

Analysis of Surplus in Life Insurance based on Thiele's Differential Equation

Zusammenfassung der Masterarbeit an der Universität Ulm

Marko Dieterle

Motivation

Der Überschuss ist ein Standardfeature eines Lebensversicherungsvertrags, welches, sofern eine entsprechende Beteiligung im Vertrag vorgesehen ist, dazu führt, dass die über die Laufzeit anfallenden Zahlungsströme für den Versicherungsnehmer besser ausfallen als bei Abschluss zwischen den Parteien vereinbart wurde. Obwohl der Überschuss als logische Konsequenz vorsichtiger Kalkulationen des Lebensversicherers konzeptionell leicht zu greifen scheint, ist die mathematisch-wissenschaftliche Literatur nicht so klar in dieser Hinsicht, was sich in signifikanten Unterschieden oder sogar Inkompatibilitäten der verwendeten Überschussmodelle ausdrückt. Diese Unterschiede und Inkompatibilitäten lassen sich auf mehrere, zum Teil miteinander zusammenhängende Gründe zurückführen. Wir heben in dieser Zusammenfassung zwei hervor:

- Der Lebensversicherungsmarkt ist ein dynamischer, nicht global harmonisierter Markt, und Harmonisierungsbestrebungen wie sie beispielsweise in Solvency II gedanklich verankert sind, sind ein relativ neues Phänomen. Dies führt dazu, dass die entsprechenden Modelle und ihre Annahmen unterschiedliche rechtliche Verordnungen adressieren und abbilden.
- Den zur Erstellung der Modelle verwendeten Bausteinen mangelt es häufig an zwei Merkmalen, was den Vergleich der verschiedenen Ansätze zusätzlich erschwert. Erstens ist die Terminologie nicht eindeutig, und oft werden völlig unterschiedliche Begriffe verwendet, obwohl dieselbe Sache bezeichnet wird. Zweitens, und noch wichtiger, fehlt einigen Schlüsselbausteinen eine einheitliche, anerkannte Definition.

Angesichts dieser Tatsache erschien es sinnvoll, die Masterarbeit, die sich mit der Überschussanalyse in der Lebensversicherung befasst hat, wobei der Fokus auf Ansätzen lag, die die sogenannte Thiele Differentialgleichung (DGL) in den Vordergrund stellen, von einer Basis aus zu beginnen. Und als diese Basis wurde das Arbeitspapier von Haçarız et al. (2023)

gewählt, da es den aktuellen Stand der Forschung widerspiegelt und ein regulatorisch flexibles, ökonomisch realistisches Überschussmodell vorschlägt, welches versucht, eben angedeutete Lücken in der Literatur zu schließen.

Ziele der Arbeit

Ausgehend von der Wahl verfolgte die Masterarbeit zunächst das Ziel die Standardbausteine der in der einschlägigen Literatur verwendeten Überschussmodelle, genauer gesagt den prospektiven und retrospektiven Policenwert in Markov Modellen, die Thiele DGL und das Konzept der technischen Basen zu beleuchten. Auf Basis der dabei gewonnenen Informationen sollte die Arbeit erklären wie die Überschüsse in drei betrachteten Modellen, genauer gesagt in den Modellen von Ramlau-Hansen (1988a), Haçarız et al. (2023) und Møller & Steffensen (2007, Abschnitt 2.2), entstehen und darauf aufbauend analysieren, wo die Zusammenhänge und Unterschiede zwischen den Modellen und ihren Definitionen von Überschuss liegen, wie sich die jeweiligen Überschüsse mathematisch zusammensetzen und wie die einzelnen Komponenten ökonomisch interpretiert werden können. Darüber hinaus sollten in diesem Prozess insbesondere die vielfältigen Innovationen von Haçarız et al. (2023) diskutiert und im Hinblick auf vorherige Ansätze und Definitionen bewertet werden.

Realisierung und in diesem Zuge gewonnene Einsichten

Zum Erreichen der formulierten Ziele wurde zunächst ein mathematischer Rahmen geschaffen, welchen wir über die Arbeit hinweg als *Lebensversicherungsmodell* bezeichnet haben. Da der von einem Vertrag erwirtschaftete Überschuss als Differenz zwischen zugeordneten Aktiva und Passiva verstanden werden kann, haben wir im nächsten Schritt mit den Policenwerten – prospektiv und retrospektiv – die Bausteine diskutiert, die die beiden Bilanzgrößen im Lebensversicherungsmodell abbilden. In diesem Prozess haben wir festgestellt, dass der prospektive Policenwert, der nichts anderes ist als der erwartete Barwert der künftigen Leistungen abzüglich der Prämien, in unserem Rahmen wohldefiniert ist. Im Folgenden bedeutete dies, dass Verbindlichkeiten aus Lebensversicherungsverträgen – sofern sie prospektiv betrachtet wurden, was rechtlich dem natürlichen Ansatz entspricht – ohne Definitionsabweichungen modelliert werden konnten. Da wir gezeigt haben, dass sogar eine explizite Formel existiert, war anfänglich nicht klar, warum die Passivseite der Bilanz des

