

Life cycle management – a discrete and a continuous approach

Zusammenfassung der Masterarbeit an der Universität Ulm

Julian-Patrick Nebel

„Jüngere sollten einen höheren Anteil ihres Vermögens in Aktien investieren!“

Dies ist eine im Moment sehr beliebte Investment-Empfehlung. Insbesondere sogenannte Target Date Funds (TDFs) folgen diesem Prinzip. TDFs sind Funds, deren Auszahlung an ein bestimmtes Datum gekoppelt ist, zum Beispiel Renten.

In dieser Arbeit wird untersucht, inwieweit dieser Empfehlung Glauben geschenkt werden sollte. Besonderes Augenmerk wird dabei auf Modelle gelegt, welche zusätzlich zu einem möglichen Investment in ein risikobehaftetes und ein risikoloses Papier, sowohl das Einkommen des Investors, als auch eine mögliche Absicherung durch eine Lebensversicherung mit einbeziehen. Dazu werden mehrere Modelle betrachtet, die sich in zwei Gruppen aufteilen lassen. Zunächst werden Modelle in diskreter Zeit betrachtet, bevor zeitstetige Modelle betrachtet werden.

Diskrete Zeit

Der erste Teil beginnt mit einer detaillierten Ausarbeitung des Papers „Horizon length and portfolio risk“ von Christian Gollier und Richard J. Zeckhauser.

Anhand eines einfachen Zwei-Perioden-Modells wird gezeigt, dass der jüngere Investor mehr in Aktien investieren soll genau dann, wenn die Risiko-Toleranz (dies ist das Inverse der Risiko-Aversion nach Pratt) seiner Nutzenfunktion konvex ist. Dabei ist die Gegenthese ebenfalls wahr: Er sollte weniger in Aktien investieren genau dann, wenn die Risiko-Toleranz konkav ist.

Somit ist die Empfehlung von Beginn nur unter gewissen Umständen richtig.

Im darauf folgenden wird das Zwei-Perioden-Modell auf mehrere Perioden erweitert. Es wurde untersucht, inwieweit die Ergebnisse aus dem Zwei-Perioden-Modell übertragen werden können. Dies ist allerdings nur vereinfacht möglich.

Mit diesem Modell konnte außerdem ein sehr bekanntes Ergebnis nachgebildet werden, das unter anderem Merton gezeigt hat: Unter der Verwendung einer Nutzenfunktion mit konstanter relativer Risiko-Aversion (CRRA-Fall) ist der Anteil des Vermögens, das in das risikobehaftete Papier investiert sein sollte, unabhängig von dem Vermögen und somit dem Alter des Investors. Es sei bemerkt, dass dieses Ergebnis unter sehr vereinfachten Annahmen folgt.

Des Weiteren wird dieses Modell um ein risikoloses Einkommen erweitert. Dabei kommen wir zu der Definition des Human Capital. Dies ist der Barwert aller zukünftigen Einkünfte. In unserem Fall wäre das die Summe des zukünftigen diskontierten Einkommens.

Es wird gezeigt, dass im CRRA-Fall der jüngere Investor mehr in Aktien investieren sollte. Somit gibt es einen Unterschied, ob das Human Capital betrachtet wird oder nicht.

Anschließend wird risikobehaftetes Einkommen betrachtet, welches zudem mit dem Markt korreliert. Dazu wird das Modell aus dem Paper „Human capital, asset allocation and life insurance“ von Roger G. Ibbotson et al. betrachtet. Dieses Modell wurde bewusst verwendet, da es den Schritt der Rückwärtsinduktion, der sehr viel Rechenleistung beansprucht, vernachlässigt. Zudem wurde für den Konsum ein konstanter Anteil des Einkommens verwendet.

In dieser Arbeit wurde das Modell nachgebildet und implementiert. Dadurch konnten Ergebnisse nachgebildet werden und Modell-Parameter verändert werden um weitere Erkenntnisse zu erhalten.

Erkenntnis dieses Modells ist zunächst, dass der Anteil des Vermögens, der in das risikobehaftete Papier investiert sein sollte, nur unter gewissen Voraussetzungen im Alter abnimmt. Dazu zählen eine moderate Korrelation des Einkommens mit dem Markt (nahe 0) und eine nicht zu

hohe Varianz des risikobehafteten Papiers. Wird die Korrelation nahe 1 gewählt, können Fälle konstruiert werden, in denen der Anteil mit dem Alter steigt. Allerdings kann gezeigt werden, dass sich die Korrelation in den meisten Fällen um 0 befindet.

Des Weiteren kann eine Abhängigkeit zwischen dem Human Capital und der Höhe der Versicherungssumme der abzuschließenden Lebensversicherung gezeigt werden. Demnach ist die Versicherungssumme ein nahezu konstanter Anteil des Human Capital.

Somit kann die Lebensversicherung als direkte Absicherung (engl. Hedge) des Human Capital gesehen werden. Dies ist intuitiv nachvollziehbar, da die Lebensversicherung nur im Fall des Todes zahlt, genau dann, wenn das Human Capital erlischt.

Stetige Zeit

Im zweiten Teil werden zeitstetige Modelle betrachtet. Zunächst wird ein Modell betrachtet, das Robert C. Merton Anfang der 70er Jahre entwickelt hat. Dieses betrachtet ein Lebenszyklusmodell in stetiger Zeit, welches nur das reine Investment-Problem betrachtet.

Gezeigt wurde sowohl die Herleitung der dazugehörigen Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (HJB-Gleichung), eine Darstellung des Problems in Form einer Differentialgleichung, als auch die Lösung dieser. Durch Anwendung des CRRA-Falls wurde einmal mehr gezeigt, dass der Anteil in das risikobehaftete Papier unabhängig vom Alter ist.

Dieses Modell wurde anschließend um ein unsicheres Einkommen und um die Möglichkeit einer Lebensversicherung erweitert. Dafür wurde das Modell in dem Paper „Portfolio choice and life insurance: The CRRA case“ von Huang, Milevsky und Wang betrachtet. Auch hier wurde die dazugehörige HJB-Gleichung hergeleitet. Diese ist um einiges komplizierter und nicht analytisch lösbar. Sie kann allerdings numerisch gelöst werden. Die Lösung dieser, als auch die Implementierung wurden nicht in dieser Arbeit durchgeführt.

Es wurden allerdings die Ergebnisse des Papers dargestellt und untersucht. Ein Vergleich mit den Ergebnissen des diskreten Falls zeigt, dass eine Ähnlichkeit der Ergebnisse erkennbar ist. In den

veröffentlichten Ergebnissen sollte der jüngere Investor immer mehr in das risikobehaftete Papier investieren.

Somit kann abschließend gesagt werden, dass die Empfehlung „Jüngere sollten einen höheren Anteil ihres Vermögens in Aktien investieren!“ nicht immer wahr ist.