $E \cap B^c \neq \emptyset$ .
  - In diesem Fall gilt somit, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\partial}^{-1}(\mathcal{F}_E) &= \{B \in \mathcal{F} : E \cap \partial B \neq \emptyset\} \\ &= \{B \in \mathcal{F} : E \cap B \neq \emptyset\} \cap \{B \in \mathcal{F} : E \cap B^c \neq \emptyset\} \\ &= \mathcal{F}_E \cap \{B \in \mathcal{F} : E \subset B\}^c. \end{aligned}$$

- Weil wir im ersten Teil des Beweises gezeigt hatten, dass die Menge  $\{B \in \mathcal{F} : E \subset B\}$  abgeschlossen in  $\mathcal{F}$  ist, ergibt sich hieraus, dass  $\mathbf{T}_{\partial}^{-1}(\mathcal{F}_E)$  eine offene Menge in  $\mathcal{F}$  ist.
- Außerdem lässt sich jede offene Menge  $E \in \mathcal{E}$  als Vereinigung  $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$  von (abzählbar vielen) zusammenhängenden offenen Mengen  $E_n \in \mathcal{E}$  darstellen.
- Insgesamt ergibt sich somit, dass

$$\mathbf{T}_{\partial}^{-1}(\mathcal{F}_E) = \mathbf{T}_{\partial}^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_{E_n}\right) = \bigcup_{n \geq 1} \mathbf{T}_{\partial}^{-1} \mathcal{F}_{E_n}$$

für jedes  $E \in \mathcal{E}$  eine offene Menge in  $\mathcal{F}$  ist. □

Mit Hilfe von Lemma 6.4 und Korollar 6.3 können wir schließlich zeigen, dass der erweiterte Konvexring  $\mathcal{S}$  ebenfalls eine Borel-Menge in  $\mathcal{F}$  ist.

**Lemma 6.8** *Sei  $\sigma_{\mathcal{F}}$  die in (7) definierte Schnitt- $\sigma$ -Algebra. Dann gilt  $\mathcal{S} \in \sigma_{\mathcal{F}}$ .*

**Beweis**

- Offenbar gilt  $\mathcal{S} = \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{S}_k$ , wobei

$$\mathcal{S}_k = \{B \in \mathcal{F} : B \cap B(o, k) \in \mathcal{R}\} \quad \forall k \geq 1,$$

d.h.,  $\mathcal{S}_k$  ist das Urbild von  $\mathcal{R}$  bezüglich der Abbildung  $\mathbf{T}_k : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  mit  $\mathbf{T}_k(B) = B \cap B(o, k)$ .

- Aus der ersten Teilaussage von Korollar 6.3 ergibt sich, dass  $\mathbf{T}_k : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  für jedes  $k \geq 1$  nach oben halb stetig und damit Borel-messbar ist. Außerdem hatten wir in Lemma 6.4 gezeigt, dass  $\mathcal{R} \in \sigma_{\mathcal{F}}$ .
- Insgesamt ergibt sich hieraus, dass  $\mathcal{S}_k = \mathbf{T}_k^{-1}(\mathcal{R}) \in \sigma_{\mathcal{F}}$  und somit  $\mathcal{S} = \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{S}_k \in \sigma_{\mathcal{F}}$ . □

## 6.2 Zufällige abgeschlossene Mengen

- Wir erinnern zunächst an den Begriff des zufälligen Punktprozesses in  $\mathbb{R}^d$ , der in Abschnitt 3.1 eingeführt worden ist, und zeigen dann, dass jeder einfache Punktprozess als zufällige (abgeschlossene) Menge in  $\mathbb{R}^d$  aufgefasst werden kann.

- Unter einem zufälligen Punktprozess  $\{S_n\}$  im  $d$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$  versteht man eine Folge von Zufallsvektoren  $S_1, S_2, \dots \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  über einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , so dass

$$\#\{n : S_n \in B\} < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (29)$$

- Dabei sagt man, dass  $\{S_n\}$  ein einfacher Punktprozess ist, wenn zusätzlich zu der lokalen Endlichkeitsbedingung (29) gilt, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$S_i \neq S_j \quad \forall i, j \geq 1 \text{ mit } i \neq j. \quad (30)$$

- Aus (29) und (30) ergibt sich, dass  $\{S_n(\omega)\}$  für fast jedes  $\omega \in \Omega$  eine abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  ist.

- Man kann sich leicht überlegen, dass die Abbildung  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  mit

$$\Xi(\omega) = \{S_n(\omega)\} \quad (31)$$

messbar bezüglich  $(\mathcal{A}, \sigma_{\mathcal{F}})$  ist, wobei  $\sigma_{\mathcal{F}}$  die in (7) definierte Schnitt- $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $\mathcal{F}$  ist.

- Weil  $\sigma_{\mathcal{F}} = \sigma(\{\mathcal{F}_C : C \in \mathcal{C}\})$ , wobei  $\mathcal{F}_C = \{B \in \mathcal{F} : B \cap C \neq \emptyset\}$ , genügt es zu zeigen, dass

$$\{\omega \in \Omega : \Xi(\omega) \cap C \neq \emptyset\} \in \mathcal{A} \quad \forall C \in \mathcal{C}. \quad (32)$$

- Dies ergibt sich aus der folgenden Überlegung: Für jedes  $C \in \mathcal{C}$  gilt

$$\{\omega \in \Omega : \Xi(\omega) \cap C \neq \emptyset\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : S_n(\omega) \in C\} \in \mathcal{A},$$

weil  $S_1, S_2, \dots \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  Zufallsvektoren, d.h.,  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ -messbare Abbildungen sind.

### 6.2.1 Definition und Beispiele

Die  $(\mathcal{A}, \sigma_{\mathcal{F}})$ -Messbarkeit der in (31) betrachteten Abbildung  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  liefert eine Motivation dafür, den Begriff der (allgemeinen) zufälligen abgeschlossenen Menge wie folgt einzuführen.

**Definition** Die Abbildung  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  heißt *zufällige abgeschlossene Menge (ZAM)*, wenn

$$\{\omega \in \Omega : \Xi(\omega) \cap C \neq \emptyset\} \in \mathcal{A} \quad \forall C \in \mathcal{C}, \quad (33)$$

d.h., wenn  $\{\omega \in \Omega : \Xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$  für jedes  $B \in \sigma_{\mathcal{F}}$ .

Neben dem Beispiel des (einfachen) Punktprozesses, das in der Einleitung dieses Kapitels diskutiert wurde, gibt es natürlich noch weitere Arten von Beispielen für zufällige abgeschlossene Mengen.

### Beispiele

1. Seien  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $R : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  beliebige Zufallsvariablen. Dann ist durch die *Kugel*  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  mit Mittelpunkt  $S$  und Radius  $R$  eine ZAM gegeben, wobei

$$\Xi(\omega) = B(S(\omega), R(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (34)$$

- Hierfür muss gezeigt werden, dass die in (34) gegebene Abbildung  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  messbar ist, d.h., dass  $\Xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  für jedes  $B \in \sigma_{\mathcal{F}}$ .
- Dabei genügt es zu zeigen, dass  $\Xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  für jedes  $B \in \mathcal{G}''$  gilt, wobei  $\mathcal{G}''$  die abzählbare Basis der Fell-Topologie  $\mathcal{G} \subset 2^{\mathcal{F}}$  ist, die im Beweis von Lemma 6.2 betrachtet wurde.
- Dies wiederum ergibt sich aus der Tatsache, dass  $\Xi^{-1}(\mathcal{F}^C) \in \mathcal{A}$  und  $\Xi^{-1}(\mathcal{F}_E) \in \mathcal{A}$  für beliebige abgeschlossene Kugeln  $C = B(x, r)$  bzw. offene Kugeln  $E = \text{int } B(x, r)$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} \Xi^{-1}(\mathcal{F}^C) &= \{\omega \in \Omega : B(S(\omega), R(\omega)) \cap B(x, r) = \emptyset\} \\ &= \{\omega \in \Omega : |S(\omega) - x| > R(\omega) + r\} = \{\omega \in \Omega : |S(\omega) - x| - R(\omega) > r\} \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Xi^{-1}(\mathcal{F}_E) &= \{\omega \in \Omega : B(S(\omega), R(\omega)) \cap \text{int } B(x, r) \neq \emptyset\} \\ &= \{\omega \in \Omega : |S(\omega) - x| < R(\omega) + r\}; = \{\omega \in \Omega : |S(\omega) - x| - R(\omega) < r\} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

2. Für  $n \geq 1$  seien  $S_1, \dots, S_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $R_1, \dots, R_n : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  beliebige Zufallsvariablen. Dann ist durch  $\Xi = \bigcup_{i=1}^n B(S_i, R_i)$  eine ZAM gegeben, die in der Literatur *Keim–Korn–Modell* genannt wird.

- Dabei ergibt sich durch die Betrachtung der gleichen Art von „Urbildern“ wie in Beispiel 1, dass die Abbildung  $B(S_1, R_1) \cup \dots \cup B(S_n, R_n) : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  messbar ist.
- Denn aus Beispiel 1 ergibt sich, dass für beliebige  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $r > 0$  die folgenden Teilmengen von  $\Omega$  zu  $\mathcal{A}$  gehören:

$$\{\omega \in \Omega : \bigcup_{i=1}^n B(S_i(\omega), R_i(\omega)) \cap B(x, r) \neq \emptyset\} = \bigcup_{i=1}^n \{\omega \in \Omega : B(S_i(\omega), R_i(\omega)) \cap B(x, r) \neq \emptyset\}$$

bzw.

$$\{\omega \in \Omega : \bigcup_{i=1}^n B(S_i(\omega), R_i(\omega)) \cap \text{int } B(x, r) = \emptyset\} = \bigcup_{i=1}^n \{\omega \in \Omega : B(S_i(\omega), R_i(\omega)) \cap \text{int } B(x, r) = \emptyset\}.$$

3. Außerdem kann man zeigen, dass  $\Xi = \bigcup_{i=1}^n (\Xi_i + S_i)$  eine ZAM ist, wobei  $S_1, \dots, S_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  beliebige ( $d$ -dimensionale) Zufallsvektoren und  $\Xi_1, \dots, \Xi_n : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  beliebige ZAM sind.

- Dabei genügt es sich zu beachten, dass  $\Xi_i + S_i = \Xi_i \oplus \{S_i\}$  und dass die Abbildung  $\mathbf{T} : \mathcal{F} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}$  mit  $\mathbf{T}(B_1, B_2) = B_1 \oplus B_2$  stetig ist (vgl. Korollar 6.2) und somit  $(\sigma_{\mathcal{F}} \otimes \sigma_{\mathcal{F}}, \sigma_{\mathcal{F}})$ -messbar ist (vgl. Lemma 6.5 bzw. Korollar 6.1).
- Hieraus ergibt sich, dass  $\Xi_i + S_i$  und somit auch  $\Xi = \bigcup_{i=1}^n (\Xi_i + S_i)$  eine ZAM ist.

4. Unter gewissen zusätzlichen Bedingungen kann man zeigen, dass auch die Vereinigung

$$\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\Xi_i + S_i) \tag{35}$$

von *unendlich vielen* „Körnern“  $\Xi_1 + S_1, \Xi_2 + S_2, \dots$  eine ZAM sind.

- Dies gilt beispielsweise dann, wenn  $\Xi_i + S_i = B(S_i, R_i)$  für jedes  $i \geq 1$ , wobei  $\{S_n\}$  ein (einfacher) Punktprozess ist und die Zufallsvariablen  $R_1, R_2, \dots : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  gleichmäßig beschränkt sind, d.h.,  $P(R_i \leq c) = 1$  für jedes  $i \geq 1$  und eine Konstante  $c < \infty$ .
  - Dann gilt  $\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(S_i, R_i) \in \mathcal{F}$  mit Wahrscheinlichkeit 1, weil  $\{B(S_i, R_i), i \geq 1\}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 eine lokalendliche Familie von abgeschlossenen Mengen ist.
  - Um zu zeigen, dass in diesem Fall die in (35) betrachtete Abbildung  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  messbar ist, kann man genauso wie in den Beispielen 1 und 2 vorgehen.
- Beachte: Wenn  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson-Prozess ist, dann wird die in (35) betrachtete ZAM ein *Boolesches Modell* genannt, vgl. Abschnitt 6.5.

Wir betrachten nun Beispiele von ZAM, die durch zufällige Mosaik generiert werden.

### Beispiele (Fortsetzung)

5. Sei  $\{S_n\}$  eine beliebiger (einfacher) Punktprozess in  $\mathbb{R}^d$ .

- Dann kann man sich so wie in Beispiel 1 überlegen, dass für beliebige  $n, m \geq 1$  mit  $m \neq n$  der zufällige (abgeschlossene) Halbraum  $\{x \in \mathbb{R}^d : |x - S_n| \leq |x - S_m|\}$  eine ZAM ist.
- Denn für jede abgeschlossene Kugel  $C = B(y, r)$  und für jede offene Kugel  $E = \text{int } B(y, r)$  gilt

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega \in \Omega : \{x \in \mathbb{R}^d : |x - S_n(\omega)| \leq |x - S_m(\omega)|\} \cap B(y, r) \neq \emptyset \right\} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega : |y - S_n(\omega)| \leq \left| y - \left( S_m(\omega) + 2r \frac{S_m(\omega) - S_n(\omega)}{|S_m(\omega) - S_n(\omega)|} \right) \right| \right\} \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega \in \Omega : \{x \in \mathbb{R}^d : |x - S_n(\omega)| \leq |x - S_m(\omega)|\} \cap \text{int } B(y, r) = \emptyset \right\} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega : |y - S_n(\omega)| \geq \left| y - \left( S_m(\omega) + 2r \frac{S_m(\omega) - S_n(\omega)}{|S_m(\omega) - S_n(\omega)|} \right) \right| \right\} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

- Hieraus ergibt sich auf die gleiche Weise wie in den Beispielen 2 und 4, dass auch die *Voronoi-Zelle*  $\Xi_n : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  für jedes  $n \geq 1$  eine ZAM ist, wobei

$$\Xi_n = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - S_n| \leq |x - S_m| \forall m \neq n\} = \bigcap_{m \neq n} \{x \in \mathbb{R}^d : |x - S_n| \leq |x - S_m|\}. \quad (36)$$

- Die Anwendung von Lemma 6.5 bzw. Korollar 6.3 ergibt darüber hinaus, dass der *Rand*  $\partial \Xi_n$  der in (36) gegebenen Voronoi-Zelle  $\Xi_n$  eine ZAM ist.
- Außerdem gilt  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \partial \Xi_n \in \mathcal{F}$  mit Wahrscheinlichkeit 1, weil  $\{\partial \Xi_n, n \geq 1\}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 eine lokalendliche Familie von abgeschlossenen Mengen ist.
  - Denn für beliebige  $n \geq 1$  und  $r > 0$  ergibt sich aus  $\Xi_n \cap B(o, r) \neq \emptyset$ , dass es ein  $Z_n \in \Xi_n \cap B(o, r)$  gibt, so dass

$$|S_n| \leq |S_n - Z_n| + |Z_n| \leq |S_1 - Z_n| + |Z_n| \leq |S_1| + 2|Z_n| \leq |S_1| + 2r.$$

– D.h.  $S_n \in B(o, |S_1| + 2r)$ , wobei die letzte Ungleichung wegen der lokalen Endlichkeit des Punktprozesses  $\{S_n\}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 nur für endlich viele  $n \geq 1$  gelten kann.

- Hieraus und aus der Messbarkeit der Abbildungen  $\partial \Xi_n : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  für jedes  $n \geq 1$  ergibt sich, dass auch die Vereinigungsmenge  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial \Xi_n$  aller „Kanten“ des *Voronoi-Mosaiks* eine ZAM ist.
- Insbesondere gilt dies natürlich für *Poisson-Voronoi-Mosaik* bzw. für *Cox-Voronoi-Mosaik*, die in den Abschnitten 4.1.4 bzw. 4.2.4 betrachtet worden sind.

6. Sei nun  $d = 2$ . Auf ähnliche Weise wie für Voronoi-Mosaik kann man dann Beispiele von ZAM angeben, die durch die in Abschnitt 4.2.3 betrachteten *Poissonschen Geradenprozesse* in  $\mathbb{R}^2$  generiert werden.

- Sei also  $\{(R_n, V_n)\}$  ein unabhängig markierter Poisson-Prozess, wobei
  - (i)  $\{R_n, n \geq 1\}$  ein homogener Poisson-Prozess in  $\mathbb{R}$  ist,
  - (ii)  $\{V_n\}$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten (nichtnegativen) Zufallsvariablen ist mit  $V_n \sim U([0, \pi))$ ,
  - (iii) und die beiden Folgen  $\{R_n\}$  und  $\{V_n\}$  unabhängig sind.
- So wie in den Beispielen 1 und 5 kann man zeigen, dass die Abbildung  $\ell_{R_n, V_n} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  mit

$$\ell_{R_n, V_n} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \cos V_n + x_2 \sin V_n = R_n\}$$

für jedes  $n \geq 1$  eine ZAM, also eine *zufällige Gerade* in  $\mathbb{R}^2$  ist.

- Außerdem gilt  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{R_n, V_n} \in \mathcal{F}$  mit Wahrscheinlichkeit 1, weil die Anzahl derjenigen Geraden  $\ell_{R_n, V_n}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 endlich ist, die die Kugel  $B(o, r)$  mit beliebigem, jedoch fest vorgegebenem Radius  $r > 0$  schneiden.
- Hieraus und aus der Messbarkeit der Abbildungen  $\ell_{R_n, V_n} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  für jedes  $n \geq 1$  ergibt sich, dass auch die folgende Vereinigungsmenge eine ZAM in  $\mathbb{R}^2$  ist:

$$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{R_n, V_n}. \quad (37)$$

- Weitere Beispiele von ZAM sind durch die Abschließungen der Zusammenhangskomponenten des Komplementes  $\Xi^c$  der in (37) betrachteten Kantenmenge  $\Xi$  gegeben.
  - Man kann zeigen, dass diese Abschließungen mit Wahrscheinlichkeit 1 eine Folge  $\{\Xi_n, n \geq 1\}$  von (zufälligen) kompakten und konvexen Polygonen  $\Xi_n : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  bilden, so dass
    - (i)  $\text{int } \Xi_i \cap \text{int } \Xi_j = \emptyset$  für beliebige  $i, j \geq 1$  mit  $i \neq j$ ,
    - (ii)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n = \mathbb{R}^2$  und  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \partial \Xi_n = \Xi$ .
  - Dabei sagt man, dass  $\{\Xi_n, n \geq 1\}$  ein (stationäres und isotropes) *Poissonsches Geradenmosaik* ist. Die zufälligen Polygone  $\Xi_1, \Xi_2, \dots$  werden die *Zellen* des Mosaiks genannt, vgl. Abbildung 20.

Aus den in Abschnitt 6.1 hergeleiteten Messbarkeits- und Stetigkeitseigenschaften ergeben sich darüber hinaus die folgenden (allgemeinen) Möglichkeiten zur Konstruktion von zusammengesetzten bzw. transformierten ZAM.

**Theorem 6.2** *Seien  $\Xi, \Xi' : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  beliebige ZAM.*

- *Dann sind auch die folgenden Abbildungen von  $\Omega$  in  $\mathcal{F}$  ZAM, und zwar  $Z \cup Z', Z \cap Z', Z \oplus Z'$  bzw.  $\partial \Xi$ .*
- *Weitere ZAM sind durch die Abbildungen  $\Xi + x$  und  $\delta(\Xi)$  gegeben, und zwar für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  und für jede Drehung  $\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  um den Nullpunkt.*

### 6.2.2 Verteilung und Kapazitätsfunktional

In diesem Abschnitt führen wir die Begriffe der Verteilung und des Kapazitätsfunktionals von ZAM ein. Dabei zeigen wir, dass zwischen diesen beiden Kenngrößen ein ähnlicher (eindeutiger) Zusammenhang wie zwischen der Verteilung und der Verteilungsfunktion von reellwertigen Zufallsvariablen besteht.

**Definition** Sei  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  eine beliebige ZAM. Dann heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_{\Xi} : \sigma_{\mathcal{F}} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$P_{\Xi}(B) = P(\Xi \in B) \quad \forall B \in \sigma_{\mathcal{F}} \quad (38)$$

die *Verteilung* von  $\Xi$ , während die Abbildung  $\mathbf{T}_{\Xi} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$\mathbf{T}_{\Xi}(C) = P(\Xi \cap C \neq \emptyset) \quad (= P_{\Xi}(\mathcal{F}_C)) \quad \forall C \in \mathcal{C} \quad (39)$$

das *Kapazitätsfunktional* von  $\Xi$  genannt wird.

