

Deep generative modeling of economic scenarios:

Using generative adversarial networks to augment actuarial data sets

Gemäß der Solvency-II-Regularien müssen Versicherungsunternehmen zur Herleitung ihrer Solvenzkapitalanforderungen (SCR) den Value at Risk ihrer Eigenmittel zum gegebenen Konfidenzniveau von 99,5 % auf einem 1-Jahres-Zeithorizont bestimmen. In der praktischen Umsetzung kann das SCR entweder gemäß der Standardformel oder durch Verwendung eines internen Modells bestimmt werden. Während im Rahmen der Standardformel modulare Schocks für einzelne Risikokategorien vorgegeben werden, die nach einer Aggregationslogik zum Gesamt-SCR zusammengefasst werden können, müssen Versicherungsunternehmen, die ihr SCR über ein internes Modell bestimmen, die Verteilung ihrer Eigenmittel ausgehend von diversen Risikofaktoren herleiten. In der Regel werden hierbei für die einzelnen identifizierten Risikofaktoren Marginalverteilungen bestimmt, die eine 1-Jahres-Veränderung modellieren und, unter Berücksichtigung entsprechender Abhängigkeitsstrukturen, zu einer multivariaten Gesamtverteilung aggregiert werden. Eine wesentliche Risikokategorie ist hierbei das Marktrisiko, wobei die Marginalverteilungen der Risikofaktoren, die zum Beispiel den Risikokategorien Zins-, Spread-, Aktien- oder Wechselkursrisiko entsprechen, ausgehend von historischen Marktdaten kalibriert werden. In der Praxis stößt man hierbei auf die Limitierung, dass es in der Regel zu wenig beobachtete, unabhängige beziehungsweise nicht überlappende 1-Jahres-Veränderungen gibt, die eine direkte Schätzung von Verteilungsparametern mit gängigen statistischen Verfahren ermöglichen. Daher wird oft auf ein sogenanntes Annualisierungsverfahren zurückgegriffen, wobei in einem ersten Schritt Verteilungen auf Basis von höherfrequenten Daten (zum Beispiel monatliche oder wöchentliche Veränderungen) kalibriert und anschließend, eventuell unter Berücksichtigung von Autokorrelation, zu einer niedrigeren Frequenz – in diesem Fall jährlich – aggregiert werden.

Die dargelegte Masterarbeit untersucht, inwiefern gängige Annualisierungsverfahren durch die Betrachtung von auf Methoden des maschinellen Lernens basierenden Verfahren, insbesondere von sogenannten Generative Adversarial Networks (GANs) – einem Teilgebiet der generativen künstlichen Intelligenz – erweitert und verbessert werden können. Hierbei wird unter anderem auf Fortschritte im Bereich der Large Language Models (LLMs) zurückgegriffen, indem Bausteine der den LLMs zugrunde liegenden Architektur – sogenannte Transformer-Netzwerke – so adaptiert werden, dass sie zur Generierung von Zeitreihen verwendet werden können. Es zeigt sich, dass durch Methoden des maschinellen Lernens gestützte Modelle Verallgemeinerungen gängiger und in der Praxis eingesetzter Verfahren darstellen können, die ohne Modellannahmen und ausschließlich getrieben durch die vorliegenden historischen Marktdaten eine bessere Approximation der Wirklichkeit ermöglichen.

Theoretische Grundlagen: Der Theorieteil der Masterarbeit untersucht die fundamentalen mathematischen Grundlagen, die zur Formalisierung von GANs und deren Erweiterung – den sogenannten Wasserstein-GANs – notwendig sind. Begonnen wird mit einer allgemeinen Einführung in neuronale Netze und deren Training. Hierbei wird insbesondere auf den Backpropagation-Algorithmus und den Adam-Algorithmus eingegangen. Auf Basis der so gelegten theoretischen Grundlagen werden GANs – in ihrer initialen Struktur (vgl. Goodfellow et al. 2014) – formell eingeführt. Dabei wird sowohl auf den Trainingsalgorithmus als auch auf inhärente Probleme von „plain vanilla“ GANs, wie vanishing gradient, die zu Instabilitäten im Training führen können und letztlich Erweiterungen wie das Wasserstein-GAN motivieren, eingegangen. Das Wasserstein-GAN wird sukzessive über eine allgemeine Definition der Wassersteinmetrik eingeführt, wobei das fundamentale Prinzip von Wasserstein-GANs, nämlich die Repräsentation über zwei neuronale Netze – dem Generator, analog zum „plain vanilla“ GAN, und dem Critic, wobei letzterer eine Lipschitz-stetige Funktion optimiert – über die Kantorovich-Rubinstein-Dualität motiviert wird (vgl. Arjovsky et al. 2017). Auf Basis dieser Grundlagen und zusätzlicher theoretischer Resultate wird schließlich das Wasserstein-GAN mit der Penalisierung des Gradienten (vgl. Gulrajani et al. 2017) vorgestellt, welches den Modellrahmen für jede in der

