Prof. Dr. V. Schmidt
G. Gaiselmann
O. Stenzel

WS 2011/2012
16.11.2012

Stochastik II
Übungsblatt 3

Abgabe der Übungsblätter: Mi. 23.11.2012 vor den Übungen

Aufgabe 1 $(1 + 2 + 4$ Punkte)

(a) Gegeben sei eine Folge $(X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to ([0, \infty), \mathcal{B}([0, \infty])), i = 1, \ldots, n)$ von *iid* Zufallsvariablen und bezeichne $\hat{l}_{X_i}(s) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-sX_i}),\ s \geq 0$, die Laplace-Stieltjes Transformatierte von X_i. Zeige, dass

$$\hat{l}_{\sum_{i=1}^n X_i}(s) = \left(\hat{l}_{X_1}(s)\right)^n,\ s \geq 0.$$

(b) Sei $X \sim Exp(\lambda),\ \lambda > 0$. Zeige, dass

$$\hat{l}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}\ \forall s \geq 0.$$

(c) Gegeben sei eine Folge $(X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to ([0, \infty), \mathcal{B}([0, \infty])), i \in \mathbb{N})$ von *iid* Zufallsvariablen, wobei $X_i \sim Exp(\lambda),\ \lambda > 0$. Weiterhin gegeben sei eine davon stochastisch unabhängige $Geo^+(p)$-verteilte Zufallsvariable $N : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{N}_+, 2^{N_+})$, $p \in (0, 1)$. Bestimme mit Hilfe der Laplace-Stieltjes Transformation die Verteilung von $\sum_{i=1}^N X_i$.

Hinweis. Die Laplace-Stieltjes-Transformierte einer nicht negativen Zufallsvariable ist stets wohldefiniert und bestimmt die Verteilung eindeutig, d. h. seien X, Y zwei nicht-negative Zufallsvariablen mit $\hat{l}_X(s) = \hat{l}_Y(s)\ \forall s \in (0, \infty)$, so gilt $P_X = P_Y$.

Aufgabe 2 (4 + 2)
Sei $\{N_t\}$ ein verzögerter Erneuerungsprozess mit $0 < \mu < \infty$ und es gelte $F_1(x) = F^s(x) \ \forall \ x \geq 0$. Weiterhin sei die Verteilung der Zufallsvariablen $T(t) = S_{N_t+1} - t$ unabhängig vom Zeitpunkt $t \geq 0$.

(a) Zeige: Die gemeinsame Verteilung der Zuwächse

$$\left(N_{t_1+t} - N_{t_0+t}, \ldots, N_{t_n+t} - N_{t_{n-1}+t}\right), \ 0 \leq t_1 < \cdots < t_n \in \mathbb{R}, \ n \geq 1,$$

ist unabhängig von $t \geq 0$.

(b) Zeige:

$$P\left(T(t) \leq x\right) = F^s(t+x) - F^s(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left(F(t+x-y) - F(t-y)\right) \mathrm{d}\left(F^s * F^{*(n-1)}\right)(y), \ x \geq 0.$$

Aufgabe 3 (4)
Zeige: Für die Erneuerungsfunktion $H(t) = \mathbb{E}N_t$ eines Erneuerungsprozesses $\{N_t\}$ gilt die folgende Abschätzung

$$F(t) \leq H(t) \leq F(t)/(1 - F(t)) \text{ für jedes } t \in \mathbf{D} = \{t \geq 0 : F(t) < 1\},$$

wobei F die Verteilungsfunktion der Zwischenankunftszeiten ist.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2)
Sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess. Zeige:

- Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig und additiv (d. h. $f(v + w) = f(v) + f(w) \ \forall v, w \in \mathbb{R}$) ist, gilt: $\exists \ \beta \in \mathbb{R}$, so dass $f(t) = \beta t$.
- Wenn $\{X_t, t \geq 0\}$ stationäre Zuwächse hat und die Funktion $f(t) = \mathbb{E}X_t$ stetig in t ist, dann ist $f(t)$ linear in t, d.h. $\exists \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $f(t) = \alpha + \beta t$.
- Wenn $\{X_t, t \geq 0\}$ stationäre und unabhängige Zuwächse hat und die Funktion $g(t) = \mathrm{Var}(X_t - X_0)$ stetig in $t \geq 0$ (und nicht identisch Null) ist, dann gilt:

$$\exists \ \sigma^2 > 0, \text{ so dass } \mathrm{Var}(X_{s+t} - X_s) = \sigma^2 t \text{ für beliebige } s, t \geq 0$$

.