Um zu zeigen, dass zwischen der Verteilung  $P_{\Xi}$  und dem Kapazitätsfunktional  $\mathbf{T}_{\Xi}$  ein eindeutiger Zusammenhang besteht, ist die folgende Version des *Satzes über monotone Klassen* nützlich. Hierfür erinnern wir zunächst an die einige elementare Begriffe der Mengenalgebra.

**Definition** Sei  $A$  eine beliebige Menge.

1. Eine Familie  $\mathcal{G}$  von Teilmengen von  $A$  heißt *D-System* (Dynkin-System) über  $A$ , falls
  - $A \in \mathcal{G}$ ,
  - $B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{G}$  für beliebige  $B_1, B_2 \in \mathcal{G}$  mit  $B_1 \supset B_2$ ,
  - $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{G}$  für beliebige  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{G}$  mit  $B_1 \subset B_2 \subset \dots$
2. Eine nichtleere Familie  $\mathcal{G}$  von Teilmengen von  $A$  heißt  *$\pi$ -System* über  $A$ , falls  $\bigcap_{i=1}^n B_i \in \mathcal{G}$  für jedes  $n = 1, 2, \dots$  und für beliebige  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{G}$ .

**Beachte**

- Jede  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen  $A$  ist gleichzeitig ein D-System und auch ein  $\pi$ -System über  $A$ .
- Umgekehrt ist jedes System von Teilmengen von  $A$ , das sowohl ein D-System als auch ein  $\pi$ -System über  $A$  ist, eine  $\sigma$ -Algebra über  $A$ .
- *Schreibweise:* Sei  $D(\mathcal{G})$  das kleinste D-System, das das erzeugende System  $\mathcal{G}$  von Teilmengen von  $A$  umfasst. Analog bezeichne  $\sigma(\mathcal{G})$  (so wie bisher) die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die das erzeugende System  $\mathcal{G}$  von Teilmengen von  $A$  umfasst.

**Lemma 6.9** Sei  $\mathcal{G}$  ein  $\pi$ -System über  $A$ . Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{G}) = D(\mathcal{G}). \quad (40)$$

Mit Hilfe von Lemma 6.9 können wir den folgenden *Eindeutigkeitssatz* herleiten.

**Theorem 6.3** Seien  $\Xi_1, \Xi_2 : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  zwei beliebige ZAM. Es gilt  $P_{\Xi_1} = P_{\Xi_2}$  genau dann, wenn  $\mathbf{T}_{\Xi_1} = \mathbf{T}_{\Xi_2}$ .

**Beweis**

- Die Notwendigkeit der Bedingung ergibt sich unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (38) und (39) der Verteilung bzw. des Kapazitätsfunktionals von ZAM.
- Es gelte nun  $\mathbf{T}_{\Xi_1}(C) = \mathbf{T}_{\Xi_2}(C)$  für jedes  $C \in \mathcal{C}$ . Damit gilt auch  $1 - \mathbf{T}_{\Xi_1}(C) = 1 - \mathbf{T}_{\Xi_2}(C)$  für jedes  $C \in \mathcal{C}$ , d.h., es gilt

$$P_{\Xi_1}(\mathcal{F}^C) = P_{\Xi_2}(\mathcal{F}^C) \quad \forall C \in \mathcal{C}. \quad (41)$$

- Dabei ist  $\mathcal{G} = \{\mathcal{F}^C, C \in \mathcal{C}\}$  ein  $\pi$ -System über  $\mathcal{F}$ , denn es gilt

$$\mathcal{F}^{C_1} \cap \mathcal{F}^{C_2} = \mathcal{F}^{C_1 \cup C_2} \quad \forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}.$$

- Sei nun  $\mathcal{G}' = \{B \in \mathcal{F} : P_{\Xi_1}(B) = P_{\Xi_2}(B)\}$ . Wegen (41) gilt dann

$$\mathcal{G}' \supset \mathcal{G}, \quad (42)$$

und aus den elementaren Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen (vgl. z.B. Abschnitt WR-2.3.1) ergibt sich, dass  $\mathcal{G}'$  ein D-System über  $\mathcal{F}$  ist.

- Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Lemmas 6.1 und 6.9, dass

$$\mathcal{G}' = D(\mathcal{G}') \stackrel{(42)}{\supset} D(\mathcal{G}) \stackrel{\text{Lemma 6.9}}{=} \sigma(\mathcal{G}) \stackrel{\text{Lemma 6.1}}{=} \sigma_{\mathcal{F}}. \quad \square$$

Wir zeigen nun, dass das Kapazitätsfunktional von ZAM ähnliche *Stetigkeits- und Monotonieeigenschaften* wie die Verteilungsfunktion von reellwertigen Zufallsvariablen besitzt.

**Theorem 6.4** Sei  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  eine beliebige ZAM mit dem Kapazitätsfunktional  $\mathbf{T}_\Xi : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ .

1. Dann gilt

$$\mathbf{T}_\Xi(\emptyset) = 0 \quad \text{und} \quad 0 \leq \mathbf{T}_\Xi(C) \leq 1 \quad \forall C \in \mathcal{C}.$$

2. Für jede Folge  $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}$  mit  $C_1 \supset C_2 \supset \dots$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{T}_\Xi(C_n) = \mathbf{T}_\Xi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right).$$

3. Die Größen  $\mathbf{S}_0(C)$ ,  $\mathbf{S}_1(C; C_1)$ ,  $\mathbf{S}_2(C; C_1, C_2)$ , ... seien rekursiv definiert, so dass  $\mathbf{S}_0(C) = 1 - \mathbf{T}_\Xi(C)$  und

$$\mathbf{S}_n(C; C_1, \dots, C_n) = \mathbf{S}_{n-1}(C; C_1, \dots, C_{n-1}) - \mathbf{S}_{n-1}(C \cup C_n; C_1, \dots, C_{n-1}) \quad (43)$$

für jedes  $n \geq 1$  und für beliebige  $C, C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ . Dann gilt

$$\mathbf{S}_n(C; C_1, \dots, C_n) \geq 0 \quad \forall n \geq 1, C, C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}. \quad (44)$$

### Beweis

- Die erste Teilaussage ergibt sich unmittelbar Definitionsgleichung (39) des Kapazitätsfunktionals  $\mathbf{T}_\Xi : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ .
- Um die zweite Teilaussage zu zeigen, genügt es zu beachten, dass für jede Folge  $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}$  mit  $C_1 \supset C_2 \supset \dots$

$$\mathcal{F}_{C_1} \supset \mathcal{F}_{C_2} \supset \dots \quad \text{und} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{C_n} = \mathcal{F}_{\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n}$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{T}_\Xi(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\Xi(\mathcal{F}_{C_n}) = P_\Xi\left(\bigcap_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{C_n}\right) = P_\Xi\left(\mathcal{F}_{\bigcap_{n \rightarrow \infty} C_n}\right) = \mathbf{T}_\Xi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right).$$

- Die dritte Teilaussage lässt sich mit vollständiger Induktion bezüglich  $n \geq 1$  beweisen.
  - Für  $n = 1$  gilt offenbar, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1(C; C_1) &= \mathbf{S}_0(C) - \mathbf{S}_0(C \cup C_1) = \mathbf{T}_\Xi(C \cup C_1) - \mathbf{T}_\Xi(C) \\ &= P(\Xi \cap (C \cup C_1) \neq \emptyset) - P(\Xi \cap C \neq \emptyset) \\ &= P(\Xi \cap C = \emptyset, \Xi \cap C_1 \neq \emptyset) \geq 0. \end{aligned}$$

– Für ein gewisses  $n \geq 1$  und für beliebige  $C, C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$  gelte nun

$$\mathbf{S}_n(C; C_1, \dots, C_n) = P(\Xi \cap C = \emptyset, \Xi \cap C_1 \neq \emptyset, \dots, \Xi \cap C_n \neq \emptyset) \geq 0. \quad (45)$$

– Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Rekursionsgleichung (43), dass

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1}(C; C_1, \dots, C_{n+1}) &\stackrel{(43)}{=} \mathbf{S}_n(C; C_1, \dots, C_n) - \mathbf{S}_n(C \cup C_{n+1}; C_1, \dots, C_n) \\ &\stackrel{(45)}{=} P(\Xi \cap C = \emptyset, \Xi \cap C_1 \neq \emptyset, \dots, \Xi \cap C_n \neq \emptyset) \\ &\quad - P(\Xi \cap (C \cup C_{n+1}) = \emptyset, \Xi \cap C_1 \neq \emptyset, \dots, \Xi \cap C_n \neq \emptyset) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

für beliebige  $C, C_1, \dots, C_{n+1} \in \mathcal{C}$ . □

Die folgende Umkehrung von Theorem 6.4 wird in der Literatur der *Satz von Choquet* genannt.

**Theorem 6.5** Sei  $\mathbf{T} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$  ein Funktional, das die Eigenschaften 1–3 von Theorem 6.4 besitzt. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß  $P : \sigma_{\mathcal{F}} \rightarrow [0, 1]$ , so dass

$$\mathbf{T}(C) = P(\mathcal{F}_C) \quad \forall C \in \mathcal{C}. \quad (46)$$

Einen Beweis der Existenzaussage von Theorem 6.5 findet man beispielsweise in G. Matheron (1975) *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley, New York. Die Eindeutigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P : \sigma_{\mathcal{F}} \rightarrow [0, 1]$  ergibt sich unmittelbar aus Theorem 6.3.

### 6.2.3 Stationarität und Isotropie; Ergodizität

Auf ähnliche Weise wie die Stationarität und Isotropie von Punktprozessen (vgl. Abschnitt 3.1.4) definiert man die Begriffe der Stationarität bzw. Isotropie von allgemeinen ZAM. Dabei werden die folgende Invarianzeigenschaften ihrer Verteilung bezüglich beliebiger Verschiebungen des Nullpunktes bzw. beliebiger Drehungen um den Nullpunkt betrachtet.

**Definition** Sei  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  eine beliebige ZAM.

- Man sagt, dass  $\Xi$  *stationär* ist, wenn  $P_{\Xi} = P_{\Xi+x}$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ .
- Die ZAM  $\Xi$  heißt *isotrop*, wenn  $P_{\Xi} = P_{\delta(\Xi)}$  für jede Drehung  $\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  um den Nullpunkt.

**Beachte**

- Ähnlich wie für stationäre Punktprozesse in Theorem 3.5 kann man zeigen, dass die Realisierungen von stationären ZAM mit Wahrscheinlichkeit 1 entweder die leere Menge oder unbeschränkt sind.
- Mit Hilfe von Theorem 6.3 können die Stationarität und die Isotropie von ZAM durch entsprechende Invarianzeigenschaften des Kapazitätsfunktionalen charakterisiert werden.

**Theorem 6.6** Sei  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  eine beliebige ZAM.

1. Die ZAM  $\Xi$  ist genau dann stationär, wenn  $\mathbf{T}_{\Xi} = \mathbf{T}_{\Xi+x}$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ .
2. Die ZAM  $\Xi$  ist genau dann isotrop, wenn  $\mathbf{T}_{\Xi} = \mathbf{T}_{\delta(\Xi)}$  für jede Drehung  $\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  um den Nullpunkt.

**Beweis**

- Die Notwendigkeit der beiden Bedingungen ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen des Kapazitätsfunktionalen sowie der Stationarität und Isotropie von ZAM.
- Es gelte nun  $\mathbf{T}_{\Xi} = \mathbf{T}_{\Xi+x}$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ .
- Dann ergibt sich mit Hilfe von Theorem 6.3, dass  $P_{\Xi} = P_{\Xi+x}$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ .
- Die Hinlänglichkeit der Isotropie-Bedingung ergibt sich auf die gleiche Weise. □

**Beispiele**

1. Sei  $\{S_n\}$  ein stationärer Punktprozess in  $\mathbb{R}^d$ , und sei  $\{R_n\}$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen  $R_1, R_2, \dots : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ , die unabhängig von  $\{S_n\}$  und gleichmäßig beschränkt sind, d.h.,  $P(R_n \leq c) = 1$  für jedes  $n \geq 1$  und eine Konstante  $c < \infty$ .

- Dann ist durch

$$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, R_n) \quad (47)$$

eine stationäre ZAM gegeben. Wenn  $\{S_n\}$  nicht nur stationär, sondern auch isotrop ist, dann ist das in (47) betrachtete Keim-Korn-Modell  $\Xi$  ebenfalls stationär und isotrop.

- Insbesondere ist somit das Boolesche Modell mit kugelförmigen Körnern stationär und isotrop, weil der homogene Poisson-Prozess  $\{S_n\}$  gleichzeitig stationär und isotrop ist.

2. Außerdem kann man sich leicht überlegen, dass die Vereinigungsmenge

$$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial \Xi_n$$

der „Kanten“ eines Poisson-Voronoi-Mosaiks  $\{\Xi_n\}$ , das durch einen homogenen Poisson-Prozess  $\{S_n\}$  generiert wird, ebenfalls eine stationäre und isotrope ZAM ist.

3. Darüber hinaus ist beispielsweise auch die Kantenmenge

$$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{R_n, V_n} \quad (48)$$

eines Poissonschen Geradenmosaik in  $\mathbb{R}^2$  eine stationäre ZAM, die durch einen unabhängig markierten Poisson-Prozess  $\{(R_n, V_n)\}$  generiert wird, wobei  $\{R_n, n \geq 1\}$  ein homogener Poisson-Prozess in  $\mathbb{R}$  ist.

- Wenn die unabhängigen und identisch verteilten Winkel  $V_n$  gleichverteilt im Intervall  $[0, \pi)$  sind, dann ist die in (48) betrachtete ZAM  $\Xi$  nicht nur stationär, sondern auch isotrop.
- Ansonsten, d.h. bei einer von  $U([0, \pi))$  verschiedenen Winkelverteilung, ist  $\Xi$  zwar stationär, jedoch nicht isotrop.

Auch die Ergodizität von stationären ZAM wird auf ähnliche Weise wie die Ergodizität von stationären Punktprozessen eingeführt, vgl. Abschnitt 3.4.1.

- Hierfür betrachten wir die Familie  $\{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  von *Verschiebungsoperatoren*  $\mathbf{T}_x : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , so dass

$$\mathbf{T}_x(B) = B - x \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{F}, \quad (49)$$

d.h., jeder abgeschlossenen Menge  $B \in \mathcal{F}$  wird die um den Vektor  $-x \in \mathbb{R}^d$  „verschobene“ Menge  $\mathbf{T}_x B = \{y - x : y \in B\}$  zugeordnet.

- Für jede stationäre ZAM  $\Xi$  ergibt sich somit das dynamische System  $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}}, P_{\Xi}, \mathbf{T})$ .
- Man sagt, dass die stationäre ZAM  $\Xi$  *ergodisch* ist, wenn das dynamische System  $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}}, P_{\Xi}, \mathbf{T})$  im Sinne der in Abschnitt 3.4.1 eingeführten Definition ergodisch ist.

### Beachte

- Das in (47) betrachtete stationäre Keim-Korn-Modell  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, R_n)$  ist genau dann ergodisch, wenn der zugrundeliegende stationäre Punktprozess  $\{S_n\}$  der „Keime“ ergodisch ist.
- Außerdem kann man zeigen, dass die „Kantenmenge“  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial \Xi_n$  eines Poisson-Voronoi-Mosaiks  $\{\Xi_n\}$  ergodisch ist, wobei die Zellen  $\Xi_n$  durch einen homogenen Poisson-Prozess  $\{S_n\}$  in  $\mathbb{R}^d$  generiert werden.
- Die (stationäre) Kantenmenge  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{R_n, V_n}$  eines Poissonschen Geradenmosaik in  $\mathbb{R}^2$ , das durch einen unabhängig markierten Poisson-Prozess  $\{(R_n, V_n)\}$  generiert wird, ist ebenfalls ergodisch.

### 6.2.4 Kenngrößen von stationären ZAM und ihre Schätzer

Sei  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  eine beliebige ZAM, und das zufällige Feld  $\{\mathbb{1}_{x \in \Xi}, x \in \mathbb{R}^d\}$  sei gegeben durch

$$\mathbb{1}_{x \in \Xi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \Xi(\omega), \\ 0, & \text{wenn } x \notin \Xi(\omega). \end{cases}$$

Man kann sich leicht überlegen, dass es einen eindeutigen Zusammenhang zwischen den Verteilungen von  $\Xi$  und  $\{\mathbb{1}_{x \in \Xi}, x \in \mathbb{R}^d\}$  gibt.

Insbesondere lassen sich die *Mittelwertfunktion*  $\{m(x), x \in \mathbb{R}^d\}$  und die *Kovarianzfunktion*  $\{k(x, y), x, y \in \mathbb{R}^d\}$  des zufälligen Feldes  $\{\mathbb{1}_{x \in \Xi}, x \in \mathbb{R}^d\}$  mit

$$m(x) = \mathbb{E} \mathbb{1}_{x \in \Xi} \quad \text{und} \quad k(x, y) = \mathbb{E} (\mathbb{1}_{x \in \Xi} \mathbb{1}_{y \in \Xi}) - \mathbb{E} \mathbb{1}_{x \in \Xi} \mathbb{E} \mathbb{1}_{y \in \Xi} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

durch die Einpunkt- bzw. Zweipunkt-Überdeckungswahrscheinlichkeiten  $\{p_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  bzw.  $\{p_{x,y}, x, y \in \mathbb{R}^d\}$  der ZAM  $\Xi$  mit  $p_x = P(x \in \Xi)$  bzw.  $p_{x,y} = P(x \in \Xi, y \in \Xi)$  ausdrücken. Dabei gilt

$$m(x) = p_x \quad \text{bzw.} \quad k(x, y) = p_{x,y} - p_x p_y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d. \quad (50)$$

Auf ähnliche Weise wie im Beweis von Lemma 3.3 ergibt das folgende Resultat.

#### Theorem 6.7

- Die ZAM  $\Xi$  ist genau dann stationär, wenn das zufällige Feld  $\{\mathbb{1}_{x \in \Xi}, x \in \mathbb{R}^d\}$  stationär ist, wobei die Einpunkt-Überdeckungswahrscheinlichkeiten  $p_x$  dann nicht von  $x \in \mathbb{R}^d$  abhängen.
- Sei  $\Xi$  eine stationäre ZAM. Für die Konstante  $p = P(o \in \Xi)$  gilt dann

$$p = \mathbb{E} \nu_d(\Xi \cap [0, 1]^d) = \mathbf{T}_\Xi(\{o\}), \quad (51)$$

weswegen  $p$  der Volumenanteil von  $\Xi$  genannt wird.

- Wenn  $\Xi$  stationär ist, dann gilt außerdem für die Zweipunkt-Überdeckungswahrscheinlichkeiten  $p_{x,y}$ , dass  $p_{x,y} = p_{o,y-x}$  für beliebige  $x, y \in \mathbb{R}^d$ .
- Für die Funktion  $q : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  mit  $q(x) = p_{o,x}$ , die Kovarianz von  $\Xi$  genannt wird, gilt dann

$$q(x) = q(-x) \quad \text{und} \quad q(x) = 2p - \mathbf{T}_\Xi(\{o, x\}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (52)$$

#### Beweis

- Wir leiten lediglich die Formeln in (51) und (52) her, denn die Gültigkeit der übrigen Aussagen ist offensichtlich.
- Sei  $\Xi$  eine stationäre ZAM. Dann gilt insbesondere

$$P(o \in \Xi) = P(x \in \Xi) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (53)$$

- Hieraus und aus dem Satz von Fubini über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \nu_d([0, 1]^d \cap \Xi) &= \mathbb{E} \int_{[0, 1]^d} \mathbb{1}_{x \in \Xi} dx \stackrel{\text{Satz von Fubini}}{=} \int_{[0, 1]^d} \mathbb{E} \mathbb{1}_{x \in \Xi} dx \\ &= \int_{[0, 1]^d} P(x \in \Xi) dx \stackrel{(53)}{=} \int_{[0, 1]^d} P(o \in \Xi) dx = P(o \in \Xi) = p. \end{aligned}$$

- Die zweite Gleichheit in (51) ergibt sich unmittelbar aus der Definitionsgleichung (39) des Kapazitätsfunktional  $\mathbf{T}_\Xi : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ , denn offenbar gilt

$$p = P(o \in \Xi) = P(\Xi \cap \{o\} \neq \emptyset) \stackrel{(39)}{=} \mathbf{T}_\Xi(\{o\}).$$

- Um die erste Gleichheit in (52) zu zeigen, genügt es zu beachten, dass für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} q(x) = p_{o,x} &= P(o \in \Xi, x \in \Xi) \\ &\stackrel{\text{Stationarität}}{=} P(-x \in \Xi, o \in \Xi) \\ &= P(o \in \Xi, -x \in \Xi) \\ &= p_{o,-x} = q(-x). \end{aligned}$$

- Die zweite Gleichheit in (52) ergibt sich aus der folgenden Überlegung: Für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt

$$\begin{aligned} q(x) &= p_{o,x} = P(\{o, x\} \subset \Xi) \\ &= 1 - P(\{o \notin \Xi\} \cup \{x \notin \Xi\}) \\ &= 1 - P(o \notin \Xi) - P(x \notin \Xi) + P(\{o, x\} \cap \Xi = \emptyset) \\ &= 1 - P(o \notin \Xi) + 1 - P(x \notin \Xi) - (1 - P(\{o, x\} \cap \Xi = \emptyset)) \\ &= 2p - \mathbf{T}_\Xi(\{o, x\}). \end{aligned} \quad \square$$

### Beachte

- Genauso wie im Beweis von Lemma 3.3 kann man zeigen, dass

$$\hat{p}_W = \frac{\nu_d(W \cap \Xi)}{\nu_d(W)} \quad (54)$$

für jedes  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W) < \infty$  ein erwartungstreuer Schätzer für den Volumenanteil  $p$  von  $\Xi$  ist.

