Prof. Dr. V. Schmidt
G. Gaiselmann
O. Stenzel

WS 2011/2012
23.11.2011

Stochastik II
Übungsblatt 4

Abgabe der Übungsblätter: Mi. 30.11.2011 vor den Übungen

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei $\{N_t\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ.
Zeige: Für beliebige $t > 0$ und $n = 1, 2, \ldots$ gilt

$$f_{S_1,\ldots,S_n}(t_1, \ldots, t_n | N_t = n) = \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{\{0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le t\}},$$

d.h. $(S_1, \ldots, S_n)$ hat unter der Bedingung $N_t = n$ die gleiche Verteilung wie der Vektor der Ordnungsstatistiken von n unabhängigen auf $[0, t]$ gleichverteilten Zufallsvariablen.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 + 1 Punkte)(Wartezeitenparadoxon)
Für einen Erneuerungsprozess $\{N_t\}$ heißt

(i) $T(t) = S_{N_t+1} - t$ der Exzess,

(ii) $C(t) = t - S_{N_t}$ das aktuelle Alter und

(iii) $D(t) = T(t) + C(t) = T_{N_t+1}$ die (aktuell) laufende (Gesamt-) Pausenzeit zum Zeitpunkt t.

Sei nun $\{N_t\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ.

(a) Berechne die Verteilung des Exzess $T(t)$.

(b) Zeige, dass die Verteilung des aktuellen Alters durch die Dichte $f_{C(t)}(s) = \lambda e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{\{s \le t\}}$ gegeben ist.

(c) Zeige, dass $P(D(t) \le x) = (1 - (1 + \lambda \min\{t, x\})e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{\{x \ge 0\}}$.

(d) Um $\mathbb{E}\, T(t)$ zu bestimmen, könnte man bei flüchtigem Betrachten wie folgt argumentieren: Im Mittel liegt t in der Mitte der umgebenden Pausenzeit (S_{N_t}, S_{N_t+1}). Das bedeutet $\mathbb{E}\, T(t) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(S_{N_t+1} - S_{N_t}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\, T_{N_t+1} = \frac{1}{2\lambda}$. In Anbetracht des

Ergebnisses aus Teil (a) kann dieses Argument nicht stimmen. Wo liegt der Fehler in der Argumentation?

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Seien $\{N_t^{(1)}\}$ und $\{N_t^{(2)}\}$ unabhängige Poisson-Prozesse mit den Intensitäten λ_1 bzw. λ_2. Die Unabhängigkeit soll in diesem Fall bedeuten, dass die Folgen $T_1^{(1)}, T_2^{(1)} \ldots$ und $T_1^{(2)}, T_2^{(2)} \ldots$ unabhängig sind. Zeige, dass $\{N_t\} = \{N_t^{(1)} + N_t^{(2)}\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda_1 + \lambda_2$ ist.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sei $f : ([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty))) \to ([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)))$ eine messbare, beschränkte Funktion und sei $\lambda > 0$, so dass $\lambda \geq f(x)\ \forall x \geq 0$. Weiterhin sei $S_n = \sum_{i=1}^n T_i,\ n \geq 1$, mit $T_i\ iid \sim Exp(\lambda)$. Außerdem sei $U_n,\ n \geq 1,\ iid \sim U[0,1]$, so dass $\{U_n\}$ und $\{S_n\}$ unabhängig sind.
Zeige, dass der Prozess $\{N_t,\ t \geq 0\}$ mit

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}} \mathbb{1}_{\{U_n \leq \frac{f(S_n)}{\lambda}\}}$$

- unabhängige Zuwächse besitzt und
- die Zuwächse $N_{t_2} - N_{t_1},\ 0 \leq t_1 < t_2$, Poisson-verteilt sind mit Parameter $g(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$.