Versicherers so oft in der wissenschaftlichen Literatur durch die zugehörige DGL, genauer gesagt die Thiele DGL, adressiert wird. In diesem Zusammenhang haben wir jedoch festgestellt, dass die explizite Formel, anders als die DGL, von Größen abhängt, die im Allgemeinen schwer aus dem zugrunde liegenden Datensatz zu schätzen sind. Aus diesem Grund wurde die Thiele DGL mit der zugehörigen Randbedingung im Folgenden zum zentralen Werkzeug für die Modellierung von Lebensversicherungsverbindlichkeiten. Da zugewiesene Vermögenswerte im Gegensatz zu zugewiesenen Verbindlichkeiten nicht auf zukünftigen Schätzungen beruhen, war auch ein entsprechendes retrospektives Berechnungskonzept erforderlich. Hierzu haben wir festgestellt, dass für das klassische Lebensversicherungsprodukt, die Kapitalversicherung, der traditionelle retrospektive Policenwert geeignet ist, um die einem Vertrag zugeordneten Vermögenswerte darzustellen. Wir haben jedoch erkannt, dass dieser retrospektive Policenwert schwer zu verallgemeinern ist, was zu unterschiedlichen Definitionen in der Literatur führt, die zum Teil nicht miteinander vereinbar sind. Als Beispiel für eine der möglichen Definitionen wurde die natürliche Verallgemeinerung von Hoem (1988) vorgestellt. Dabei haben wir eingesehen, dass in dieser Definition der Anfangszustand stark vergänglich sein muss – das heißt es ist unmöglich in den initialen Vertragszustand zurückzukehren, sobald der Zustand verlassen wurde – um sowohl zugewiesene Aktiva als auch zugewiesene Passiva durch die Thiele DGL beschreiben zu können. Obwohl dies immer durch eine mögliche Neudefinition des Zustandsraums erreicht werden kann, kann dies den Komplexitätsgrad des zugrunde liegenden Modells erheblich erhöhen, was wir im Falle der Berufsunfähigkeitsversicherung konkret beobachtet haben.

Im nächsten Schritt wurde das Konzept der technischen Basen, ein weiterer zentraler Baustein der Überschussmodelle aus der einschlägigen Literatur, eingehend erörtert. Zu diesem Zweck haben wir zunächst festgestellt, dass eine technische Basis – in unserem Rahmen – als Parametrisierung des Lebensversicherungsmodells verstanden werden kann, dass aber in der Lebensversicherung aufgrund der üblichen langen Vertragslaufzeiten und der zeitlichen Differenz zwischen Prämienfestsetzung und Leistungsauszahlung eine Basis nicht ausreicht, um das gezeichnete Geschäft adäquat abzubilden. Infolgedessen haben wir eingesehen, dass ein sinnvolles Überschussmodell mit mindestens zwei technischen Basen operiert, was in unserem Rahmen bedeutete, dass die zugrunde liegenden Bausteine aus unterschiedlichen Lebensversicherungsmodellen

stammen. Obwohl dies auf den ersten Blick aufgrund der entsprechenden Indizierung nur hinsichtlich Notation von Bedeutung zu sein schien, führt genau diese Schnittstellenarbeit zu einem Problem, das Haçarız et al. (2023) dazu veranlasst hat, eine neue Klassifizierung von technischen Basen vorzuschlagen. Genauer gesagt ‚versagt‘ das traditionelle Konzept des retrospektiven Policenwerts in dieser Schnittstellenarbeit im Allgemeinen insofern als dass der Gleichheitsansatz mit dem entsprechenden prospektiven Policenwert, auf dem das Konzept beruht, der retrospektiven Betrachtungsweise auf Vermögenswerte in der Lebensversicherung widerspricht. In einer intensiven Diskussion haben wir festgestellt, dass die neu vorgeschlagene Klassifizierung der technischen Basen von Haçarız et al. (2023) zwar mathematisch nicht so ‚perfekt‘ ist wie die Definition des retrospektiven Policenwerts von Hoem (1988), die neue Klassifizierung aber dennoch operativ realistischer ist, da sie unterschiedliche Kapitalvolumina, ausgedrückt durch unterschiedliche Aktiva und Passiva, und damit auch Überschüsse adäquat berücksichtigt.