- Außerdem ergibt sich so wie in Lemma 3.3 die folgende Asymptotik für die Varianz  $\text{Var} \hat{p}_W$  des Schätzers  $\hat{p}_W$  bei unbegrenzt wachsendem Beobachtungsfenster  $W$ :

- Sei  $W_1, W_2, \dots$  eine Folge von Beobachtungsfenstern  $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_d(W_n)} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (55)$$

- Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var} \hat{p}_{W_n} = \int_{\mathbb{R}^d} (p_{o,x} - p^2) dx. \quad (56)$$

- Für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  und für jedes  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(W \ominus B(o, |x|)) < \infty$  betrachten wir den Schätzer

$$\hat{q}_W(x) = \frac{\nu_d(W_x^* \cap \Xi \cap (\Xi - x))}{\nu_d(W_x^*)} \quad (57)$$

für die Kovarianz  $q(x)$  von  $\Xi$ , wobei  $W_x^*$  das „erodierte“ Beobachtungsfenster  $W_x^* = W \ominus B(o, |x|)$  und  $A \ominus B$  die *Minkowski-Subtraktion* bezeichnet, d.h.,

$$A \ominus B = (A^c \oplus B^c)^c = \bigcap_{y \in B} (A + y) \quad \forall A, B \subset \mathbb{R}^d.$$

- Die in (57) betrachtete Auswertung der ZAM  $\Xi \cap (\Xi - x)$  in dem eingeschränkten Fenster  $W_x^*$  ist eine *Randkorrektur*, die in der Literatur *Minus-Sampling* genannt wird, vgl. auch Abschnitt 4.3.

– Man kann sich leicht überlegen, dass  $\widehat{q}_W(x)$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $q(x)$  ist, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \widehat{q}_W(x) &= \frac{\mathbb{E} \nu_d(W_x^* \cap \Xi \cap (\Xi - x))}{\nu_d(W_x^*)} \\
&= \frac{1}{\nu_d(W_x^*)} \mathbb{E} \int_{W_x^*} \mathbb{1}_{\Xi \cap (\Xi - x)}(y) \, dy \\
&\stackrel{\text{Satz von Fubini}}{=} \frac{1}{\nu_d(W_x^*)} \int_{W_x^*} \mathbb{E} \mathbb{1}_{\Xi \cap (\Xi - x)}(y) \, dy \\
&= \frac{1}{\nu_d(W_x^*)} \int_{W_x^*} P(y \in \Xi \cap (\Xi - x)) \, dy \\
&\stackrel{\text{Stationarität}}{=} \frac{1}{\nu_d(W_x^*)} \int_{W_x^*} P(o \in \Xi \cap (\Xi - x)) \, dy \\
&= \frac{1}{\nu_d(W_x^*)} \int_{W_x^*} P(\{o, x\} \subset \Xi) \, dy \\
&= p_{o,x} = q(x).
\end{aligned}$$

- Genauso wie in Theorem 3.18 kann man zeigen, dass die in (54) und (57) eingeführten Schätzer  $\widehat{p}_W$  und  $\widehat{q}_W(x)$  für  $p$  bzw.  $q(x)$  die folgende (starke) Konsistenzeigenschaft besitzen, wenn  $\Xi$  ergodisch ist.
  - Sei  $\Xi$  eine ergodische ZAM mit dem Volumenanteil  $p$ . Dann gilt

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{p}_{[-n,n]^d} = p\right) = 1. \quad (58)$$

– Außerdem ergibt sich für die Kovarianz  $q(x)$  von  $\Xi$ , dass

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{q}_{[-n,n]^d}(x) = q(x)\right) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (59)$$

Eine weitere grundlegende (Struktur-) Kenngröße von stationären ZAM ist die so genannte Kontaktverteilungsfunktion. Sie kann als eine Verallgemeinerung der sphärischen Kontaktverteilungsfunktion von stationären Punktprozessen aufgefasst werden, die in Abschnitt 4.3.1 eingeführt worden ist.

### Definition

- Sei  $\Xi$  eine stationäre ZAM in  $\mathbb{R}^d$  mit dem „Porenanteil“  $1 - p = P(o \notin \Xi) > 0$ .
- Außerdem sei  $B \in \mathcal{C}$  eine kompakte Menge, die *sternförmig* bezüglich des Koordinatenursprungs  $o \in \mathbb{R}^d$  sei, d.h., es gelte  $o \in B$  und  $cx \in B$  für beliebige  $x \in B$  und  $c \in [0, 1]$ .
- Dann heißt die Funktion  $H_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  mit

$$H_B(r) = P(rB \cap \Xi \neq \emptyset \mid o \notin \Xi) \quad \forall r \geq 0 \quad (60)$$

die *Kontaktverteilungsfunktion* von  $\Xi$ , wobei die Menge  $B$  das „strukturierende Element“ von  $H_B$  genannt wird;  $rB = \{rx : x \in B\}$ .

### Beachte

- Die in der Definition der Kontaktverteilungsfunktion formulierte Bedingung, dass  $1 - p = P(o \notin \Xi) > 0$ , ist keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit. Denn man kann sich leicht überlegen, dass  $P(\Xi = \mathbb{R}^d) = 1$  für jede stationäre ZAM  $\Xi$  mit  $P(o \in \Xi) = 0$  gilt.
- Wenn  $B = B(o, 1)$ , d.h., das strukturierende Element  $B$  ist die  $d$ -dimensionale Einheitskugel, dann ist die in (60) eingeführte Funktion  $H_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  die *sphärischen Kontaktverteilungsfunktion* von  $\Xi$ .

- Sei  $u \in \partial B(o, 1)$  ein beliebiger Punkt auf der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel, und das strukturierende Element sei durch das Segment  $B = \{cu : c \in [0, 1]\}$  gegeben. Dann sagt man, dass die in (60) eingeführte Funktion  $H_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  die *lineare Kontaktverteilungsfunktion* von  $\Xi$  in der Richtung  $u \in \partial B(o, 1)$  ist.

Wir leiten nun eine zu (60) äquivalente Darstellungsformel für die Kontaktverteilungsfunktion  $H_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  her. Außerdem zeigen wir, dass  $H_B$  die üblichen Monotonie- und Stetigkeitseigenschaften von Verteilungsfunktionen besitzt, wobei beim Verhalten „im Unendlichen“ eine zusätzliche Bedingung betrachtet wird.

### Theorem 6.8

- Sei  $\Xi$  eine stationäre ZAM mit  $p < 1$ , und sei  $H_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  die Kontaktverteilungsfunktion von  $\Xi$  mit dem strukturierenden Element  $B$ . Dann gilt

$$H_B(r) = P(o \in \Xi \oplus r\check{B} \mid o \notin \Xi) \quad \forall r \geq 0, \quad (61)$$

wobei  $\check{B} = \{-x : x \in B\}$  die Spiegelung von  $B$  am Nullpunkt ist.

- Darüber hinaus gilt

$$H_B(r) \leq H_B(r') \quad \forall r \leq r' \quad (62)$$

und

$$\lim_{r \downarrow r_0} H_B(r) = H_B(r_0) \quad \forall r_0 \geq 0. \quad (63)$$

- Außerdem gilt stets  $\lim_{r \downarrow 0} H_B(r) = 0$ , und unter den zusätzlichen Annahmen, dass  $P(\Xi = \emptyset) = 0$  sowie  $B(o, \varepsilon) \subset B$  für ein  $\varepsilon > 0$ , gilt auch  $\lim_{r \rightarrow \infty} H_B(r) = 1$ .

### Beweis

- Weil offenbar  $\{rB \cap \Xi \neq \emptyset\} = \{o \in \Xi \oplus r\check{B}\}$  gilt, ergibt sich die Gültigkeit von (61) direkt aus der Definitionsgleichung (60) von  $H_B$ .
- Weil außerdem  $\Xi \oplus r\check{B} \subset \Xi \oplus r'\check{B}$  und somit

$$\{\omega \in \Omega : o \in \Xi(\omega) \oplus r\check{B}\} \subset \{\omega \in \Omega : o \in \Xi(\omega) \oplus r'\check{B}\}$$

für beliebige  $r, r' \geq 0$  mit  $r \leq r'$  gilt, ergibt sich (62) aus (61) und aus der Monotonie von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

- Auf ähnliche Weise ergibt sich (63) aus (61) und aus der (rechtsseitigen) Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen bezüglich monotoner Grenzübergänge, denn für jedes  $r_0 \geq 0$  gilt

$$\begin{aligned} \lim_{r \downarrow r_0} H_B(r) &\stackrel{(61)}{=} \lim_{r \downarrow r_0} P(o \in \Xi \oplus r\check{B} \mid o \notin \Xi) \\ &\stackrel{\text{Stetigkeit von Wkt-ma\ss en}}{=} P\left(\bigcap_{r \geq r_0} \{o \in \Xi \oplus r\check{B}\} \mid o \notin \Xi\right) \\ &= P\left(o \in \Xi \oplus \bigcap_{r \geq r_0} r\check{B} \mid o \notin \Xi\right) \\ &= P\left(o \in \Xi \oplus r_0\check{B} \mid o \notin \Xi\right) \\ &\stackrel{(61)}{=} H_B(r_0). \end{aligned}$$

- Insbesondere gilt somit  $\lim_{r \downarrow 0} H_B(r) = H_B(0) = 0$ .

- Wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit  $B(o, \varepsilon) \subset B$ , dann gilt darüber hinaus, dass

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} H_B(r) &\stackrel{(61)}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} P(o \in \Xi \oplus r\check{B} \mid o \notin \Xi) \\
&\geq \lim_{r \rightarrow \infty} P(o \in \Xi \oplus B(o, r\varepsilon) \mid o \notin \Xi) \\
&\stackrel{\text{Stetigkeit von Wkt-ma\ss en}}{=} P\left(\bigcup_{r \geq 0} \{o \in \Xi \oplus B(o, r\varepsilon)\} \mid o \notin \Xi\right) \\
&= P\left(o \in \Xi \oplus \bigcup_{r \geq 0} B(o, r\varepsilon) \mid o \notin \Xi\right) \\
&= P(o \in \Xi \oplus \mathbb{R}^d \mid o \notin \Xi) = P(\Xi \neq \emptyset \mid o \notin \Xi) = 1,
\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Annahme ergibt, dass  $P(\Xi = \emptyset) = 0$ .  $\square$

### Beachte

- Wenn  $\Xi$  ein stationärer Punktprozess in  $\mathbb{R}^d$  ist und wenn das strukturierende Element durch  $B = B(o, 1)$  gegeben ist,
  - dann stimmt die in (60) definierte Funktion  $H_{B(o,1)} : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  mit der in Abschnitt 4.3.1 für stationäre Punktprozesse eingeführten sphärischen Kontaktverteilungsfunktion überein,
  - denn in diesem Fall gilt  $P(o \neq \Xi) = 1$ .
- Aus (61) ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}
H_B(r) &= P(o \in \Xi \oplus r\check{B} \mid o \notin \Xi) = 1 - P(o \notin \Xi \oplus r\check{B} \mid o \notin \Xi) \\
&= 1 - \frac{P(o \notin \Xi \oplus r\check{B})}{P(o \notin \Xi)} = 1 - \frac{1 - P(o \in \Xi \oplus r\check{B})}{1 - P(o \in \Xi)},
\end{aligned}$$

d.h., es gilt

$$H_B(r) = 1 - \frac{1 - p(r)}{1 - p} \quad \forall r \geq 0, \quad (64)$$

wobei  $p(r) = P(o \in \Xi \oplus r\check{B})$  den Volumenanteil der (dilatierten) stationären ZAM  $\Xi \oplus r\check{B}$  bezeichnet;  $p = p(0)$ .

- Wegen (64) ist es naheliegend, für jedes  $r \geq 0$  und für jedes  $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  mit  $\nu_d(W \ominus r\check{B}) > 0$  den folgenden Schätzer

$$\widehat{H}_{B,W}(r) = 1 - \frac{1 - \widehat{p}_{B,W}(r)}{1 - \widehat{p}_W} \quad (65)$$

für  $H_B(r)$  zu betrachten, wobei

$$\widehat{p}_{B,W}(r) = \frac{\nu_d(W_{B,r}^* \cap (\Xi \oplus r\check{B}))}{\nu_d(W_{B,r}^*)} \quad \text{mit } W_{B,r}^* = W \ominus r\check{B} \quad (66)$$

und  $\widehat{p}_W$  der in (54) eingeführte Schätzer des Volumenanteils  $p$  ist.

- Man kann zeigen, dass die stationäre ZAM  $\Xi \oplus r\check{B}$  für jedes  $r \geq 0$  und für jedes strukturierende Element  $B \subset \mathbb{R}^d$  ergodisch ist, wenn  $\Xi$  ergodisch ist.
  - Hieraus und aus (58) ergibt sich die folgende (starke) Konsistenzeigenschaft des in (65) eingeführten Schätzers  $\widehat{H}_{B,W}(r)$ : Wenn  $\Xi$  ergodisch ist, dann gilt für jedes  $r \geq 0$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{H}_{B,[-n,n]^d}(r) = H_B(r)\right) = 1. \quad (67)$$

- Darüber hinaus kann man die punktweise Konvergenz in (67) im Sinne des *Satzes von Gliwenko-Cantelli* verschärfen und zeigen, dass für jede Folge  $r_1, \dots, r_k > 0$  von „Stützstellen“

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i \in \{1, \dots, k\}} |\widehat{H}_{B, [-n, n]^d}(r_i) - H_B(r_i)| = 0\right) = 1, \quad (68)$$

wobei  $\max_{i \in \{1, \dots, k\}} |\widehat{H}_{B, [-n, n]^d}(r_i) - H_B(r_i)|$  als eine Testgröße für Monte-Carlo-Tests von (hypothetischen) Kontaktverteilungsfunktionen  $H_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  verwendet werden kann.

### 6.3 Innere Volumina

Wir betrachten nun weitere Kenngrößen von stationären ZAM  $\Xi$  in  $\mathbb{R}^d$ , die so genannten *j-Intensitäten* von  $\Xi$ , die insbesondere den in (51) eingeführten Volumenanteil  $p = \mathbb{E} \nu_d(\Xi \cap [0, 1]^d)$  als Spezialfall umfassen. Dabei nehmen wir in diesem Abschnitt stets an, dass

$$P(\Xi \in \mathcal{S}) = 1, \quad (69)$$

wobei  $\mathcal{S}$  den erweiterten Konvexring in  $\mathbb{R}^d$  bezeichnet.

#### Beachte

- Man kann sich leicht überlegen, dass die in Abschnitt 6.2.3 betrachteten Beispiele von stationären ZAM die Eigenschaft (69) besitzen.
- Und zwar gilt dies beispielsweise für stationäre Keim-Korn-Modelle mit kugelförmigen Körnern sowie für das Skelett des Poisson-Voronoi-Mosaiks in  $\mathbb{R}^d$  bzw. des Poissonschen Geradenmosaiks in  $\mathbb{R}^2$ .

#### 6.3.1 Additive Funktionale; Steiner-Formel

Wir diskutieren zunächst einige grundlegende Eigenschaften von konvexen und kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  bzw. von Mengen aus dem Konvexring  $\mathcal{R}$ . Weitere Details hierzu und die Beweise derjenigen Aussagen, die wir weglassen werden, findet man beispielsweise in R. Schneider, W. Weil (1992) *Integralgeometrie*, Teubner, Stuttgart.

**Definition** Sei  $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  eine Familie von Borel-Mengen in  $\mathbb{R}^d$ , so dass  $\emptyset \in \mathcal{G}$  und  $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{G}$  für beliebige  $B_1, B_2 \in \mathcal{G}$ .

- Dann sagt man, dass die Abbildung  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  ein *additives Funktional* ist, wenn  $f(\emptyset) = 0$  und

$$f(B_1 \cup B_2) = f(B_1) + f(B_2) - f(B_1 \cap B_2) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{G} \text{ mit } B_1 \cup B_2 \in \mathcal{G}. \quad (70)$$

- Die Abbildung  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *vollständig additives Funktional*, wenn  $f(\emptyset) = 0$  und

$$f(B_1 \cup \dots \cup B_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) \right) \quad (71)$$

für beliebige  $n \geq 1$  und für beliebige  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{G}$  mit  $B_1 \cup \dots \cup B_n \in \mathcal{G}$ .

#### Beachte

- Man kann sich leicht überlegen, dass jedes additive Funktional  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  über dem Konvexring  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  gleichzeitig vollständig additiv ist, d.h., für jedes additive Funktional über  $\mathcal{R}$  gilt die *Siebformel* (71).

- Außerdem sagt man, dass die Abbildung  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  *bedingt beschränkt* ist, wenn

$$\sup\{|f(B')| : B' \in \mathcal{K}, B' \subset B\} < \infty \quad \forall B \in \mathcal{K}. \quad (72)$$

- Es ist klar, dass jedes lokalendliche Maß über der Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  (und eingeschränkt auf den Konvexring  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ) zu einem additiven Funktional über  $\mathcal{R}$  führt, das gleichzeitig bedingt beschränkt ist.
- Insbesondere hat die Einschränkung des  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes  $\nu_d : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  auf  $\mathcal{R}$  diese beiden Eigenschaften.

Wir führen nun den Begriff der inneren Volumina von konvexen Körpern mit Hilfe des folgenden *Satzes von Steiner* ein.

**Theorem 6.9** Für jedes  $B \in \mathcal{K}$  gibt es Zahlen  $V_0(B), \dots, V_{d-1}(B) \geq 0$ , so dass

$$\nu_d(B \oplus B(o, r)) = \nu_d(B) + \sum_{j=0}^{d-1} r^{d-j} \kappa_{d-j} V_j(B) \quad \forall r \geq 0, \quad (73)$$

wobei  $\kappa_i$  das  $i$ -dimensionale Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^i$  bezeichnet, d.h.,  $\kappa_i = \pi^{i/2} / \Gamma(1+i/2)$  mit  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$  für jedes  $x > 0$  und  $\Gamma(0) = 1$  bzw.  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

### Beachte

- Gemäß Theorem 6.9 lässt sich das Volumen  $\nu_d(B \oplus B(o, r))$  der „Parallelmenge“  $B \oplus B(o, r)$  als Polynom von  $r$  der Ordnung  $d$  mit nichtnegativen Koeffizienten  $V_0(B), \dots, V_{d-1}(B), \nu_d(B) \geq 0$  darstellen, die nur von  $B$ , jedoch nicht von  $r$  abhängen.
- Die Koeffizienten  $V_0(B), \dots, V_{d-1}(B)$  in der Reihenentwicklung (73) werden die *inneren Volumina* des konvexen Körpers  $B \in \mathcal{K}$  genannt.
- Anstelle der inneren Volumina  $V_0(B), \dots, V_{d-1}(B)$  werden in der Literatur manchmal auch die Größen  $W_1(B), \dots, W_d(B)$  mit

$$W_j(B) = \frac{\kappa_j}{\binom{d}{j}} V_{d-j}(B) \quad \forall B \in \mathcal{K}, \quad j = 1, \dots, d \quad (74)$$

betrachtet, die die *Minkowski-Funktionale* von  $B$  genannt werden.

- Für die inneren Volumina  $V_{d-1}(B)$  und  $V_1(B)$  gibt es einfache geometrische Interpretationen:
  - Aus (73) ergibt sich, dass für jedes  $B \in \mathcal{K}$

$$2V_{d-1}(B) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left( \nu_d(B \oplus B(o, r)) - \nu_d(B) \right), \quad (75)$$

d.h., die Größe  $2V_{d-1}(B)$  lässt sich als die „Oberfläche“ von  $B$  auffassen.

