

Stochastik II

Übungsblatt 1

Abgabe der Übungsblätter: Mi. 26.10.2012 vor den Übungen

Aufgabe 1 (2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 Punkte)

Seien $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen über (Ω, \mathcal{A}, P) mit

$$\mathbb{E}|X| < \infty, \quad \mathbb{E}|Y| < \infty, \quad \mathbb{E}|XY| < \infty,$$

und sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ eine beliebige Teil- σ -Algebra von \mathcal{A} . Dann gilt

- (a) $\mathbb{E}(X|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}X, \mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = X,$
- (b) $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R},$
- (c) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}),$ falls $X \leq Y,$
- (d) $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G}),$ falls Y eine $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Zufallsvariable ist,
- (e) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1),$ falls \mathcal{G}_1 und \mathcal{G}_2 Teil- σ -Algebren von \mathcal{A} sind mit $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2,$
- (f) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X,$ falls die σ -Algebra \mathcal{G} und $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ unabhängig sind, d. h., falls $P(A \cap A') = P(A)P(A')$ für beliebige $A \in \mathcal{G}$ und $A' \in \sigma(X).$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien X und Y Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P).$ Die bedingte Varianz $\text{var}(Y|X)$ ist definiert durch

$$\text{Var}(Y|X) = \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y|X))^2|X).$$

Zeige, dass

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{var}(Y|X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y|X)).$$

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 Punkte)

Betrachte die zwei Zufallsvariablen X und Y über dem Wahrscheinlichkeitsraum $([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]), \frac{1}{2}\nu)$ mit $\mathbb{E}|X| < \infty$, wobei ν das Lebesguemaß auf $[-1, 1]$ bezeichnet. Bestimme für die folgenden Zufallsvariablen jeweils $\sigma(Y)$ und eine Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}(X|Y)$.

- (a) $Y(\omega) = \omega^5$ (Hinweis: Zeige zunächst, dass $\sigma(Y) = \mathcal{B}([-1, 1])$)
- (b) $Y(\omega) = (-1)^k$ für $\omega \in [\frac{k-3}{2}, \frac{k-2}{2})$, $k = 1, \dots, 4$ und $Y(1) = 1$
(Hinweis: Es gilt $\mathbb{E}(X|B) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_B)}{P(B)}$ für $B \in \sigma(Y)$ mit $P(B) > 0$)
- (c) Berechne die Verteilung von $\mathbb{E}(X|Y)$ in (a) und (b), falls $X \sim U[-1, 1]$.