Prof. Dr. V. Schmidt
G. Gaiselmann
O. Stenzel

WS 2011/2012
25.01.2012

# Stochastik II
## Übungsblatt 11

Abgabe der Übungsblätter: Mi. 01.02.2012 vor den Übungen

**Aufgabe 1** (5 Punkte)
Betrachte die folgende Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(t) = e^{\psi(t)} \quad , \text{wobei} \quad \psi(t) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k}(\cos(2^k t) - 1)\,.$$

Zeige, dass $\varphi(t)$ die charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Verteilung ist.

Hinweis: Betrachte die Lévy-Chintschin-Darstellung mit Maß $\nu(\{\pm 2^k\}) = 2^{-k}, k \in \mathbb{Z}$.

**Aufgabe 2** ($5+2$ Punkte)
Gegeben sei eine reellwertige Zufallsvariable $X$ mit Verteilungsfunktion $F$ und charakteristischer Funktion $\varphi$.

(a) Es gelte $P$-fast sicher $|X| \leq c$ für ein $c < \infty$. Zeige: Die Zufallsvariable $X$ ist genau dann unbegrenzt teilbar, wenn $X$ $P$-fast sicher konstant ist.

Hinweis: Zeige $P(|X_{j,n}| \leq \frac{c}{n}) = 1$ für $\sum_{j=1}^{n} X_{j,n} \stackrel{d}{=} X$, und folgere $\mathrm{Var}(X) = 0$.

(b) Gib ein Beispiel (mit Begründung) für eine Verteilung an, die nicht unbegrenzt teilbar ist.

**Aufgabe 3** (5 Punkte)
Gegeben sei eine reellwertige Zufallsvariable $X$ mit Verteilungsfunktion $F$ und charakteristischer Funktion $\varphi$. Zeige: Falls $X$ unbegrenzt teilbar ist, dann gilt $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(s)| = \mathbb{1}_{\{\varphi(s)\neq 0\}}$ für alle $s \in \mathbb{R}$, falls $\varphi(s) = \big(\varphi_n(s)\big)^n$. Zeige, dass daraus folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) = \mathbb{1}_{\{\varphi(s)\neq 0\}}$. Benutze dabei ohne Beweis, dass für eine Folge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} c_n = e^{i\theta}$, wobei $0 < \theta < 2\pi$, der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} c_n^n$ nicht existiert.