- Darüber hinaus kann man zeigen, dass für jedes  $B \in \mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$

$$V_1(B) = \frac{d \kappa_d}{2 \kappa_{d-1}} \beta(B). \quad (76)$$

- Dabei ist  $\beta(B)$  die *mittlere Breite* von  $B$ , d.h., der Mittelwert der Abstände zweier paralleler Stützhyperbenen von  $B$ , der gegeben ist durch

$$\beta(B) = \int_{\partial B(o,1)} (h_B(u) + h_B(-u)) P_U(du) \quad \left( = 2 \int_{\partial B(o,1)} h_B(u) P_U(du) \right),$$

wobei  $P_U$  die Gleichverteilung auf der Sphäre  $\partial B(o, 1)$  und  $h_B : \partial B(o, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$h_B(u) = \max\{\langle x, u \rangle : x \in B\}$$

die *Stützfunktion* von  $B$  bezeichnet;  $\langle x, u \rangle = \sum_{i=1}^d x_i u_i$ .

- Für die folgenden Beispiele von konvexen Körpern  $B \subset \mathbb{R}^3$  läßt sich die mittlere Breite  $\beta(B)$  explizit bestimmen:

$$\beta(B) = \begin{cases} 2r, & \text{wenn } B \text{ eine Kugel mit Radius } r \text{ ist,} \\ \frac{1}{2}(a+b+c), & \text{wenn } B \text{ ein Quader mit den Seitenlängen } a, b, c \text{ ist,} \\ \frac{a}{2}, & \text{wenn } B \text{ ein Segment der Länge } a \text{ ist,} \\ \frac{1}{2}(h + \pi r) & \text{wenn } B \text{ ein Zylinder mit Höhe } h \text{ und Radius } r \text{ der Grundfläche ist,} \\ \frac{\pi}{2} r, & \text{wenn } B \text{ eine Kreisscheibe mit Radius } r \text{ ist,} \end{cases}$$

Wenn  $B \in \mathcal{K}$  ein Polyeder ist, dann gilt

$$\beta(B) = \frac{1}{4\pi} \sum_i l_i \theta_i,$$

wobei  $l_i$  die Länge der  $i$ -ten Kante ist und  $\theta_i$  den Winkel zwischen den Normalen der Flächen bezeichnet, die sich in der  $i$ -ten Kante schneiden;  $0 < \theta_i < \pi$ .

- Außerdem gilt für jedes  $B \in \mathcal{K}$

$$V_0(B) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } B \neq \emptyset, \\ 0, & \text{wenn } B = \emptyset, \end{cases} \quad (77)$$

denn aus der Steiner-Formel (73) in Theorem 6.9 ergibt sich im ersten Fall, d.h., wenn  $B \neq \emptyset$  und  $B \subset B(o, r_0)$  für ein  $r_0 > 0$ , dass

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(B(o, r))}{r^d \kappa_d} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(B \oplus B(o, r))}{r^d \kappa_d} \stackrel{(73)}{=} V_0(B) \\ &\stackrel{(73)}{\leq} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(B(o, r_0) \oplus B(o, r))}{r^d \kappa_d} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(B(o, r_0 + r))}{r^d \kappa_d} = 1, \end{aligned}$$

und im zweiten Fall, d.h., wenn  $B = \emptyset$ , ergibt sich aus (73), dass

$$V_0(B) \stackrel{(73)}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(B \oplus B(o, r))}{r^d \kappa_d} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(\emptyset)}{r^d \kappa_d} = 0.$$

- Für die inneren Volumina  $V_0(B(o, 1)), \dots, V_{d-1}(B(o, 1))$  der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel ergibt sich aus (73), dass

$$V_j(B(o, 1)) = \binom{d}{j} \frac{\kappa_d}{\kappa_{d-j}}. \quad (78)$$

- Für beliebige  $r \geq 0$  und  $B \in \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$  gilt also

$$\nu_d(B \oplus B(o, r)) = \begin{cases} \nu_2(B) + 2V_1(B)r + \pi r^2, & \text{wenn } d = 2, \\ \nu_3(B) + 2V_2(B)r + \pi V_1(B)r^2 + \frac{4\pi}{3}r^3, & \text{wenn } d = 3, \end{cases} \quad (79)$$

wobei zu beachten ist, dass für  $\text{int } B = \emptyset$  die „Oberfläche“  $2V_1(B)$  für  $d = 2$  bzw.  $2V_2(B)$  für  $d = 3$  gleich der doppelten Länge der Strecke  $B$  in  $\mathbb{R}^2$  bzw. gleich dem doppelten Flächeninhalt des planaren konvexen Flächenstückes  $B$  in  $\mathbb{R}^3$  ist.

Mit Hilfe von Theorem 6.9 kann man zeigen, dass die inneren Volumina von konvexen Körpern eine Reihe von weiteren nützlichen Eigenschaften besitzen.

**Korollar 6.4** Sei  $j \in \{0, \dots, d-1\}$  und sei  $V_j(B)$  das in (73) gegebene  $j$ -te innere Volumen des konvexen Körpers  $B \in \mathcal{K}$ .

- Dann ist die Abbildung  $V_j : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$  additiv, bewegungsinvariant, stetig, monoton wachsend (bezüglich der Inklusion) und lokal beschränkt.
- Außerdem ist  $V_j : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$  homogen vom Grade  $j$ , d.h., es gilt

$$V_j(cB) = c^j V_j(B) \quad \forall c \geq 0, B \in \mathcal{K}. \quad (80)$$

### Beweis

- Unmittelbar aus der Definition des Lebesgue–Maßes  $\nu_d$  ergibt sich, dass die Abbildung  $\nu_d : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$ , d.h. die Einschränkung von  $\nu_d : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  auf die Familie  $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  der konvexen Körper in  $\mathbb{R}^d$ , additiv, bewegungsinvariant, d.h. invariant bezüglich beliebiger Verschiebungen bzw. Drehungen um den Nullpunkt, monoton wachsend und lokal beschränkt ist.
- Außerdem kann man sich mit Hilfe von (16) leicht überlegen, dass  $\nu_d : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$  stetig in  $\mathcal{K}$  (bezüglich der Hausdorff–Metrik) ist, denn für jedes  $B \in \mathcal{K}$  gilt

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} B \oplus B(o, \varepsilon) = B \quad \text{und somit} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \nu_d(B \oplus B(o, \varepsilon)) = \nu_d(B).$$

- Wir zeigen nun zunächst, dass die Abbildung  $V_j : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$  für jedes  $j \in \{0, \dots, d-1\}$  additiv ist.
  - Aus der Additivität von  $\nu_d : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$  ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \nu_d((B_1 \cup B_2) \oplus B(o, r)) &= \nu_d((B_1 \oplus B(o, r)) \cup (B_2 \oplus B(o, r))) \\ &= \nu_d(B_1 \oplus B(o, r)) + \nu_d(B_2 \oplus B(o, r)) \\ &\quad - \nu_d((B_1 \oplus B(o, r)) \cap (B_2 \oplus B(o, r))) \\ &= \nu_d(B_1 \oplus B(o, r)) + \nu_d(B_2 \oplus B(o, r)) - \nu_d((B_1 \cap B_2) \oplus B(o, r)) \end{aligned}$$

für beliebige  $r \geq 0$  und  $B_1, B_2 \in \mathcal{K}$  mit  $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{K}$ .

- Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (73), dass für jedes  $r \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \nu_d((B_1 \cup B_2) \oplus B(o, r)) - \nu_d(B_1 \oplus B(o, r)) - \nu_d(B_2 \oplus B(o, r)) + \nu_d((B_1 \cap B_2) \oplus B(o, r)) \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} r^{d-j} \kappa_{d-j} \left( V_j(B_1 \cup B_2) - V_j(B_1) - V_j(B_2) + V_j(B_1 \cap B_2) \right). \end{aligned}$$

- Dies ist jedoch nur dann möglich, wenn  $V_j(B_1 \cup B_2) = V_j(B_1) + V_j(B_2) - V_j(B_1 \cap B_2)$  für jedes  $j \in \{0, \dots, d-1\}$  gilt.

- Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass die Abbildung  $V_j : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$  für jedes  $j \in \{0, \dots, d-1\}$  bewegungsinvariant, stetig, monoton wachsend und lokal beschränkt ist.
- Um die Gültigkeit von (80) zu zeigen, genügt es zu beachten, dass die Abbildung  $\nu_d : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$  homogen vom Grade  $d$  ist und dass somit

$$\nu_d(cB \oplus B(o, r)) = \nu_d(c(B \oplus B(o, r/c))) = c^d \nu_d(B \oplus B(o, r/c)) \quad \forall c, r > 0, B \in \mathcal{K}.$$

- Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (73), dass

$$0 = \sum_{j=0}^{d-1} r^{d-j} \kappa_{d-j} \left( V_j(cB) - c^j V_j(B) \right) \quad \forall c, r > 0$$

und somit  $V_j(cB) = c^j V_j(B)$  für jedes  $c > 0$ .

- Auf ähnliche Weise ergibt sich für  $c = 0$ , dass  $V_j(cB) = 0 = c^j V_j(B)$  für jedes  $j \in \{1, \dots, d-1\}$  und

$$V_0(cB) = V(\{o\}) = 1 = c^0 V_0(B), \quad \text{wenn } B \neq \emptyset,$$

bzw.

$$V_0(cB) = V(\emptyset) = 0 = c^0 V_0(B), \quad \text{wenn } B = \emptyset. \quad \square$$

Außerdem kann man zeigen, dass durch Linearkombinationen der inneren Volumina von konvexen Körpern eine große Klasse von additiven Funktionalen erfasst wird. Dies beruht auf der folgenden Eigenschaft der inneren Volumina, die in der Literatur der *Satz von Hadwiger* genannt wird.

### Theorem 6.10

- Für jede additive, bewegungsinvariante und stetige Abbildung  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt es Konstanten  $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ , so dass

$$f(B) = a_d \nu_d(B) + \sum_{j=0}^{d-1} a_j V_j(B) \quad \forall B \in \mathcal{K}. \quad (81)$$

- Wenn die Abbildung  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  additiv, bewegungsinvariant und monoton bezüglich der Inklusion ist, dann können die Konstanten  $a_0, \dots, a_d$  in der Darstellungsformel (81) so gewählt werden, dass  $a_0, \dots, a_d \geq 0$ .

### Beachte

- Eine für Anwendungen sehr nützliche Eigenschaft der in (73) eingeführten Funktionale  $V_j : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  besteht darin, dass sie sich additiv auf dem Konvexring  $\mathcal{R}$  fortsetzen lassen.
  - Dabei gilt für jedes  $j \in \{0, \dots, d-1\}$

$$V_j(B) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} V_j(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) \right) \quad \forall B \in \mathcal{R}, \quad (82)$$

wobei  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{K}$  eine beliebige Zerlegung der (Vereinigungs-) Menge  $B = B_1 \cup \dots \cup B_n \in \mathcal{R}$  in konvexe Komponenten ist.

- Insbesondere kann man zeigen, dass der Wert  $V_j(B)$  in (82) nicht von der spezifischen Wahl der Zerlegung  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{K}$  abhängt.
- Für  $j \in \{0, \dots, d-2\}$  können die Funktionale  $V_j : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auch negative Werte annehmen, während  $V_{d-1}(B) \geq 0$  für jedes  $B \in \mathcal{R}$  gilt.
- Um geometrische Interpretationen für die Funktionale  $V_j : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  angeben zu können, benötigen wir den Begriff des Hausdorff-Maßes von Teilmengen in  $\mathbb{R}^d$ .
  - Für beliebige  $\delta > 0$ ,  $B \subset \mathbb{R}^d$  und  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  sagt man, dass  $B_1, B_2, \dots$  eine  $\delta$ -Überdeckung von  $B$  ist, wenn

$$\sup_{i=1,2,\dots} \text{diam}(B_i) \leq \delta \quad \text{und} \quad B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

wobei  $\text{diam}(C) = \sup\{|x - y| : x, y \in C\}$  den Durchmesser der Menge  $C \subset \mathbb{R}^d$  bezeichnet.

- Für beliebige  $s \geq 0$  und  $B \subset \mathbb{R}^d$  heißt dann die Größe  $\tilde{\nu}_s(B)$  mit

$$\tilde{\nu}_s(B) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \nu_d^s(B_i) : B_1, B_2, \dots \text{ ist } \delta\text{-Überdeckung von } B \right\}$$

das  $s$ -dimensionale Hausdorff-Maß von  $B$ .

- Zusätzlich zu den oben erwähnten geometrischen Eigenschaften der inneren Volumina  $V_{d-1}(B)$  und  $V_1(B)$  von konvexen Körpern  $B \in \mathcal{K}$  lassen sich die folgenden Eigenschaften der Funktionale  $V_j : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  herleiten.

– Für jedes  $B \in \mathcal{R}$  mit  $\text{cl}(\text{int } B) = B$  gilt

$$V_{d-1}(B) = \frac{1}{2} \tilde{\nu}_{d-1}(\partial B),$$

wobei  $\tilde{\nu}_{d-1}(\partial B)$  das  $(d-1)$ -dimensionale Hausdorff-Maß des „Randes“  $\partial B \subset \mathbb{R}^d$  von  $B$  bezeichnet, d.h.,  $2V_{d-1}(B)$  kann als die „Oberfläche“ der Menge  $B \in \mathcal{R}$  angesehen werden. Für  $d = 2$  ist  $2V_1(B)$  die *Randlänge* von  $B$ , und für  $d = 3$  ist  $2V_1(B)$  die gewöhnliche *Oberfläche* von  $B$ .

– Wenn  $B \in \mathcal{R}$  die Vereinigung von  $j$ -dimensionalen konvexen Körpern für ein  $j \in \{0, \dots, d-1\}$  ist, dann gilt

$$V_j(B) = \tilde{\nu}_j(B),$$

d.h.,  $V_j(B)$  ist das  $j$ -dimensionale Hausdorff-Maß von  $B$ .

– Mit Hilfe von (77) und (82) ergibt sich, dass  $V_0(B)$  die *Anzahl der Zusammenhangskomponenten* von  $B \in \mathcal{R}$  ist, wenn sämtliche Zusammenhangskomponenten von  $B$  konvexe Mengen sind. Für  $d = 2$  kann man sich leicht überlegen, dass  $V_0(B)$  die Differenz aus der Anzahl der Zusammenhangskomponenten minus die Anzahl der „Löcher“ von  $B \in \mathcal{R}$  ist.

### 6.3.2 Intensitäten der inneren Volumina von stationären ZAM

- In diesem Abschnitt diskutieren wir den Begriff der Intensität der inneren Volumina von stationären ZAM, deren Realisierungen mit Wahrscheinlichkeit 1 Mengen aus dem erweiterten Konvexring  $\mathcal{S}$  sind.
- Dabei verwenden wir die folgende Kurzschreibweise: Für jedes  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d$  sei

$$[z, z+1] = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : z_i \leq x_i \leq z_i + 1, i = 1, \dots, d\},$$

und sei

$$\partial^+[z, z+1] = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in [z, z+1] : \max_{i: 1 \leq i \leq d} x_i = z_j + 1 \text{ für ein } j = 1, \dots, d\}$$

der „rechte obere Rand“ des Würfels  $[z, z+1]$ , wobei man sich leicht überlegen kann, dass  $\partial^+[z, z+1] \in \mathcal{R}$ .

Wir zeigen zunächst den folgenden Hilfssatz.

**Lemma 6.10** *Sei  $B \in \mathcal{K}$  mit  $\nu_d(B) > 0$ . Für jedes additive, translationsinvariante und bedingt beschränkte Funktional  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt dann*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(rB)}{\nu_d(rB)} = f([0, 1]^d) - f(\partial^+[0, 1]^d). \quad (83)$$

**Beweis**

- Aus der Additivität von  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ergibt sich, dass für jedes  $B \in \mathcal{K}$

$$f(B) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \left( f(B \cap [z, z+1]) - f(B \cap \partial^+[z, z+1]) \right). \quad (84)$$

- Wir zeigen die Gültigkeit von (84) nur für  $d = 2$ , denn für beliebige  $d \geq 2$  verläuft der Beweis analog.

– Dabei betrachten wir für jede ganze Zahl  $z \in \mathbb{Z}$  den „Streifen“

$$C_z^{(i)} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : z \leq x_i \leq z+1\} \quad i = 1, 2.$$

– Dann ergibt sich aus der Additivität von  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dass für jedes  $B \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned} f(B) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}} f(B \cap C_z^{(1)}) - \sum_{z \in \mathbb{Z}} f(B \cap C_z^{(1)} \cap C_{z+1}^{(1)}) \\ &= \sum_{z, z' \in \mathbb{Z}} f(B \cap C_z^{(1)} \cap C_{z'}^{(2)}) - \sum_{z, z' \in \mathbb{Z}} f(B \cap C_z^{(1)} \cap C_{z'}^{(2)} \cap C_{z'+1}^{(2)}) - \sum_{z \in \mathbb{Z}} f(B \cap C_z^{(1)} \cap C_{z+1}^{(1)}) \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} f(B \cap [z, z+1]) - \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} f(B \cap \partial^+[z, z+1]). \end{aligned}$$

- Wir führen nun zwei Teilmengen des  $d$ -dimensionalen Gitters  $\mathbb{Z}^d$  ein:

$$\mathbb{Z}_{r,1}^d = \{z \in \mathbb{Z}^d : rB \cap [z, z+1] \neq \emptyset, [z, z+1] \not\subset rB\}$$

und  $\mathbb{Z}_{r,2}^d = \{z \in \mathbb{Z}^d : [z, z+1] \subset rB\}$ , wobei wir (o.B.d.A.) annehmen, dass  $o \in \text{int } B$ .

– Dann kann man sich leicht überlegen, dass es Konstanten  $r_0, r'_0 > 0$  gibt, so dass für jedes  $r > r_0$

$$\bigcup_{z \in \mathbb{Z}_{r,1}^d} [z, z+1] \subset \left( (rB \ominus B(o, \sqrt{d})) \oplus B(o, r'_0) \right) \setminus \left( rB \ominus B(o, \sqrt{d}) \right)$$

und

$$rB \ominus B(o, \sqrt{d}) \subset \bigcup_{z \in \mathbb{Z}_{r,2}^d} [z, z+1] \subset rB.$$

– Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Steiner-Formel (73) und der Monotonie- bzw. Homogenitätseigenschaften der inneren Volumina von konvexen Körpern (vgl. Korollar 6.4), dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu_d \left( \bigcup_{z \in \mathbb{Z}_{r,1}^d} [z, z+1] \right)}{\nu_d(rB)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mathbb{Z}_{r,1}^d|}{\nu_d(rB)} = 0 \quad (85)$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu_d \left( \bigcup_{z \in \mathbb{Z}_{r,2}^d} [z, z+1] \right)}{\nu_d(rB)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mathbb{Z}_{r,2}^d|}{\nu_d(rB)} = 1, \quad (86)$$

wobei  $|\mathbb{Z}_{r,i}^d|$  die Anzahl der Gitterpunkte in  $\mathbb{Z}_{r,i}^d$  bezeichnet.

- Aus der Annahme, dass die Abbildung  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  translationsinvariant und bedingt beschränkt ist, ergibt sich dann mit Hilfe von (84), dass

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(rB)}{\nu_d(rB)} - \left( f([0, 1]^d) - f(\partial^+[0, 1]^d) \right) \right| \\ & \stackrel{(86)}{=} \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(rB)}{\nu_d(rB)} - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mathbb{Z}_{r,2}^d|}{\nu_d(rB)} \left( f([0, 1]^d) - f(\partial^+[0, 1]^d) \right) \right| \\ & \stackrel{\text{Translationsinv.}}{=} \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(rB)}{\nu_d(rB)} - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(rB)} \sum_{z \in \mathbb{Z}_{r,2}^d} \left( f(rB \cap [z, z+1]) - f(rB \cap \partial^+[z, z+1]) \right) \right| \\ & \stackrel{(84)}{=} \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(rB)} \sum_{z \in \mathbb{Z}_{r,1}^d} \left( f(rB \cap [z, z+1]) - f(rB \cap \partial^+[z, z+1]) \right) \right| \\ & \leq c \left( 1 + 2^{N(\partial^+[0, 1]^d)} \right) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mathbb{Z}_{r,1}^d|}{\nu_d(rB)} \stackrel{(85)}{=} 0, \end{aligned}$$

wobei  $N(\partial^+[0, 1]^d)$  die minimale Anzahl von konvexen Zerlegungskomponenten von  $\partial^+[0, 1]^d \in \mathcal{R}$  ist und  $c < \infty$  eine Konstante ist, die nicht von  $B$  abhängt.