Basierend auf den zuvor gewonnenen Erkenntnissen wurden die Überschüsse der durch das Lebensversicherungsmodell abgebildeten Verträge analysiert. Da sich in der wissenschaftlichen Literatur für diesen Zweck nicht nur ein, sondern mehrere Ansätze finden, wurden drei Überschussmodelle aus der einschlägigen Literatur herangezogen. Wir haben zunächst das von Ramlau-Hansen (1988a) untersuchte Überschussmodell angewandt, das auf zwei verschiedenen technischen Basen und retrospektiven Policenwerten gemäß Hoem (1988) beruht. In diesem Zusammenhang haben wir festgestellt, dass dieses Modell nur einen Bewertungsgrundsatz berücksichtigt, der nach Versicherungsvorschriften im skandinavischen Stil vorgeschrieben ist, nämlich dass Prämien und die Bewertungen von Verbindlichkeiten unter denselben Annahmen zu berechnen sind. Ausgehend von einer entsprechenden Überschussdefinition haben wir verschiedene Darstellungen des Überschusses abgeleitet, die interessante ökonomische Interpretationen ermöglicht haben. Im nächsten Schritt wurde das von Haçarız et al. (2023) vorgeschlagene Modell aufgegriffen. Hierbei wurde zunächst festgestellt, dass das Modell in zweierlei Hinsicht allgemeiner ist als das von Ramlau-Hansen (1988a) untersuchte Modell. Zum einen hinsichtlich der Aktivseite, da das Modell mit allgemeinen Akkumulationsbasen – die nicht unbedingt mit der Definition des retrospektiven Policenwerts von Hoem (1988) konsistent sind – operiert, um beispielsweise eine Überschussbeteiligung der

Versicherungsgesellschaft und ihrer Aktionäre adäquat abzubilden. Andererseits hinsichtlich der Passivseite, da das Modell verschiedene Bewertungsprinzipien zulässt, wobei in diesem Zusammenhang die Bruttoprämienbewertung und die Nettoprämienbewertung besonders hervorzuheben sind. Wir stellten fest, dass die zugrunde liegenden Überschussdefinitionen nicht miteinander übereinstimmen, wenn die Rahmen beider Modelle zusammengeführt werden. Ausgehend von dieser fundamentalen Einsicht, welche die Struktur der Arbeit geprägt hat, wurden Zusammenhänge zwischen verschiedenen technischen Basen und den uneinheitlichen Überschussdefinitionen analysiert. Zum Abschluss der Analyse wendeten wir das Modell von Møller & Steffensen (2007, Abschnitt 2.2) an, das, wie Haçarız et al. (2023) von Versicherungsvorschriften nach skandinavischem Stil abkehrt. Trotz dieser Ähnlichkeit haben wir festgestellt, dass dieses Modell in vielerlei Hinsicht im Kontrast zu den Überschussmodellen von Ramlau-Hansen (1988a) und Haçarız et al. (2023) steht. Genauer gesagt, haben wir neben dem deterministischen Charakter und der Darstellung einer spezifischen Überschussbeteiligung eingesehen, dass das Modell von Møller & Steffensen (2007, Abschnitt 2.2) eine retrospektive Sicht auf Lebensversicherungsverbindlichkeiten hat. Obwohl sich das retrospektive Modell von den anderen konsultierten Modellen fundamental unterscheidet, konnten wir dennoch einige Gemeinsamkeiten feststellen, insbesondere dass der erwartete Barwert des Überschusses in allen drei Modellen konsistent ist.

Fazit

Insgesamt lässt sich sagen, dass die Unterschiede oder Inkompatibilitäten der in dieser Arbeit verwendeten Modelle die Überschussanalyse der untersuchten Lebensversicherungsverträge recht komplex und umfangreich gemacht haben. Dennoch wurde dadurch die Vielfalt der einschlägigen Literatur angemessen dargestellt und sehr interessante Vergleiche zwischen verschiedenen Ansätzen ermöglicht. Insbesondere wurde dabei deutlich, dass die Basis dieser Arbeit, genauer gesagt das Arbeitspapier von Haçarız et al. (2023), nicht nur zentrale Aussagen seines Vorläufers Ramlau-Hansen (1988a) verallgemeinert, sondern darüber hinaus diese Aussagen aus einem operativ realistischeren Modellansatz ableitet.

Literaturverzeichnis

Haçarız, O., Kleinow, T. & Macdonald, A. S. (2023). On Technical Bases and Surplus in Life Insurance. arXiv preprint arXiv:2310.16927v1.

Hoem, J. M. (1988). The versatility of the Markov chain as a tool in the mathematics of life insurance. Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries, Helsinki, 177–202.

Møller, T. & Steffensen, M. (2007). Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance. Cambridge University Press, Cambridge.

Ramlau-Hansen, H. (1988a). The emergence of profit in life insurance. Insurance: Mathematics and Economics 7, 225–236.