Prof. Dr. V. Schmidt WS 2011/2012

G. Gaiselmann 14.12.2011

O. Stenzel

Stochastik II
Übungsblatt 7

Abgabe der Übungsblätter: Mi. 21.12.2011 vor den Übungen

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Gegeben seien die Anfangsverteilung $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_\ell)$ und die Übergangsmatrix $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in E}$ mit $E = \{1, ..., \ell\}$. Die Folge $Z_0, Z_1, ...$ sei eine Folge von unabhängigen und identisch auf $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Definiere die E-wertige Zufallsvariable X_0 durch:

$$X_0 = k \;\Leftrightarrow\; Z_0 \in \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \right], \; k = 1, \ldots, \ell,$$

und die Zufallsvariablen $X_1, X_2, ...$ rekursiv über $X_n = \varphi(X_{n-1}, Z_n)$, wobei die Funktion $\varphi : E \times [0,1] \to E$ gegeben ist durch

$$\varphi(i,z) = \sum_{k=1}^{\ell} k \cdot \mathbb{1}\left(\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij} < z \leq \sum_{j=1}^{k} p_{ij} \right).$$

Zeige, dass die Folge $\{X_n\}$ eine zeitdiskrete, homogene Markov-Kette mit Anfangsverteilung α und Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\{X_t : t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess auf dem abzählbar unendlichen Zustandsraum $E = \mathbb{Z}$ mit stationären und unabhängigen Zuwächsen, die von X_0 unabhängig sind. Es gelte ferner $\lim_{h \downarrow 0} P(X_h - X_0 = k) = \delta_{0k}$. Zeige, dass $\{X_t : t \geq 0\}$ ein Markov-Prozess ist.

Beachte: Die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen lauten in diesem Fall $p_{ij}(h_1 + h_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{ik}(h_1) p_{kj}(h_2) \; \forall i, j \in \mathbb{Z}, \; h_1, h_2 \geq 0$.

Aufgabe 3 (4 + 4 Punkte)
Seien $\lambda, \mu > 0$ und $\{X_t : t \geq 0\}$ ein Markov-Prozess auf dem Zustandsraum $E = \{1, 2\}$ mit Intensitätsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $p_{ij}(h)$ für $i, j \in \{1, 2\}$ als Lösungen der Kolmogorovschen Vorwärtsgleichungen.

(b) Berechne $\mathbf{Q^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und mit diesem Ergebnis die Matrixexponentialfunktion $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{Q^n}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei E ein endlicher Zustandsraum. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) Die Übergangsfunktion $\{\mathbf{P}(h),\ h \geq 0\}$ ist irreduzibel.

(b) Für beliebige $i, j \in E$ mit $i \neq j$ gibt es eine Folge von Zuständen $i_1, \ldots, i_{n-1} \in E$ mit $i_k \neq i_l$, so dass $q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \ldots q_{i_{n-1} j} > 0$.