- Denn für beliebige  $B \in \mathcal{K}$  und  $z \in \mathbb{Z}_{r,1}^d$  ergibt sich aus der Translationsinvarianz von  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und aus der Siebformel (71), dass

$$\begin{aligned}
& \left| f(rB \cap [z, z+1]) - f(rB \cap \partial^+[z, z+1]) \right| \\
& \leq |f(rB \cap [z, z+1])| + |f(rB \cap \partial^+[z, z+1])| \\
& \stackrel{\text{Translationsinvarianz}}{=} |f((rB - z) \cap [0, 1]^d)| + |f((rB - z) \cap \partial^+[0, 1]^d)| \\
& \stackrel{(71)}{=} |f((rB - z) \cap [0, 1]^d)| \\
& \quad + \left| \sum_{k=1}^{N(\partial^+[0,1]^d)} (-1)^{k-1} \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N(\partial^+[0,1]^d)} f((rB - z) \cap B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) \right) \right|,
\end{aligned}$$

wobei  $B_1, \dots, B_{N(\partial^+[0,1]^d)} \in \mathcal{K}$  eine Folge von konvexen Körpern ist mit

$$\partial^+[0, 1]^d = \bigcup_{i=1}^{N(\partial^+[0,1]^d)} B_i \quad \text{und} \quad B_i \subset [0, 1]^d \quad \forall i \in \{1, \dots, N(\partial^+[0, 1]^d)\}.$$

- Hieraus ergibt sich, dass

$$\left| f(rB \cap [z, z+1]) - f(rB \cap \partial^+[z, z+1]) \right| \leq c \left( 1 + \sum_{k=1}^{N(\partial^+[0,1]^d)} \binom{N(\partial^+[0,1]^d)}{k} \right) \leq c \left( 1 + 2^{N(\partial^+[0,1]^d)} \right),$$

wobei sich die vorletzte Ungleichung aus der bedingten Beschränktheit von  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ergibt.  $\square$

Das folgende Resultat bildet die Grundlage, um den Begriff der Intensität der inneren Volumina von stationären ZAM einführen zu können, deren Realisierungen mit Wahrscheinlichkeit 1 Mengen aus dem erweiterten Konvexring  $\mathcal{S}$  sind.

- In Verallgemeinerung der Schreibweise, die im Beweis von Lemma 6.10 verwendet worden ist, sei dabei  $N(B)$  die minimale Anzahl von konvexen Zerlegungskomponenten der Menge  $B \in \mathcal{R}$ , d.h.

$$N(B) = \min\{k : B = B_1 \cup \dots \cup B_k, B_1, \dots, B_k \in \mathcal{K}\}.$$

- Ähnlich wie in Lemma 6.4 kann man zeigen, dass  $\{B \in \mathcal{R} : N(B) = k\} \in \sigma_{\mathcal{F}}$  für jedes  $k \in \{1, 2, \dots\}$  gilt, wobei  $\sigma_{\mathcal{F}}$  die in (7) definierte Schnitt- $\sigma$ -Algebra ist.
- Hieraus ergibt sich insbesondere, dass die Abbildung  $N(\Xi \cap B) : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$  mit

$$N(\Xi \cap B)(\omega) = N(\Xi(\omega) \cap B) \quad \forall \omega \in \Omega$$

für jede ZAM  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  und für jedes  $B \in \mathcal{R}$  eine wohldefinierte (messbare) Zufallsvariable ist.

### Theorem 6.11

- Sei  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$  eine stationäre ZAM, so dass

$$\mathbb{E} 2^{N(\Xi \cap [0,1]^d)} < \infty, \tag{87}$$

und sei  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein additives, translationsinvariantes, messbares und bedingt beschränktes Funktional.

- Dann existiert der Grenzwert

$$\lambda_f = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} f(rB \cap \Xi)}{\nu_d(rB)} \quad (88)$$

für jedes  $B \in \mathcal{K}$  mit  $\nu_d(B) > 0$ , und es gilt

$$\lambda_f = \mathbb{E} \left( f(\Xi \cap [0, 1]^d) - f(\Xi \cap \partial^+[0, 1]^d) \right), \quad (89)$$

d.h. insbesondere, dass der Grenzwert  $\lambda_f$  in (88) nicht von der Wahl des konvexen Körpers  $B \in \mathcal{K}$  abhängt.

### Beweis

- Auf die gleiche Weise wie im Beweis von Lemma 6.10 ergibt sich, dass

$$\mathbb{E} |f(\Xi \cap B)| \leq c \mathbb{E} \sum_{k=1}^{N(\Xi \cap B)} \binom{N(\Xi \cap B)}{k} \leq c \mathbb{E} 2^{N(\Xi \cap B)} \leq c \mathbb{E} 2^{N(\Xi \cap [0, 1]^d)} \stackrel{(87)}{<} \infty \quad (90)$$

für jedes  $B \in \mathcal{K}$  mit  $B \subset [0, 1]^d$ , wobei die Konstante  $c < \infty$  nicht von  $B$  abhängt.

- Mit Hilfe der Siebformel (71) ergibt sich nun hieraus die Gültigkeit von  $\mathbb{E} |f(\Xi \cap B)| < \infty$  für jedes  $B \in \mathcal{R}$ .
- Das Funktional  $\bar{f} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\bar{f}(B) = \mathbb{E} f(\Xi \cap B) \quad \forall B \in \mathcal{R} \quad (91)$$

ist also wohldefiniert, und es besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Weil  $f$  und der Erwartungswert–Operator additiv sind, ist auch das in (91) eingeführte Funktional  $\bar{f} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  additiv.
- Aus der Stationarität der ZAM  $\Xi$  ergibt sich, dass  $\bar{f}$  translationsinvariant ist.
- Außerdem ergibt sich aus (90) mit Hilfe der Siebformel (71) und der Translationsinvarianz von  $\bar{f}$ , dass  $f$  bedingt beschränkt ist.
- Das in (91) eingeführte Funktional  $\bar{f} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  genügt also den Bedingungen von Lemma 6.10.
- Somit ergibt sich aus Lemma 6.10, dass der Grenzwert  $\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{f}(rB)/\nu_d(rB)$  existiert und dass

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} f(rB \cap \Xi)}{\nu_d(rB)} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}(rB)}{\nu_d(rB)} = \bar{f}([0, 1]^d) - \bar{f}(\partial^+[0, 1]^d) \\ &= \mathbb{E} \left( f(\Xi \cap [0, 1]^d) - f(\Xi \cap \partial^+[0, 1]^d) \right). \quad \square \end{aligned}$$

### Beachte

- Sei nun  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$  eine stationäre ZAM, die der Integrierbarkeitsbedingung (87) in Theorem 6.11 genügt.
- Von besonderem Interesse sind die Abbildungen  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $f = V_j$  für ein  $j \in \{0, \dots, d-1\}$ . In diesem Fall verwenden wir die Kurzschreibweise  $\lambda_j = \lambda_{V_j}$  und sagen, dass

$$\lambda_j = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} V_j(rB \cap \Xi)}{\nu_d(rB)} \quad \forall B \in \mathcal{K} \text{ mit } \nu_d(B) > 0 \quad (92)$$

das  $j$ -te spezifische innere Volumen bzw. kurz die  $j$ -Intensität der stationären ZAM  $\Xi$  ist.

- Dabei kann der Volumenanteil  $p = \mathbb{E} \nu_d(\Xi \cap [0, 1]^d)$  als die  $d$ -Intensität  $\lambda_d (= p)$  von  $\Xi$  aufgefasst werden, denn unmittelbar aus der Stationarität von  $\Xi$  ergibt sich mit der Schreibweise  $V_d = \nu_d$ , dass

$$\lambda_d = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} V_d(rB \cap \Xi)}{\nu_d(rB)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(rB) \mathbb{E} \nu_d(\Xi \cap [0, 1]^d)}{\nu_d(rB)} = p \quad \forall B \in \mathcal{K} \text{ mit } \nu_d(B) > 0.$$

- Wenn  $\Xi$  ein stationärer Punktprozess ist, dann gilt

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_d = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_0 = \mathbb{E} \# \{x \in \Xi \cap [0, 1]^d\},$$

d.h., die 0-Intensität  $\lambda_0$  von  $\Xi$  stimmt mit der gewöhnlichen Intensität des stationären Punktprozesses  $\Xi$  überein.

- Wenn  $\Xi$  das Skelett eines stationären Mosaiks in  $\mathbb{R}^2$  ist, dann kann man sich leicht überlegen, dass stets  $\lambda_2 = 0$  gilt, während  $\lambda_1$  die mittlere (Gesamt-) Kantenlänge pro Flächeneinheit und  $-\lambda_0$  die Intensität der Zell-Mittelpunkte ist (bzw. eines beliebigen Punktprozesses von *assozierten Punkten* der Zellen).
  - Insbesondere gilt  $\lambda_1 = 2\sqrt{\lambda}$  und  $\lambda_0 = -\lambda$ , wenn  $\Xi$  das Skelett eines Poisson-Voronoi-Mosaiks in  $\mathbb{R}^2$  ist, das durch einen homogenen Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$  generiert wird,
  - bzw.  $\lambda_1 = \lambda_\ell$  und  $\lambda_0 = -\frac{\lambda_\ell^2}{\pi}$ , wenn  $\Xi$  das Skelett eines Poissonschen Geradenmosaiks ist, das durch einen Poissonschen Geradenprozess im  $\mathbb{R}^2$  mit der Intensität  $\lambda_\ell$  erzeugt wird, vgl. auch Abschnitt 4.2.3.

### 6.3.3 Kinematische Hauptformel; Schätzung der $j$ -Intensitäten

- Aus der Darstellungsformel (89) der  $j$ -Intensitäten ergibt sich, dass für jedes  $j = 0, \dots, d-1$  die Zufallsvariable  $V_j(\Xi \cap [0, 1]^d) - V_j(\Xi \cap \partial^+[0, 1]^d)$  als ein erwartungstreuer Schätzer für die  $j$ -Intensität  $\lambda_j$  aufgefasst werden kann.
- Dies gilt auch für  $j = d$ , denn in diesem Fall gilt

$$V_d(\Xi \cap \partial^+[0, 1]^d) = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_d = p = \mathbb{E} V_d(\Xi \cap [0, 1]^d).$$

Ein anderer Ansatz zur (simultanen) Schätzung der  $j$ -Intensitäten  $\lambda_0, \dots, \lambda_d$  hängt mit dem Satz von Hadwiger zusammen (vgl. Theorem 6.10), wonach sich jedes additive, bewegungsinvariante und stetige Funktional  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als Linearkombination der Abbildungen  $V_0, \dots, V_d : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  darstellen lässt.

- Dabei betrachten wir additive, translationsinvariante, messbare und bedingt beschränkte Abbildungen  $f_0, \dots, f_d : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch eine  $(d+1) \times (d+1)$ -dimensionale Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  mit reellwertigen Eintragungen  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  als Linearkombinationen von  $V_0, \dots, V_d : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben sind, d.h., für jedes  $i \in \{0, \dots, d\}$  gilt

$$f_i(B) = \sum_{j=0}^d a_{ij} V_j(B) \quad \forall B \in \mathcal{R}. \quad (93)$$

- Wenn  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$  eine stationäre ZAM ist, die der Integrierbarkeitsbedingung (87) in Theorem 6.11 genügt, dann ergibt sich aus (93) das folgende Gleichungssystem:

$$\mu_i = \sum_{j=0}^d a_{ij} \lambda_j \quad i = 0, \dots, d, \quad (94)$$

wobei  $\mu_i = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} f_i(rB \cap \Xi) / \nu_d(rB)$ .

- Die Idee besteht nun darin, die Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  so zu wählen, dass  $\mathbf{A}$  invertierbar ist und dass die Größen  $\mu_0, \dots, \mu_d$  auf eine möglichst einfache Weise aus den vorhandenen Daten geschätzt werden können.
- Dann ist beispielsweise für jeden erwartungstreuen Schätzer  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = (\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_d)^\top$  für  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \dots, \mu_d)^\top$  gleichzeitig ein erwartungstreuer Schätzer  $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_d)^\top$  für  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_d)^\top$  gegeben, wobei

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{A}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}. \quad (95)$$

Das folgende Beispiel für eine Spezifizierung des allgemeinen Schätzansatzes in (95) beruht auf der *kinematischen Hauptformel* der Integralgeometrie, die wir ohne Beweis angeben. Weitere Details hierzu findet man beispielsweise in R. Schneider, W. Weil (1992) *Integralgeometrie*, Teubner, Stuttgart.

Dabei wird die Tatsache genutzt, dass jeder Drehung  $\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  des euklidischen Koordinatensystems in  $\mathbb{R}^d$  um den Nullpunkt genau ein Vektor  $\vartheta \in \partial B(o, 1)$  entspricht, d.h., für beliebige  $B \subset \mathbb{R}^d$  und  $\vartheta \in \partial B(o, 1)$  bezeichnet  $\vartheta B$  die um  $\delta = \delta(\vartheta)$  gedrehte Menge  $B$ .

**Lemma 6.11** *Für beliebige  $B, B' \in \mathcal{R}$  und  $j \in \{0, \dots, d\}$  gilt*

$$\int_{\partial B(o, 1)} \int_{\mathbb{R}^d} V_j(B \cap (\vartheta B' + x)) \, dx \, \tilde{\nu}(d\vartheta) = \sum_{k=j}^d \alpha_{dj k} V_k(B) V_{d+j-k}(B'), \quad (96)$$

wobei  $\tilde{\nu}(\cdot) = \tilde{\nu}_{d-1}(\cdot \cap \partial B(o, 1)) / \tilde{\nu}_{d-1}(\partial B(o, 1))$  die Gleichverteilung auf der Sphäre  $\partial B(o, 1)$  bezeichnet und

$$\alpha_{dj k} = \frac{k! \kappa_k (d+j-k)! \kappa_{d+j-k}}{j! \kappa_j d! \kappa_d}. \quad (97)$$

Mit Hilfe der kinematischen Hauptformel (96) in Lemma 6.11 lässt sich das folgende Resultat für ZAM  $\Xi$  mit Werten in  $\mathcal{S}$  herleiten, wobei vorausgesetzt wird, dass  $\Xi$  nicht nur stationär, sondern auch isotrop ist.

**Theorem 6.12**

- Sei  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$  eine stationäre und isotrope ZAM, die der Integrierbarkeitsbedingung (87) in Theorem 6.11 genügt.
- Dann gilt für jedes  $j \in \{0, \dots, d\}$

$$\mathbb{E} V_j(\Xi \cap B) = \sum_{k=j}^d \alpha_{dj k} \lambda_{d+j-k} V_k(B) \quad \forall B \in \mathcal{K}, \quad (98)$$

wobei  $\alpha_{dj k}$  die in (97) gegebenen Konstanten und  $\lambda_0, \dots, \lambda_d$  die in (92) eingeführten  $j$ -Intensitäten von  $\Xi$  sind.

**Beweis**

- Ähnlich wie im Beweis von Theorem 6.11 kann man sich überlegen, dass für beliebige  $j \in \{0, \dots, d\}$ ,  $r > 0$  und  $B \in \mathcal{K}$  die Abbildung

$$(x, \vartheta, \omega) \mapsto V_j(\Xi(\omega) \cap \vartheta B \cap B(x, r))$$

$(\nu_d \otimes \tilde{\nu} \otimes P)$ -integrierbar ist.

- Mit Hilfe des Satzes von Fubini über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge ergibt sich nun aus den Invarianzeigenschaften der Abbildungen  $V_j$  und  $\Xi$  bzw. des Lebesgue-Maßes  $\nu_d$ , dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{\partial B(o, 1)} \int_{\mathbb{R}^d} V_j(\Xi \cap B \cap (\vartheta B(o, 1) + x)) \, dx \, \tilde{\nu}(d\vartheta) \\ &= \mathbb{E} \int_{\partial B(o, 1)} \int_{\mathbb{R}^d} V_j(\Xi \cap B \cap B(x, 1)) \, dx \, \tilde{\nu}(d\vartheta) \\ & \quad \text{Satz von Fubini} \\ &= \int_{\partial B(o, 1)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} V_j(\Xi \cap B \cap B(x, 1)) \, dx \, \tilde{\nu}(d\vartheta) \\ & \quad \text{Bewegungsinvarianz von } V_j \text{ und } \Xi \\ &= \int_{\partial B(o, 1)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} V_j(\Xi \cap (\vartheta B - \vartheta\{x\}) \cap B(o, 1)) \, dx \, \tilde{\nu}(d\vartheta) \\ & \quad \text{Bewegungsinvarianz von } \nu_d \\ &= \int_{\partial B(o, 1)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} V_j(\Xi \cap (\vartheta B + x) \cap B(o, 1)) \, dx \, \tilde{\nu}(d\vartheta) \\ & \quad \text{Satz von Fubini} \\ &= \mathbb{E} \int_{\partial B(o, 1)} \int_{\mathbb{R}^d} V_j(\Xi \cap B(o, 1) \cap (\vartheta B + x)) \, dx \, \tilde{\nu}(d\vartheta). \end{aligned}$$

- Die Anwendung der kinematischen Hauptformel (96) auf die Integrale unter den Erwartungswerten des ersten und letzten Ausdruckes dieser Gleichungskette ergibt somit, dass für jedes  $r > 0$

$$\sum_{k=j}^d \alpha_{dj k} \mathbb{E} V_k(\Xi \cap B) V_{d+j-k}(B(o, r)) = \sum_{k=j}^d \alpha_{dj k} V_k(B) \mathbb{E} V_{d+j-k}(\Xi \cap B(o, r)). \quad (99)$$

- Weil  $\alpha_{djj} = 1$ , ergibt sich hieraus und aus der Homogenität der inneren Volumina (vgl. Korollar 6.4), dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} V_j(\Xi \cap B) &\stackrel{\text{Homogenität}}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V_d(B(o, r))} \sum_{k=j}^d \alpha_{dj k} \mathbb{E} V_k(\Xi \cap B) V_{d+j-k}(B(o, r)) \\ &\stackrel{(99)}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V_d(B(o, r))} \sum_{k=j}^d \alpha_{dj k} V_k(B) \mathbb{E} V_{d+j-k}(\Xi \cap B(o, r)) \\ &= \sum_{k=j}^d \alpha_{dj k} V_k(B) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V_d(B(o, r))} \mathbb{E} V_{d+j-k}(\Xi \cap B(o, r)) \\ &= \sum_{k=j}^d \alpha_{dj k} \lambda_{d+j-k} V_k(B). \quad \square \end{aligned}$$

**Korollar 6.5** Sei  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$  eine stationäre und isotrope ZAM, die der Integrierbarkeitsbedingung (87) genügt. Dann gilt für beliebige  $r > 0$

$$\mathbb{E} V_0(\Xi \cap B(o, r)) = \sum_{k=0}^d r^{d-k} \kappa_{d-k} \lambda_k. \quad (100)$$

**Beweis** Für  $j = 0$  und  $B = B(o, r)$  ergibt sich aus (97) und (98) mit Hilfe der Formel (78) für die inneren Volumina der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel  $B(o, 1)$ , dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} V_0(\Xi \cap B(o, r)) &\stackrel{(98)}{=} \sum_{k=0}^d \alpha_{d0 k} \lambda_{d-k} V_k(B(o, r)) \\ &\stackrel{(97)}{=} \sum_{k=0}^d \frac{k! \kappa_k (d-k)! \kappa_{d-k}}{d! \kappa_d} \lambda_{d-k} V_k(B(o, r)) \\ &\stackrel{(78)}{=} \sum_{k=0}^d \frac{k! \kappa_k (d-k)! \kappa_{d-k}}{d! \kappa_d} \lambda_{d-k} \binom{d}{k} \frac{r^k \kappa_d}{\kappa_{d-k}} \\ &= \sum_{k=0}^d r^{d-k} \kappa_{d-k} \lambda_k. \quad \square \end{aligned}$$

### Beachte

- Seien  $r_0, \dots, r_d > 0$  beliebige, paarweise verschiedene Zahlen. Dann ergibt sich aus (100) das lineare Gleichungssystem  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{A} \boldsymbol{\lambda}$ , wobei  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \dots, \mu_d)^\top$  und  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  gegeben sind durch

$$\mu_i = \mathbb{E} V_0(\Xi \cap B(o, r_i)), \quad a_{ij} = r_i^{d-j} \kappa_{d-j} \quad \forall i, j \in \{0, \dots, d\}. \quad (101)$$

- Man kann sich leicht überlegen, dass die in (101) gegebene Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  invertierbar ist und dass sich somit die folgende Darstellungsformel für den Vektor  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_d)^\top$  der  $j$ -Intensitäten ergibt:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\mu}. \quad (102)$$

## 6.4 Gewichtete Mittelwertschätzer für stationäre Zufallsfelder

- In diesem Abschnitt diskutieren wir (Güte-) Eigenschaften von Schätzern  $\widehat{\boldsymbol{\mu}} = (\widehat{\mu}_0, \dots, \widehat{\mu}_d)^\top$  für den Vektor  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \dots, \mu_d)^\top$  der „erwarteten“ lokalen Euler-Zahlen in (101),
  - wobei  $\mu_i = \mathbb{E} V_0(\Xi \cap B(o, r_i))$  für jedes  $i = 0, \dots, d$  und  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$  eine stationäre und isotrope ZAM ist, die der Integrierbarkeitsbedingung (87) genügt.
  - Wegen (102) kann dann  $\widehat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{A}^{-1} \widehat{\boldsymbol{\mu}}$  als ein Schätzer für den Vektor  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_d)^\top$  der  $j$ -Intensitäten von  $\Xi$  aufgefasst werden.
- Dabei nehmen wir an, dass die ZAM  $\Xi$  in einem (kompakten) Fenster  $W \in \mathcal{R}$  beobachtet wird.
  - Für jedes  $r \in (0, r_{\max}]$  mit  $r_{\max} = \max\{r_0, \dots, r_d\}$  betrachten wir den *gewichteten Scan-Schätzer*

$$\widehat{\mu}_W = \int_{\mathbb{R}^d} V_0(\Xi \cap W \cap B(x, r)) G_W(x) dx \quad (103)$$

für den Erwartungswert  $\mu = \mathbb{E} V_0(\Xi \cap B(o, r))$  des stationären Zufallsfeldes  $\{V_0(\Xi \cap B(x, r)), x \in \mathbb{R}^d\}$ ,

- wobei  $G_W : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  eine (messbare) Gewichtsfunktion ist, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} G_W(x) dx = 1. \quad (104)$$

- Beachte: Durch den in (103) betrachteten Ansatz und geeignet gewählte Gewichtsfunktionen  $G_W$  können *randkorrigierte Schätzer* für  $\mu$  konstruiert werden. Ein einfaches Beispiel hierfür ist das so genannte „Minus-Sampling“, wobei

$$G_W(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus (W \ominus B(o, r)). \quad (105)$$

- Unter gewissen Regularitätsbedingungen an  $W$  und  $G_W$ , die teilweise bereits in Abschnitt 3.2.4 betrachtet worden sind, leiten wir nun für eine allgemeine Klasse von stationären Zufallsfeldern Eigenschaften von Scan-Schätzern ihres Erwartungswertes her, wobei die Schätzer die in (103) gegebene Form besitzen.

### 6.4.1 Regularitätsbedingungen an Beobachtungsfenster und Gewichtsfunktion

- Bei der Analyse von mikroskopischen Bilddaten ist das Beobachtungsfenster  $W \subset \mathbb{R}^d$  typischerweise eine konvexe und kompakte Menge, d.h.  $W \in \mathcal{K}$ , wobei wir (o.B.d.A.) annehmen, dass  $o \in \text{int } W$  und somit  $\nu_d(W) > 0$ .
  - Im Zusammenhang mit der Herleitung von asymptotischen Eigenschaften von Schätzern betrachten wir eine (unbegrenzt wachsende) Folge  $W_1, W_2, \dots \in \mathcal{K}$  von Beobachtungsfenstern, die sich zum Beispiel durch Skalierung von  $W$  ergeben kann, d.h., wir setzen dann  $W_n = nW$  für jedes  $n \geq 1$ .
  - In diesem Fall kann man sich leicht überlegen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(\partial W_n \oplus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} = 0 \quad \forall r > 0,$$

denn es gilt  $\nu_d(W_n) = n^d \nu_d(W) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  und

$$\begin{aligned} \frac{\nu_d(\partial W_n \oplus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} &\leq \frac{\nu_d(W_n \oplus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} - \frac{\nu_d(W_n \ominus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} \\ &\leq \frac{\nu_d(W \oplus B(o, r/n))}{\nu_d(W)} - \frac{\nu_d(W \ominus B(o, r/n))}{\nu_d(W)} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

- Bei der Analyse von makroskopisch–geographischen Bilddaten ist das Beobachtungsfenster  $W \subset \mathbb{R}^d$  jedoch in vielen Fällen nicht konvex, sondern die Vereinigung von (endlich vielen) konvexen und kompakten Mengen, d.h.  $W \in \mathcal{R}$ .

Wir führen deshalb den folgenden allgemeinen Begriff ein.

**Definition** Sei  $W_1, W_2, \dots \in \mathcal{R}$  eine Folge von (kompakten) Teilmengen in  $\mathbb{R}^d$ . Dann sagt man, dass  $\{W_n\}$  eine *mittelnde Folge* von Beobachtungsfenstern ist, wenn  $W_1 \subset W_2 \subset \dots$  und  $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i = \mathbb{R}^d$ , so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{r' \geq 0 : B(o, r') \subset W_n\} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(\partial W_n \oplus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} = 0 \quad \forall r > 0. \quad (106)$$

Wir diskutieren nun zunächst einige nützliche Eigenschaften von mittelnden Folgen.

### Lemma 6.12

- Sei  $W_1, W_2, \dots \in \mathcal{R}$  eine Folge von Teilmengen in  $\mathbb{R}^d$  mit  $W_1 \subset W_2 \subset \dots$  und  $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i = \mathbb{R}^d$ , so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{r' \geq 0 : B(o, r') \subset W_n\} = \infty.$$

- Die Mengen  $W_1, W_2, \dots$  bilden genau dann eine mittelnde Folge, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \oplus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \ominus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} = 1 \quad \forall r > 0. \quad (107)$$

- Sei  $\mathbb{Z}_{n,1}^d = \{z \in \mathbb{Z}^d : W_n \cap [z, z+1] \neq \emptyset\}$  und  $\mathbb{Z}_{n,2}^d = \{z \in \mathbb{Z}^d : [z, z+1] \subset W_n\}$ . Wenn  $\{W_n\}$  eine mittelnde Folge ist, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{Z}_{n,2}^d| = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathbb{Z}_{n,2}^d|}{|\mathbb{Z}_{n,1}^d|} = 1, \quad (108)$$

wobei  $|\mathbb{Z}_{n,i}^d|$  die Anzahl der Gitterpunkte in  $\mathbb{Z}_{n,i}^d$  bezeichnet.

### Beweis

- Sei  $\{W_n\}$  eine mittelnde Folge.
  - Weil  $W_n \setminus (\partial W_n \oplus B(o, r)) \subset W_n \ominus B(o, r)$  für beliebige  $n \geq 1$  und  $r > 0$ , ergibt sich dann aus (106), dass

$$\begin{aligned} 1 &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \ominus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \ominus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} \\ &\geq 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(\partial W_n \oplus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} \stackrel{(106)}{=} 1. \end{aligned}$$

- Weil außerdem  $W_n \oplus B(o, r) = (W_n \ominus B(o, r)) \cup (\partial W_n \oplus B(o, r))$  für beliebige  $n \geq 1$  und  $r > 0$ , ergibt sich hieraus und aus (106), dass

$$\begin{aligned} 1 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \oplus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \oplus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \ominus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(\partial W_n \oplus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} = 1. \end{aligned}$$

- Umgekehrt ergibt sich aus (107), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n(\partial W_n \oplus B(o, r))}{\nu_d(W_n)} = 0,$$

weil  $\partial W_n \oplus B(o, r) \subset (W_n \oplus B(o, r)) \setminus (W_n \oplus B(o, r + \varepsilon))$  für beliebige  $n \geq 1$  und  $r, \varepsilon > 0$ .

- Sei nun  $\{W_n\}$  erneut eine mittelnde Folge.

- Weil  $W_n \oplus B(o, \sqrt{d}) \subset \bigcup_{z \in \mathbb{Z}_{n,2}^d} [z, z + 1]$  für jedes  $n \geq 1$ , ergibt sich aus (106) und (107), dass

$$\infty \stackrel{(106)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \stackrel{(107)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \oplus B(o, \sqrt{d}))}{\nu_d(W_n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{Z}_{n,2}^d|.$$

- Weil außerdem  $W_n \oplus B(o, \sqrt{d}) \subset \bigcup_{z \in \mathbb{Z}_{n,1}^d} [z, z + 1] \subset W_n \oplus B(o, \sqrt{d})$  für jedes  $n \geq 1$ , ergibt sich aus (107), dass

$$\begin{aligned} 1 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathbb{Z}_{n,2}^d|}{|\mathbb{Z}_{n,1}^d|} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \oplus B(o, \sqrt{d}))}{\nu_d(W_n \oplus B(o, \sqrt{d}))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \oplus B(o, \sqrt{d}))}{\nu_d(W_n)} \bigg/ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \oplus B(o, \sqrt{d}))}{\nu_d(W_n)} \stackrel{(107)}{=} 1. \quad \square \end{aligned}$$

### Beachte

- Bei der Untersuchung der asymptotischen Eigenschaften von Mittelwertschätzern betrachten wir mittelnde Folgen  $\{W_n\}$  von Beobachtungsfenstern, wobei wir zusätzlich voraussetzen, dass die Gewichtsfunktionen  $G_{W_n} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  den folgenden beiden Bedingungen genügen.
- Für gewisse Konstanten  $c_0, \theta \in (0, \infty)$  gelte

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} G_{W_n}(x) \leq \frac{c_0}{\nu_d(W_n)} \quad \forall n \geq 1 \quad (109)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \bar{G}_{W_n}(x) = \theta \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \text{wobei} \quad \bar{G}_{W_n}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_{W_n}(y) G_{W_n}(x + y) dy. \quad (110)$$

### Beispiel

- Sei  $C \in \mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$  ein beliebiger (nichtleerer) konvexer Körper, und sei  $\{W_n\}$  eine mittelnde Folge, so dass  $\nu_d(W_n \oplus B(o, \text{diam}(C))) > 0$  für jedes  $n \geq 1$ .
- Dann genügen die Funktionen  $G_{W_n} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$G_{W_n}(x) = \frac{\mathbb{1}_{W_n \oplus \check{C}}(x)}{\nu_d(W_n \oplus \check{C})} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (111)$$

den Bedingungen (109) und (110), wobei

$$c_0 = \sup_{n \geq 1} \frac{\nu_d(W_n)}{\nu_d(W_n \oplus \check{C})} < \infty \quad \text{und} \quad \theta = 1. \quad (112)$$

- Dabei ergibt sich unmittelbar aus der Definitionsgleichung (111), dass die Bedingung (109) erfüllt sind, wobei sich die Endlichkeit der Konstanten  $c_0$  in (112) aus Lemma 6.12 ergibt, denn es gilt

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n)}{\nu_d(W_n \oplus \check{C})} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n)}{\nu_d(W_n \oplus B(o, \text{diam}(C)))} \stackrel{(107)}{=} 1. \quad (113)$$

- Um die Gültigkeit von (110) zu zeigen, genügt es zu beachten, dass für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\bar{G}_{W_n}(x) = \frac{\nu_d((W_n \ominus \check{C}) \cap ((W_n \ominus \check{C}) - x))}{\nu_d^2(W_n \ominus \check{C})}$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \bar{G}_{W_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n)}{\nu_d(W_n \ominus \check{C})} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d((W_n \ominus \check{C}) \cap ((W_n \ominus \check{C}) - x))}{\nu_d(W_n \ominus \check{C})} = 1.$$

- Denn in (113) hatten wir gezeigt, dass der erste Grenzwert gleich 1 ist, und mit Hilfe von Lemma 6.12 ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} 1 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d((W_n \ominus \check{C}) \cap ((W_n \ominus \check{C}) - x))}{\nu_d(W_n \ominus \check{C})} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d((W_n \ominus B(o, \text{diam}(C) + |x|))}{\nu_d(W_n \ominus \check{C})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d((W_n \ominus B(o, \text{diam}(C) + |x|))}{\nu_d(W_n)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n)}{\nu_d(W_n \ominus \check{C})} \stackrel{(107), (113)}{=} 1. \end{aligned}$$

#### 6.4.2 Erwartungstreue und Schätzvarianz; $L_2$ -Konsistenz

Wir nehmen an, dass die allgemeine Klasse von stationären Zufallsfeldern  $\{Y_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  bzw. die zugehörigen Mittelwertschätzer, die wir in diesem Abschnitt betrachten, die folgende Gestalt haben.

- Sei  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$  eine stationäre ZAM, die der (verschärften) Integrierbarkeitsbedingung

$$\mathbb{E} 4^{N(\Xi \cap [0,1]^d)} < \infty \quad (114)$$

genügt, wobei  $N(B)$  die minimale Anzahl von konvexen Zerlegungskomponenten der Menge  $B \in \mathcal{R}$  ist, d.h.,

$$N(B) = \min\{k : B = B_1 \cup \dots \cup B_k, B_1, \dots, B_k \in \mathcal{K}\}.$$

- Das stationäre Zufallsfeld  $\{Y_x, x \in \mathbb{R}^d\}$  sei gegeben durch

$$Y_x = f(\Xi \cap (C + x)), \quad (115)$$

- wobei  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein additives, translationsinvariantes, messbares und bedingt beschränktes Funktional
- und  $C \in \mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$  ein nichtleerer konvexer Körper ist, so dass  $o \in C$ .

- Zur Schätzung des Erwartungswertes  $\mu = \mathbb{E} Y_0$  von  $\{Y_x\}$  betrachten wir den Scan-Schätzer  $\hat{\mu}_W$  mit

$$\hat{\mu}_W = \int_{\mathbb{R}^d} f(\Xi \cap W \cap (C + x)) G_W(x) dx, \quad (116)$$

- wobei  $\Xi$  in einem (hinreichend großen) Fenster  $W \in \mathcal{R}$  mit  $\nu_d(W \ominus \check{C}) > 0$  beobachtet wird
- und  $G_W : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  eine Gewichtsfunktion ist, so dass

$$G_W(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus (W \ominus \check{C}) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^d} G_W(x) dx = 1, \quad (117)$$

- d.h., die Randkorrektur des in (116) betrachteten Schätzers erfolgt durch Minus-Sampling.

**Beachte** Auf ähnliche Weise wie im Beweis von Theorem 6.11 ergibt sich aus (114), dass  $\mathbb{E} f^2(\Xi \cap B) < \infty$  für jedes  $B \in \mathcal{R}$  und somit  $\mathbb{E} Y_o^2 < \infty$ .

Wir zeigen nun, dass der in (116) eingeführte Schätzer  $\hat{\mu}_W$  für  $\mu$  erwartungstreu ist, und wir leiten eine Formel für die Schätzvarianz  $\text{Var } \hat{\mu}_W$  her.

### Theorem 6.13

- Sei  $W \in \mathcal{R}$  ein Beobachtungsfenster mit  $\nu_d(W \ominus \check{C}) > 0$ , und sei  $G_W : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  eine Gewichtsfunktion, die der Bedingung (117) genügt.
- Dann gilt

$$\mathbb{E} \hat{\mu}_W = \mu \quad \text{und} \quad \text{Var } \hat{\mu}_W = \int_{\mathbb{R}^d} \text{Cov}_Y(x) \bar{G}_W(x) dx, \quad (118)$$

wobei  $\text{Cov}_Y(x) = \mathbb{E}(Y_o Y_x) - \mu^2$  die Kovarianzfunktion des stationären Zufallsfeldes  $\{Y_x\}$  ist und  $\bar{G}_W(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_W(y) G_W(x+y) dy$ .

### Beweis

- Weil die Abbildung  $(\omega, x) \mapsto Y_x(\omega) G_W(x)$  absolut integrierbar bezüglich  $P \times \nu_d$  ist, ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Fubini über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \hat{\mu}_W &\stackrel{(116), (117)}{=} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} f(\Xi \cap (C+x)) G_W(x) dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} f(\Xi \cap (C+x)) G_W(x) dx \\ &\stackrel{\text{Stationarität}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} f(\Xi \cap C) G_W(x) dx = \mu \int_{\mathbb{R}^d} G_W(x) dx \stackrel{(117)}{=} \mu. \end{aligned}$$

- Hieraus ergibt sich auf ähnliche Weise, dass

$$\begin{aligned} \text{Var } \hat{\mu}_W &\stackrel{(116), (117)}{=} \mathbb{E} \left( \left( \int_{\mathbb{R}^d} Y_x G_W(x) dx - \mu \right)^2 \right) \stackrel{(117)}{=} \mathbb{E} \left( \left( \int_{\mathbb{R}^d} (Y_x - \mu) G_W(x) dx \right)^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \int_{\mathbb{R}^d} (Y_x - \mu) G_W(x) dx \int_{\mathbb{R}^d} (Y_y - \mu) G_W(y) dy \right) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left( (Y_x - \mu) (Y_y - \mu) \right) G_W(x) G_W(y) dy dx \\ &\stackrel{\text{Stationarität}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left( (Y_{x-y} - \mu) (Y_o - \mu) \right) G_W(x) G_W(y) dx dy \\ &\stackrel{x \mapsto x+y}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left( (Y_x - \mu) (Y_o - \mu) \right) G_W(x+y) G_W(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \text{Cov}_Y(x) \int_{\mathbb{R}^d} G_W(x+y) G_W(y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \text{Cov}_Y(x) \bar{G}_W(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

### Beachte

- Wenn die Kovarianzfunktion des stationären Zufallsfeldes  $\{Y_x\}$  integrierbar ist, dann ergibt sich aus (109) und aus der Formel (118) für die Schätzvarianz  $\text{Var } \hat{\mu}_{W_n}$ , die in Theorem 6.13 hergeleitet worden ist, dass

$$\mathbb{E} \left( (\hat{\mu}_{W_n} - \mu)^2 \right) \leq \frac{c_0}{\nu_d(W_n)} \int_{\mathbb{R}^d} |\text{Cov}_Y(x)| dx. \quad (119)$$

- Hieraus ergibt sich insbesondere, dass der Schätzer  $\hat{\mu}_{W_n}$  konsistent im Sinne der  $L_2$ -Norm ist, – d.h., es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( (\hat{\mu}_{W_n} - \mu)^2 \right) = 0$  für jede mittelnde Folge  $\{W_n\}$  von Beobachtungsfenstern,

- wenn die Kovarianzfunktion von  $\{Y_x\}$  integrierbar ist und wenn die Gewichtsfunktionen  $G_{W_n}$  den Bedingungen (109) und (117) genügen.
- Wenn die Funktionen  $G_{W_n} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  zusätzlich der Bedingung (110) genügen, dann lässt sich das asymptotische Verhalten der Schätzvarianz  $\text{Var } \hat{\mu}_W$  bei unbegrenzt wachsendem Beobachtungsfenster wie folgt bestimmen.

**Theorem 6.14** Sei  $\{W_n\}$  eine mittelnende Folge, und seien  $G_{W_n} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  Gewichtsfunktionen, die den Bedingungen (109), (110) und (117) genügen. Wenn außerdem

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\text{Cov}_Y(x)| dx < \infty, \quad (120)$$

dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var } \hat{\mu}_{W_n} = \theta \int_{\mathbb{R}^d} \text{Cov}_Y(x) dx, \quad (121)$$

wobei  $\theta$  der in (110) eingeführte Grenzwert ist.

**Beweis**

- Aus (109) und (117) ergibt sich, dass für beliebige  $n \geq 1$  und  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \nu_d(W_n) \overline{G}_{W_n}(x) &= \nu_d(W_n) \int_{\mathbb{R}^d} G_{W_n}(y) G_{W_n}(x+y) dy \\ &\stackrel{(109)}{\leq} \nu_d(W_n) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{c_0}{\nu_d(W_n)} G_{W_n}(x+y) dy \stackrel{(117)}{=} c_0 < \infty, \end{aligned}$$

wobei die Konstante  $c_0$  weder von  $n \geq 1$  noch von  $x \in \mathbb{R}^d$  abhängt, d.h., durch  $c_0 \text{Cov}_Y(x)$  ist eine integrierbare Majorante der Funktionen  $\nu_d(W_n) \text{Cov}_Y(x) \overline{G}_{W_n}(x)$  gegeben.

- Ausgehend von der Formel (118) für die Schätzvarianz  $\text{Var } \hat{\mu}_W$ , die in Theorem 6.13 hergeleitet worden ist, ergibt sich nun hieraus und aus (110) mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, dass

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var } \hat{\mu}_{W_n} &\stackrel{(118)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \nu_d(W_n) \text{Cov}_Y(x) \overline{G}_{W_n}(x) dx \\ &\stackrel{\text{majorisierte Konvergenz}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Cov}_Y(x) \overline{G}_{W_n}(x) dx \\ &\stackrel{(110)}{=} \theta \int_{\mathbb{R}^d} \text{Cov}_Y(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

### 6.4.3 Schätzung der asymptotischen Kovarianzmatrix

## 6.5 Boolesches Modell

### 6.5.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

In diesem Abschnitt betrachten wir eine spezielle Klasse von Keim–Korn–Modellen, die bereits in der Einleitung von Kapitel 6 kurz erwähnt worden sind. Dabei machen wir schärfere Annahmen über die Beschaffenheit der Keime und Körner. Und zwar setzen wir voraus, dass die Keime einen homogenen Poisson–Prozess bilden. Außerdem nehmen wir an, dass die Körner (kompakte) zufällige Mengen sind, die untereinander sowie von dem Poisson–Prozess der Keime unabhängig sind. Hierfür benötigen wir den Begriff der Unabhängigkeit von zufälligen abgeschlossenen Mengen.

#### Definition

- Sei  $n \geq 2$  eine beliebige natürliche Zahl, und seien  $\Xi_1, \dots, \Xi_n : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  beliebige ZAM. Man sagt, dass die ZAM  $\Xi_1, \dots, \Xi_n$  *unabhängig* sind, wenn

$$P(\Xi_1 \in B_1, \dots, \Xi_n \in B_n) = P(\Xi_1 \in B_1) \dots P(\Xi_n \in B_n) \quad \forall B_1, \dots, B_n \in \sigma_{\mathcal{F}}.$$

- Analog sagt man, dass die (unendliche) Folge  $\Xi_1, \Xi_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  aus unabhängigen ZAM besteht, wenn dies für jede endliche Teilfolge gilt.

#### Beachte

- Mit der Unabhängigkeit von ZAM meint man also die Situation, dass ihre gemeinsame Verteilung als Produktmaß der Randverteilungen dargestellt werden kann.
- Man kann sich beispielsweise leicht überlegen, dass die ZAM  $\Xi_1, \Xi_2, \dots$  mit  $\Xi_n = B(o, R_n)$  für jedes  $n \geq 1$  unabhängig sind, wenn  $R_1, R_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit nichtnegativen Werten ist.

Wir führen nun den Begriff des Booleschen Modells mit kompakten Körnern als eine spezielle Klasse von Keim–Korn–Modellen ein.

#### Definition

- Sei  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson–Prozess in  $\mathbb{R}^d$  mit der Intensität  $\lambda > 0$ , und sei  $\{\Xi_n\}$  eine Folge von zufälligen kompakten Mengen, die unabhängig und identisch verteilt sind (mit der Verteilung  $Q$ ). Außerdem seien die beiden Folgen  $\{S_n\}$  und  $\{\Xi_n\}$  voneinander unabhängig.
- In Abschnitt 6.2 hatten wir uns überlegt (vgl. Beispiel 3 in Abschnitt 6.2.1), dass  $\bigcup_{n=1}^k (\Xi_n + S_n)$  für jedes  $k \geq 1$  eine ZAM ist. Wenn außerdem

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n) \in \mathcal{F} \tag{122}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt, dann ist auch

$$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n) \quad \left( = \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{n=1}^k (\Xi_n + S_n) \right) \tag{123}$$

eine ZAM, die *Boolesches Modell* mit der *Intensität*  $\lambda$  und der *Kornverteilung*  $Q$  genannt wird.

#### Beachte

- Die Folgen  $\{S_n\}$  und  $\{\Xi_n\}$  eines Booleschen Modells bilden also einen unabhängig markierten Poisson–Prozess  $\{(S_n, \Xi_n)\}$  in  $\mathbb{R}^d$  mit dem Markenraum  $(\mathcal{C}, \sigma_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C})$ , wobei  $\lambda > 0$  die Intensität und  $Q$  die Markenverteilung von  $\{(S_n, \Xi_n)\}$  ist.

- Die Zufallsvektoren  $S_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  werden als (zufällig positionierte) *Keime* interpretiert.
- Die zufälligen kompakten Mengen  $\Xi_n : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$  werden als *Körner* interpretiert, die mit den „Keimen“  $S_n$  assoziiert sind.

Das folgende Lemma enthält eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von (122).

**Lemma 6.13** *Sei  $\{(S_n, \Xi_n)\}$  ein stationärer, unabhängig markierter Poisson-Prozess in  $\mathbb{R}^d$  mit dem Markenraum  $(\mathcal{C}, \sigma_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C})$ . Wenn*

$$\mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \oplus C) < \infty \quad \forall C \in \mathcal{C}, \quad (124)$$

dann gilt (122) mit Wahrscheinlichkeit 1.

### Beweis

- Sei  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes (\sigma_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C}) \rightarrow [0, \infty]$  das Intensitätsmaß des markierten Punktprozesses  $\{(S_n, \Xi_n)\}$ , d.h.,

$$\mu(B \times C) = \mathbb{E} \#\{n : S_n \in B, \Xi_n \in C\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), C \in \sigma_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C}.$$

- Dann ergibt sich aus den Theoremen 5.3 und 5.9, dass

$$\mu(B \times C) = \lambda \nu_d(B) Q(C) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), C \in \sigma_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C}, \quad (125)$$

wobei  $\lambda > 0$  die Intensität und  $Q$  die Markenverteilung von  $\{(S_n, \Xi_n)\}$  ist.

- Aus (124) und (125) ergibt sich nun mit Hilfe des Campbellschen Theorems für markierte Punktprozesse (vgl. Theorem 5.1), dass für jedes  $C \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \#\{n : (\Xi_n + S_n) \cap C \neq \emptyset\} &\stackrel{\text{Theorem 5.1}}{=} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}} \mathbb{I}((\xi + x) \cap C \neq \emptyset) \mu(d(x, \xi)) \\ &\stackrel{(125)}{=} \lambda \int_{\mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}((\xi + x) \cap C \neq \emptyset) dx Q(d\xi) \\ &= \lambda \int_{\mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}(x \in C \oplus \check{\xi}) dx Q(d\xi) \\ &= \lambda \int_{\mathcal{K}} \nu_d(C \oplus \check{\xi}) Q(d\xi) \\ &= \lambda \int_{\mathcal{K}} \nu_d(\xi \oplus \check{C}) Q(d\xi) \\ &= \lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \oplus \check{C}) \stackrel{(124)}{<} \infty, \end{aligned}$$

weil mit  $C \in \mathcal{C}$  auch  $\check{C} \in \mathcal{C}$  gilt.

- Hieraus folgt, dass für jedes  $C \in \mathcal{C}$  die Schnittmenge  $C \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  mit Wahrscheinlichkeit 1 nur von endlich vielen „verschobenen“ Körnern  $\Xi_n + S_n$  gebildet wird und dass somit  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  mit Wahrscheinlichkeit 1 eine abgeschlossene Menge ist.  $\square$

### Beachte

- Von jetzt an werden wir in diesem Abschnitt stets voraussetzen, dass  $\{(S_n, \Xi_n)\}$  ein stationärer, unabhängig markierter Poisson-Prozess ist, der der Integrierbarkeitsbedingung (124) genügt.
- Man kann sich leicht überlegen, dass die Bedingung (124) erfüllt ist, wenn

$$P(\Xi_1 \subset B(o, R)) = 1, \quad (126)$$

wobei  $R$  eine nichtnegative Zufallsvariable ist mit  $\mathbb{E} R^d < \infty$ .

Im Beweis von Lemma 6.13 hatten wir gezeigt, dass jede kompakte Menge  $C \in \mathcal{C}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 nur von endlich vielen „verschobenen“ Körnern  $\Xi_n + S_n$  getroffen wird. Die „unendliche“ Vereinigung  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  somit ebenfalls eine ZAM ist, die darüber hinaus die folgenden Invarianzeigenschaften hat.

### Theorem 6.15

- Das Boolesche Modell  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  ist eine stationäre ZAM.
- Wenn das (Einzel-) Korn  $\Xi_1$  isotrop ist, dann ist das Boolesche Modell  $\Xi$  eine stationäre und isotrope ZAM.

### Beweis

- Aus der Stationarität des Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$  ergibt sich, dass für beliebige  $C \in \mathcal{C}$  und  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{\Xi}(C) &= P(\Xi \cap C \neq \emptyset) \\
&= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n) \cap C \neq \emptyset\right) \\
&\stackrel{\text{Stationarität von } \{S_n\}}{=} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + (S_n + x)) \cap C \neq \emptyset\right) \\
&= P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n) + x\right) \cap C \neq \emptyset\right) \\
&= P((\Xi + x) \cap C \neq \emptyset) = \mathbf{T}_{\Xi+x}(C).
\end{aligned}$$

- Mit Hilfe von Theorem 6.6 ergibt sich hieraus, dass die ZAM  $\Xi$  stationär ist.
- Wenn  $\Xi_1$  isotrop ist, dann gilt für jedes  $C \in \mathcal{C}$  und für jede Drehung  $\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  um den Nullpunkt

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{\Xi}(C) &= P(\Xi \cap C \neq \emptyset) \\
&= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n) \cap C \neq \emptyset\right) \\
&\stackrel{\text{Isotropie von } \{S_n\}}{=} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + \delta(S_n)) \cap C \neq \emptyset\right) \\
&\stackrel{\text{Isotropie von } \Xi_n}{=} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\delta(\Xi_n) + \delta(S_n)) \cap C \neq \emptyset\right) \\
&= P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \delta(\Xi_n + S_n)\right) \cap C \neq \emptyset\right) \\
&= P(\delta(\Xi) \cap C \neq \emptyset) = \mathbf{T}_{\delta(\Xi)}(C).
\end{aligned}$$

- Somit ergibt sich durch die erneute Anwendung von Theorem 6.6, dass die ZAM  $\Xi$  isotrop ist.  $\square$

### Beachte

- In Abschnitt 6.2.3 hatten wir uns überlegt, dass ein Keim-Korn-Modell  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  genau dann ergodisch ist, wenn der zugrundeliegende stationäre Punktprozess  $\{S_n\}$  der „Keime“ ergodisch ist.
- Außerdem hatten wir in Theorem 3.22 gezeigt, dass  $\{S_n\}$  ergodisch ist, wenn  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson-Prozess ist.
- Hieraus ergibt sich, dass  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  ergodisch ist, wenn  $\Xi$  ein Boolesches Modell ist, d.h., wenn der Punktprozess  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson-Prozess ist.

### 6.5.2 Formeln für Kapazitätsfunktional, Volumenanteil und Kontaktverteilungsfunktion

Wir zeigen nun, wie grundlegende Charakteristiken des (stationären) Booleschen Modells  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  durch die Intensität  $\lambda > 0$  und die Kornverteilung  $Q$  von  $\{(S_n, \Xi_n)\}$  ausgedrückt werden können.

**Theorem 6.16** Sei  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  ein Boolesches Modell mit Intensität  $\lambda > 0$  und Kornverteilung  $Q$ .

- Dann gilt für das Kapazitätsfunktional  $\mathbf{T}_{\Xi} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$  mit  $\mathbf{T}_{\Xi}(C) = P(\Xi \cap C \neq \emptyset)$

$$\mathbf{T}_{\Xi}(C) = 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \oplus \check{C})) \quad \forall C \in \mathcal{C}, \quad (127)$$

- Außerdem gilt

– für den Volumenanteil  $p = \mathbb{E} \nu_d(\Xi \cap [0, 1]^d)$

$$p = P(o \in \Xi) = 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1)), \quad (128)$$

– für die Kovarianz  $q : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  mit  $q(x) = P(o \in \Xi, x \in \Xi)$

$$q(x) = 2p - 1 + (1 - p)^2 \exp(\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \cap (\Xi_1 - x))) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (129)$$

#### Beweis

- Um die Gültigkeit von (127) zu zeigen, betrachten wir das zufällige Zählmaß  $\{\tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  mit

$$\tilde{N}_B = \#\{n : S_n \in B, (\Xi_n + S_n) \cap C \neq \emptyset\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (130)$$

- Ähnlich wie im Beweis von Theorem 2.10 kann man zeigen, dass  $\{\tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein (inhomogener) Poisson-Prozess ist (vgl. auch Korollar 2.2),
  - der sich durch ortsabhängige Verdünnung des (homogenen) Poisson-Prozesses  $\{S_n\}$  ergibt
  - und dessen Intensitätsmaß  $\tilde{\Lambda} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$  die Integraldarstellung

$$\tilde{\Lambda}(B) = \int_B \tilde{\lambda}(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (131)$$

besitzt, wobei die Intensitätsfunktion  $\tilde{\lambda} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  von  $\{\tilde{N}(B)\}$  gegeben ist durch

$$\tilde{\lambda}(x) = \lambda P((\Xi_1 + x) \cap C \neq \emptyset) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (132)$$

- Hieraus ergibt sich, dass für jedes  $C \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\Xi}(C) &\stackrel{(39)}{=} P(\Xi \cap C \neq \emptyset) = 1 - P(\Xi \cap C = \emptyset) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n) \cap C = \emptyset\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{(\Xi_n + S_n) \cap C \neq \emptyset\}\right) \\ &= 1 - P(\tilde{N}(\mathbb{R}^d) = 0) \\ &= 1 - \exp(-\tilde{\Lambda}(\mathbb{R}^d)) \\ &\stackrel{(131), (132)}{=} 1 - \exp\left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^d} P((\Xi_1 + x) \cap C \neq \emptyset) dx\right) \\ &= 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \oplus \check{C})). \end{aligned}$$

- Die Gültigkeit von (128) ergibt sich unmittelbar aus (51) und (127), denn es gilt

$$p = \mathbb{E} \mu_d(\Xi \cap [0, 1]^d) \stackrel{(51)}{=} P(o \in \Xi) = P(\Xi \cap \{o\} \neq \emptyset) = \mathbf{T}_\Xi(\{o\}) \stackrel{(127)}{=} 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1)).$$

- Auf ähnliche Weise ergibt sich (129) aus (52) und (127), denn es gilt

$$q(x) = P(o \in \Xi, x \in \Xi) \stackrel{(52)}{=} 2p - \mathbf{T}_\Xi(\{0, x\}) \stackrel{(127)}{=} 2p - 1 + \exp(-\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \oplus \{o, -x\}))$$

und

$$\begin{aligned} \exp(-\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \oplus \{o, -x\})) &= \exp(-\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \cup (\Xi_1 - x))) \\ &= \exp\left(-\lambda (\mathbb{E} \nu_d(\Xi_1) + \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 - x) - \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \cap (\Xi_1 - x)))\right) \\ &= \exp\left(-\lambda (2\mathbb{E} \nu_d(\Xi_1) - \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \cap (\Xi_1 - x)))\right) \\ &= \exp(-2\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1)) \exp(\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \cap (\Xi_1 - x))) \\ &\stackrel{(128)}{=} (1-p)^2 \exp(\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \cap (\Xi_1 - x))). \end{aligned} \quad \square$$

### Beachte

- Die in (129) betrachtete Funktion  $\gamma : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  mit  $\gamma(x) = \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \cap (\Xi_1 - x))$  wird *Set-Kovarianzfunktion* des zufälligen (Einzel-) Kornes  $\Xi_1$  genannt.
- Wenn die ZAM  $\Xi_1$  isotrop ist, dann hängt  $\gamma(x)$  nur von  $|x|$  ab, d.h., es gilt

$$\bar{\gamma}(r) = \gamma(ru) \quad \forall r > 0, \quad (133)$$

wobei  $u \in \mathbb{R}^d$  ein beliebiger Punkt mit  $|u| = 1$  ist.

- Im allgemeinen kann die Größe  $\bar{\gamma}(r)$  in (133) nicht explizit berechnet werden. Wenn jedoch  $\Xi_1 = B(o, R)$  für eine nichtnegative Zufallsvariable  $R : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ , dann kann man zeigen, dass

– für  $d = 2$

$$\bar{\gamma}(r) = \int_{r/2}^{\infty} \left( 2t^2 \arccos \frac{r}{2t} - \frac{r}{2} \sqrt{4t^2 - r^2} \right) dF_R(t) \quad \forall r > 0 \quad (134)$$

– und für  $d = 3$

$$\bar{\gamma}(r) = \int_{r/2}^{\infty} \frac{4}{3} \pi t^3 \left( 1 - \frac{3r}{4t} + \frac{r^3}{16t^3} \right) dF_R(t) \quad \forall r > 0, \quad (135)$$

wobei  $F_R : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  die Verteilungsfunktion von  $R$  bezeichnet.

Eine weitere grundlegende (Struktur-) Kenngröße einer stationären ZAM  $\Xi$  ist die *Kontaktverteilungsfunktion*  $H_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ , die bereits in Abschnitt 6.2.4 eingeführt worden ist.

- Dabei ist

$$H_B(r) = P(rB \cap \Xi \neq \emptyset \mid o \notin \Xi) \quad \forall r \geq 0, \quad (136)$$

- wobei  $rB = \{rx : x \in B\}$  und  $B \in \mathcal{C}$  eine kompakte Menge ist,
  - die das „strukturierende Element“ von  $H_B$  genannt wird
  - und die *sternförmig* bezüglich des Koordinatenursprungs  $o \in \mathbb{R}^d$  ist, d.h., es gilt  $o \in B$  und  $cx \in B$  für beliebige  $x \in B$  und  $c \in [0, 1]$ .

**Beachte**

- Formal kann auch der Poisson-Prozess  $\{S_n\}$  selbst als Boolesches Modell aufgefasst werden, wenn für die Körner  $\Xi_1 = \Xi_2 = \dots = \{o\}$  gesetzt wird.
- In Abschnitt 4.3.1 hatten wir gezeigt, dass

$$H_B(r) = 1 - \exp(-\lambda \kappa_d r^d) \quad \forall r \geq 0, \quad (137)$$

wenn  $B = B(o, 1)$  die  $d$ -dimensionale Einheitskugel und  $\Xi = \{S_n\}$  ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$  ist, wobei  $k_d = \nu_d(B(o, 1))$  das Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Wir zeigen nun, wie sich die Darstellungsformel (137) für das Boolesche Modell mit beliebigen „integrierbaren“ Körnern verallgemeinern lässt.

**Theorem 6.17**

- Sei  $B \in \mathcal{C}$  eine sternförmige kompakte Menge, und sei  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  ein Boolesches Modell mit der (Keim-) Intensität  $\lambda > 0$ .
- Dann gilt

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\lambda(\mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \oplus r\check{B}) - \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1))\right) \quad \forall r \geq 0. \quad (138)$$

**Beweis**

- Für jede stationäre ZAM  $\Xi$  mit  $P(o \notin \Xi) > 0$  hatten wir in Theorem 6.8 gezeigt, dass

$$H_B(r) = P(o \in \Xi \oplus r\check{B} \mid o \notin \Xi) \quad \forall r \geq 0. \quad (139)$$

- Aus (139) ergibt sich mit Hilfe der in Theorem 6.16 hergeleiteten Formeln (127) und (128) für das Kapazitätsfunktional bzw. den Volumenanteil des Booleschen Modells  $\Xi$ , dass

$$\begin{aligned} H_B(r) &\stackrel{(139)}{=} P(o \in \Xi \oplus r\check{B} \mid o \notin \Xi) \\ &= 1 - \frac{P(\Xi \cap r\check{B} = \emptyset)}{1 - P(o \in \Xi)} \\ &\stackrel{(127),(128)}{=} 1 - \frac{\exp(-\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \oplus r\check{B}))}{\exp(-\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1))} \\ &= 1 - \exp\left(-\lambda(\mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \oplus r\check{B}) - \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1))\right). \quad \square \end{aligned}$$

**Beachte**

- In Abschnitt 6.5.1 hatten wir gezeigt, dass das Boolesche Modell  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  ergodisch ist.
- Hieraus ergibt sich (vgl. die Anmerkungen am Ende von Abschnitt 6.2.4), dass der in (54) eingeführte Schätzer  $\hat{p}_W$  des Volumenanteil  $p$  von  $\Xi$  (stark) konsistent ist.
- Darüber hinaus ist auch der in (65) eingeführte Schätzer

$$\hat{H}_{B,W}(r) = 1 - \frac{1 - \hat{p}_{B,W}(r)}{1 - \hat{p}_W}$$

für  $H_B(r)$  konsistent, wobei

$$\hat{p}_{B,W}(r) = \frac{\nu_d(W_{B,r}^* \cap (\Xi \oplus r\check{B}))}{\nu_d(W_{B,r}^*)} \quad \text{mit} \quad W_{B,r}^* = W \ominus r\check{B}.$$

### 6.5.3 Boolesches Modell mit konvexen Körnern

In diesem Abschnitt betrachten wir eine spezielle Klasse von Booleschen Modellen. Dabei setzen wir voraus, dass die Körner zufällige konvexe Körper, d.h., konvexe und kompakte zufällige Mengen sind.

- Sei also  $\{S_n\}$  ein homogener Poisson–Prozess in  $\mathbb{R}^d$  mit der Intensität  $\lambda > 0$ , und sei  $\{\Xi_n\}$  eine Folge von zufälligen konvexen Körpern, die unabhängig und identisch verteilt sind (mit der Verteilung  $Q$ ). Außerdem seien die beiden Folgen  $\{S_n\}$  und  $\{\Xi_n\}$  voneinander unabhängig.
- Darüber hinaus setzen wir (so wie bisher) stets voraus, dass die Integrierbarkeitsbedingung (124) erfüllt ist, wobei man sich leicht überlegen kann, dass (124) äquivalent ist mit  $\mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \oplus B(o, r)) < \infty$  für jedes  $r > 0$ .
- Dann ergibt sich aus Lemma 6.13, dass

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n) \in \mathcal{S} \quad (140)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt, d.h., das Boolesche Modell  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  ist eine (stationäre und ergodische) ZAM.

Mit Hilfe der grundlegenden Eigenschaften von konvexen und kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ , die in Abschnitt 6.3.1 diskutiert wurden, lassen sich nun die Formeln (127) und (138) für das Kapazitätsfunktional bzw. die Kontaktverteilungsfunktion im Fall des Booleschen Modells mit konvexen Körnern spezifizieren.

Hierfür benötigen wir die folgende Verallgemeinerung des *Satzes von Steiner* (vgl. Theorem 6.9).

#### Theorem 6.18

- Sei  $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{K}$  eine isotrope ZAM in  $\mathcal{K}$ , so dass

$$\mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus B(o, r)) < \infty \quad \forall r > 0. \quad (141)$$

- Dann gilt

$$\mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus B) = \sum_{k=0}^d \alpha_{dk} \mathbb{E} V_{d-k}(\Xi) V_k(B) \quad \forall B \in \mathcal{K}, \quad (142)$$

wobei

$$\alpha_{dk} = \frac{k! \kappa_k (d-k)! \kappa_{d-k}}{d! \kappa_d} \quad (143)$$

und  $\kappa_i$  das  $i$ -dimensionale Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^i$  bezeichnet.

#### Beweis

- Man kann sich leicht überlegen, dass nicht nur  $\mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus B)$ , sondern auch die Erwartungswerte  $\mathbb{E} V_j(\Xi)$  in (142) für jedes  $j \in \{0, \dots, d\}$  wohldefinierte Größen ist.
  - Denn aus der (klassischen) Steiner–Formel (73) in Theorem 6.9 ergibt sich, dass für jedes  $r > 0$

$$0 \leq V_j(\Xi) \leq \frac{1}{r^{d-j} \kappa_{d-j}} V_d(\Xi \oplus B(o, r)) \quad \forall j \in \{0, \dots, d\}.$$

- Hieraus und aus (141) folgt, dass

$$\mathbb{E} V_j(\Xi) < \infty \quad \forall j \in \{0, \dots, d\}. \quad (144)$$

- Wir zeigen nun, dass die Abbildung  $T : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$  mit  $T(B) = \mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus B)$  additiv, bewegungs-invariant und monoton ist.

– *Additivität*: Für beliebige  $B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ , so dass  $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{K}$ , gilt

$$\begin{aligned} T(B_1) + T(B_2) &= \mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus B_1) + \mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus B_2) = \mathbb{E} \left( \nu_d(\Xi \oplus B_1) + \nu_d(\Xi \oplus B_2) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \nu_d((\Xi \oplus B_1) \cup (\Xi \oplus B_2)) + \nu_d((\Xi \oplus B_1) \cap (\Xi \oplus B_2)) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \nu_d(\Xi \oplus (B_1 \cup B_2)) + \nu_d(\Xi \oplus (B_1 \cap B_2)) \right) \\ &= \mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus (B_1 \cup B_2)) + \mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus (B_1 \cap B_2)) \\ &= T(B_1 \cup B_2) + T(B_1 \cap B_2). \end{aligned}$$

– *Bewegungsinvarianz*: Für beliebige  $B \in \mathcal{B}$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt

$$\begin{aligned} T(B+x) &= \mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus (B+x)) \\ &= \mathbb{E} \nu_d((\Xi \oplus B) + x) \stackrel{\text{Translationsinvarianz von } \nu_d}{=} \mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus B) = T(B), \end{aligned}$$

und analog gilt für jedes  $B \in \mathcal{B}$  und für jede Drehung  $\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  um den Nullpunkt

$$\begin{aligned} T(\delta(B)) &= \mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus \delta(B)) = \mathbb{E} \nu_d(\delta(\delta^{-1}(\Xi) \oplus B)) \\ &\stackrel{\text{Rotationsinvarianz von } \nu_d}{=} \mathbb{E} \nu_d(\delta^{-1}(\Xi) \oplus B) \stackrel{\text{Isotropie von } \Xi}{=} \mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus B) = T(B). \end{aligned}$$

– *Monotonie*: Für beliebige  $B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ , so dass  $B_1 \subset B_2$ , gilt

$$T(B_1) = \mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus B_1) \leq \mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus B_2) = T(B_2).$$

- Aus dem Satz von Hadwiger (vgl. die Darstellungsformel (81) in Theorem 6.10) folgt somit, dass es Konstanten  $a_0, \dots, a_d \geq 0$  gibt, so dass

$$T(B) = \sum_{k=0}^d a_k V_k(B) \quad \forall B \in \mathcal{K}. \quad (145)$$

- Dabei können die Konstanten  $a_0, \dots, a_d \geq 0$  in (145) auf die folgende Weise bestimmt werden.

– Aus der Steiner-Formel (73) ergibt sich, dass für jedes  $r > 0$

$$T(B(o, r)) = \mathbb{E} \nu_d(\Xi \oplus B(o, r)) \stackrel{(73)}{=} \sum_{k=0}^d r^{d-k} \kappa_{d-k} \mathbb{E} V_k(\Xi). \quad (146)$$

– Außerdem ergibt sich genauso wie (78) aus der Steiner-Formel (73), dass für jedes  $r > 0$

$$V_k(B(o, r)) = \binom{d}{k} \frac{r^k \kappa_d}{\kappa_{d-k}} \quad \forall k \in \{0, \dots, d\}.$$

– Wenn nun  $B = B(o, r)$  in (145) gesetzt wird, dann ergibt sich durch den Vergleich der Koeffizienten von  $r^k$  in (145) und (146), dass

$$a_k \binom{d}{k} \frac{\kappa_d}{\kappa_{d-k}} = \kappa_k \mathbb{E} V_{d-k}(\Xi) \quad \forall k \in \{0, \dots, d\}. \quad \square$$

Mit Hilfe der verallgemeinerten Steiner-Formel (142) lassen sich die Formeln (127) und (138) für das Kapazitätsfunktional bzw. die Kontaktverteilungsfunktion spezifizieren, die in den Theoremen 6.16 und 6.17 für allgemeine stationäre ZAM hergeleitet wurden.

**Korollar 6.6**

- Sei  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  ein Boolesches Modell mit der (Keim-) Intensität  $\lambda$  und mit isotropen Körnern  $\Xi_1, \Xi_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$ , so dass

$$\mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \oplus B(o, r)) < \infty \quad \forall r > 0. \quad (147)$$

- Dann gilt für das Kapazitätsfunktional  $\mathbf{T}_{\Xi} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$

$$\mathbf{T}_{\Xi}(C) = 1 - \exp\left(-\lambda \sum_{k=0}^d \alpha_{dk} \mathbb{E} V_{d-k}(\Xi_1) V_k(C)\right) \quad \forall C \in \mathcal{K} \quad (148)$$

- und für die Kontaktverteilungsfunktion  $H_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  mit dem (konvexen) strukturierenden Element  $B \in \mathcal{K}$

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^d \alpha_{dk} r^k \mathbb{E} V_{d-k}(\Xi_1) V_k(B)\right) \quad \forall r \geq 0. \quad (149)$$

**Beweis**

- Aus (127) und (142) ergibt sich, dass für jedes  $C \in \mathcal{C}$

$$\mathbf{T}_{\Xi}(C) \stackrel{(127)}{=} 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \oplus \check{C})) \stackrel{(142)}{=} 1 - \exp\left(-\lambda \sum_{k=0}^d \alpha_{dk} \mathbb{E} V_{d-k}(\Xi_1) V_k(C)\right).$$

- Auf die gleiche Weise ergibt sich aus (138) und (142), dass für jedes  $r \geq 0$

$$\begin{aligned} H_B(r) &\stackrel{(138)}{=} 1 - \exp\left(-\lambda (\mathbb{E} \nu_d(\Xi_1 \oplus r\check{B}) - \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1))\right) \\ &\stackrel{(142)}{=} 1 - \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^d \alpha_{dk} \mathbb{E} V_{d-k}(\Xi_1) V_k(r\check{B})\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^d \alpha_{dk} r^k \mathbb{E} V_{d-k}(\Xi_1) V_k(B)\right), \end{aligned}$$

weil  $V_k(r\check{B}) = r^k V_k(B)$  für beliebige  $k \in \{0, \dots, d\}$  und  $B \in \mathcal{K}$  (vgl. Korollar 6.4).  $\square$

**Beachte**

- Für die Kontaktverteilungsfunktion  $H_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  mit dem strukturierenden Element  $B \in \mathcal{K}'$  ergibt sich aus Korollar 6.6 unter Berücksichtigung von (75) und (76), dass

– für  $d = 2$

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\lambda \left(\frac{\mathbb{E} \ell(\Xi_1) \ell(B)}{2\pi} r + \nu_2(B) r^2\right)\right) \quad \forall r \geq 0 \quad (150)$$

– und für  $d = 3$

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\lambda \left(\frac{\mathbb{E} s(\Xi_1) \beta(B)}{2} r + \frac{\mathbb{E} \beta(\Xi_1) s(B)}{2} r^2 + \nu_3(B) r^3\right)\right) \quad \forall r \geq 0, \quad (151)$$

wobei  $\ell(B) = 2V_1(B)$  die Randlänge von  $B \subset \mathbb{R}^2$  sowie  $s(B) = 2V_2(B)$  und  $\beta(B) = V_1(B)/2$  die Oberfläche bzw. die mittlere Breite von  $B \subset \mathbb{R}^3$  bezeichnet.

- Sei  $B \subset \mathbb{R}^d$  eine Strecke mit Länge 1. Für die lineare Kontaktverteilungsfunktion  $H_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  ergibt sich dann aus Korollar 6.6, dass

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\lambda \frac{\kappa_{d-1}}{d \kappa_d} \mathbb{E} s(\Xi_1) r\right) \quad \forall r \geq 0, \quad (152)$$

wobei  $s(\Xi_1) = 2V_{d-1}(\Xi_1)$  die „Oberfläche“ von  $\Xi_1$  bezeichnet.

- Für die sphärische Kontaktverteilungsfunktion  $H_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  mit  $B = B(o, 1)$  ergibt sich aus den Theoremen 6.9 und 6.17, dass
  - für jedes  $d \geq 1$

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\lambda \sum_{j=0}^{d-1} \kappa_{d-j} \mathbb{E} V_j(\Xi_1) r^{d-j}\right) \quad \forall r \geq 0, \quad (153)$$

ohne dass dabei vorausgesetzt werden muss, dass die Körner  $\Xi_1, \Xi_2, \dots$  des Booleschen Modells  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  isotrop sind.

- Wenn  $P(\Xi_1 \neq \emptyset) = 1$ , dann ergibt sich aus (153), dass für  $d = 2$

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\lambda (\mathbb{E} \ell(\Xi_1) r + \pi r^2)\right) \quad \forall r \geq 0 \quad (154)$$

und für  $d = 3$

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\lambda \left(\mathbb{E} s(\Xi_1) r + 2\pi \mathbb{E} \beta(\Xi_1) r^2 + \frac{4\pi}{3} r^3\right)\right) \quad \forall r \geq 0. \quad (155)$$

## Beispiele

- Wir betrachten zunächst den planaren Fall  $d = 2$ .

### 1. Isotrope Poissonsche Streckensysteme im $\mathbb{R}^2$

- Sei  $\Xi_1$  eine zufällige Strecke mit einem Endpunkt im Nullpunkt, mit gleichverteilter Richtung und mit der mittleren Länge  $\delta = \mathbb{E} \nu_1(\Xi_1)$ .
- Für die lineare Kontaktverteilungsfunktion des Booleschen Modells  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  ergibt sich dann aus (152), dass

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\frac{2\lambda\delta}{\pi} r\right) \quad \forall r \geq 0. \quad (156)$$

- Für die sphärische Kontaktverteilungsfunktion mit  $B = B(o, 1)$  ergibt sich aus (154), dass

$$H_B(r) = 1 - \exp(-\lambda r (2\delta + \pi r)) \quad \forall r \geq 0. \quad (157)$$

- Beachte: Die Formeln (154) und (157) gelten auch für Poissonsche Streckensysteme mit einer beliebigen (nicht notwendig isotropen) Richtungsverteilung.

### 2. Poissonsche Kreissysteme im $\mathbb{R}^2$

- Sei  $\Xi_1 = B(o, R_1)$  ein Kreis mit zufälligem Radius  $R_1 : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ , so dass  $\mathbb{E} R_1^2 < \infty$ .
- Für die lineare Kontaktverteilungsfunktion ergibt sich dann aus (152), dass

$$H_B(r) = 1 - \exp(-2\lambda \mathbb{E} R_1 r) \quad \forall r \geq 0. \quad (158)$$

- Für die sphärische Kontaktverteilungsfunktion mit  $B = B(o, 1)$  ergibt sich, dass

$$H_B(r) = 1 - \exp(-\lambda r (2 \mathbb{E} R_1 + r)) \quad \forall r \geq 0. \quad (159)$$

3. *Quadratische Kontaktverteilungsfunktion*

- Sei  $\Xi_1 : \Omega \rightarrow \mathcal{K}$  eine beliebige isotrope ZAM, so dass  $P(\Xi_1 \neq \emptyset) = 1$  und  $\mathbb{E} \text{diam}^2(\Xi_1) < \infty$ , wobei  $\text{diam}(B) = \max\{|x - y| : x, y \in B\}$  den maximalen Abstand zweier Punkte in  $B \subset \mathbb{R}^2$  bezeichnet.
- Für die quadratische Kontaktverteilungsfunktion mit  $B = [0, 1]^2$  gilt dann

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{2\mathbb{E} \ell(\Xi_1)}{\pi} r + r^2\right)\right) \quad \forall r \geq 0, \quad (160)$$

wobei  $\mathbb{E} \ell(\Xi_1)$  die mittlere Randlänge des (Einzel-) Kornes  $\Xi_1$  ist.

- Sei nun  $d = 3$ . Aus (155) ergeben sich dann die folgenden Formeln für die sphärische Kontaktverteilungsfunktion  $H_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  mit  $B = B(o, 1)$ .

1. *Poissonsche Streckensysteme im  $\mathbb{R}^3$* 

- Sei  $\Xi_1$  eine zufällige Strecke im  $\mathbb{R}^3$  mit einem Endpunkt im Nullpunkt, mit einer beliebigen Richtungsverteilung und mit der mittleren Länge  $\delta = \mathbb{E} \nu_1(\Xi_1)$ .
- Dann gilt

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\lambda \pi r^2 \left(\delta \frac{4r}{3} r\right)\right) \quad \forall r \geq 0. \quad (161)$$

2. *Poissonsche Kugelsysteme*

- Sei  $\Xi_1 = B(o, R_1)$  eine Kugel mit zufälligem Radius  $R_1 : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ , so dass  $\mathbb{E} R_1^3 < \infty$ .
- Dann gilt

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\lambda \pi r \left(4 \mathbb{E} R_1^2 + 4r \mathbb{E} R_1 + \frac{4r^2}{3}\right)\right) \quad \forall r \geq 0. \quad (162)$$

3. *Poissonsche Kreisscheiben-Systeme im  $\mathbb{R}^3$* 

- Sei  $\Xi_1$  eine Kreisscheibe im  $\mathbb{R}^2$  mit zufälligem Radius  $R_1 : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ , so dass  $\mathbb{E} R_1^3 < \infty$ , und mit einer beliebigen Richtungsverteilung.
- Dann gilt

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\lambda \pi r \left(\pi \mathbb{E} R_1^2 + \pi r \mathbb{E} R_1 + \frac{4r^2}{3}\right)\right) \quad \forall r \geq 0. \quad (163)$$

6.5.4 *Minimum-Kontrast-Schätzer*

- Sei  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + S_n)$  ein Boolesches Modell in  $\mathbb{R}^d$  mit konvexen und kompakten (jedoch nicht notwendig isotropen) Körnern  $\Xi_1, \Xi_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathcal{K}$ , so dass

$$P(\Xi_1 \neq \emptyset) = 1. \quad (164)$$

- Mit Hilfe der Formel (153) für die sphärische Kontaktverteilungsfunktion  $H_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  des Booleschen Modells  $\Xi$  können wir so genannte *Minimum-Kontrast-Schätzer*  $\hat{\lambda}_W, \hat{\delta}_{1,W}, \dots, \hat{\delta}_{d,W}$  für die Intensität  $\lambda$  und die mittleren inneren Volumina  $\delta_1 = \mathbb{E} V_1(\Xi_1), \dots, \delta_d = \mathbb{E} V_d(\Xi_1)$  der Körner gewinnen.
- Hierfür betrachten wir zunächst für ein  $m \geq d$  und für geeignet gewählte Werte  $r_1, \dots, r_m > 0$  die in (65) eingeführten Schätzer  $\hat{H}_{B,W}(r_1), \dots, \hat{H}_{B,W}(r_m)$  für  $H_{B,W}(r_1), \dots, H_{B,W}(r_m)$ ,

– wobei

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{B,W}(r_i) &= 1 - \frac{1 - \widehat{p}_{B,W}(r_i)}{1 - \widehat{p}_W} & \forall i = 1, \dots, m, \\ \widehat{p}_{B,W}(r) &= \frac{\nu_d(W_{B,r}^* \cap (\Xi \oplus r\check{B}))}{\nu_d(W_{B,r}^*)} & \text{mit } W_{B,r}^* = W \ominus r\check{B}\end{aligned}$$

– und

$$\widehat{p}_W = \frac{\nu_d(W \cap \Xi)}{\nu_d(W)} \quad (165)$$

der in (54) eingeführte Schätzer des Volumenanteils  $p = P(o \in \Xi)$  des Booleschen Modells  $\Xi$  ist.

- Andererseits ergibt sich aus (153) und (164), dass

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\lambda \left(\kappa_d r^d + \sum_{j=1}^{d-1} \kappa_{d-j} \delta_j r^{d-j}\right)\right) \quad \forall r \geq 0 \quad (166)$$

bzw.

$$-\log(1 - H_B(r)) = \lambda \left(\kappa_d r^d + \sum_{j=1}^{d-1} \kappa_{d-j} \delta_j r^{d-j}\right) \quad \forall r \geq 0. \quad (167)$$

- Um einen Schätzer  $\widehat{\theta} = (\widehat{\lambda}_W, \widehat{\delta}_{1,W}, \dots, \widehat{\delta}_{d-1,W})$  für  $\theta = (\lambda, \delta_1, \dots, \delta_{d-1}) \in \Theta = [0, \infty)^d$  zu gewinnen,

– betrachten wir die *Kontrast-Funktion*  $\Delta : \mathcal{F} \times \Theta \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$\Delta_W(\xi, \theta) = \sum_{i=1}^m \left( \log(1 - \widehat{H}_{B,W}(r_i, \xi)) - \lambda \left( \kappa_d r_i^d + \sum_{j=1}^{d-1} \kappa_{d-j} \delta_j r_i^{d-j} \right) \right)^2, \quad (168)$$

wobei  $\xi \in \mathcal{F}$  eine Realisierung von  $\Xi$  bezeichnet, die in dem Fenster  $W \subset \mathbb{R}^d$  beobachtet wird.

– Dabei sagt man, dass durch den Ansatz

$$\widehat{\theta}(\xi) = \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} \Delta_W(\xi; \theta) \quad (169)$$

ein *Minimum-Kontrast-Schätzer*  $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(\Xi)$  für  $\theta = (\lambda, \delta_1, \dots, \delta_{d-1})$  gegeben ist.

- Mit Hilfe der Formeln

$$p = 1 - \exp(-\lambda \delta_d) \quad \text{und} \quad \delta_d = \frac{\log(1 - p)}{\lambda}$$

für den Volumenanteil  $p$  bzw. das mittlere (Einzel-) Kornvolumen  $\delta_d = \mathbb{E} \nu_d(\Xi_1)$ , vgl. Theorem 6.16, ergibt sich nun ein so genannter *Plug-in-Schätzer*  $\widehat{\delta}_d$  für  $\delta_d$ . Dabei setzen wir

$$\widehat{\delta}_d = \frac{\log(1 - \widehat{p}_W)}{\widehat{\lambda}_W}, \quad (170)$$

wobei  $\widehat{p}_W$  der in (165) gegebene „natürliche“ Schätzer für  $p$  und  $\widehat{\lambda}_W$  in (169) eingeführte Minimum-Kontrast-Schätzer für  $\lambda$  ist.

### Beispiel

- Wenn  $d = m = 2$ , dann gilt für die in (168) eingeführte Kontrast-Funktion  $\Delta : \mathcal{F} \times [0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)$ , dass

$$\Delta_W(\xi, \lambda, \delta_1) = \sum_{i=1}^2 \left( \log(1 - \widehat{H}_{B,W}(r_i, \xi)) - 2r_i \lambda \delta_1 - \pi r_i^2 \lambda \right)^2,$$

- Wenn dabei  $r_1, r_2 > 0$  geeignet gewählt werden, so dass  $r_1 \neq r_2$ , dann ist es nicht schwierig, das in (169) formulierte Minimierungsproblem zu lösen.