vorgelegten Arbeit diskutierte Anwendung liefert.

Annualisierungsansätze: Im Folgenden werden drei unterschiedliche Verfahren diskutiert, die zur Annualisierung von Risikofaktorverteilungen eingesetzt werden können. Der erste vorgestellte Ansatz geht auf Frankland et al. (2019) zurück und beschreibt, wie eine Copula, ausgehend von der empirischen Autokorrelationsfunktion, so parametrisiert werden kann, dass die Marginalverteilungen von beispielsweise wöchentlichen Log>Returns, unter Berücksichtigung der Abhängigkeitsstruktur zwischen einzelnen Lags, zu einer multivariaten Verteilung aggregiert werden können. Dies ermöglicht die Simulation eines Zufallsvektors von, in diesem Fall, 52 wöchentlichen Log>Returns, wobei der jährliche Log-Return durch die Summation der einzelnen Komponenten entsteht. In der Analyse werden die wöchentlichen Log>Returns entweder über eine Normal- oder eine T-Verteilung modelliert, wobei für die Copula entweder auf eine Gauss- oder eine T-Copula zurückgegriffen wird. Es wird insbesondere diskutiert, wie die Verteilungsparameter der entsprechenden Marginalverteilung sowie die Parameter der Copula mit gängigen statistischen Verfahren geschätzt werden können. Ebenso werden Spezialfälle betrachtet, in denen die so modellierten jährlichen Log>Returns einer geschlossenen Verteilung folgen. Der zweite vorgestellte Ansatz stellt im Wesentlichen eine Verallgemeinerung des von Frankland et al. (2019) vorgestellten, Copula-basierten Ansatzes dar, indem ein Wasserstein-GAN so trainiert wird, dass die Simulation des Zufallsvektors, bestehend aus 52 wöchentlichen Log>Returns, möglich wird. Dieser Ansatz stellt insofern eine Verallgemeinerung des ersten Ansatzes dar, als dass Modellannahmen bezüglich der Marginalverteilung und der Copula nicht mehr benötigt werden und daher eine rein datengetriebene Modellierung ermöglicht wird. Es wird diskutiert, wie das Wasserstein-GAN ausgehend von einem Trainingsdatensatz, der aus historischen 1-Jahres-Zeitfenstern mit 52 wöchentlichen Log>Returns besteht, trainiert werden kann. Im Appendix der dargelegten Masterarbeit wird ausführlich auf die gewählte Architektur der neuronalen Netze des Generators und des Critics sowie auf alle relevanten Hyperparameter eingegangen. Der dritte vorgestellte Ansatz greift den in Wiese et al. (2019) definierten Begriff des neuronalen Prozesses auf, welcher die formelle Beschreibung eines durch ein GAN generierten stochastischen Prozesses ermöglicht. Hierbei wird, analog zu

Fu et al. (2022), eine Architektur für den Generator und den Critic gewählt, deren fundamentaler Baustein ein sogenannter Transformer (vgl. Vaswani et al. 2023) ist. Dies führt zu einer Architektur, die ähnlich wie der zweite vorgestellte Ansatz auf Basis von historischen 1-Jahres-Zeitfenstern mit 52 wöchentlichen Log>Returns besteht, trainiert werden kann und nach abgeschlossenem Training einen Pfad von wöchentlichen Log>Returns beliebiger Länge generieren kann, wobei übergeordnete Eigenschaften wie die Verteilung der wöchentlichen Log>Returns sowie die Autokorrelation reflektiert werden. Im Rahmen des vorgestellten Ansatzes wird die trainierte Architektur verwendet, um Pfade bestehend aus 52 wöchentlichen Log>Returns zu simulieren, wobei sich ein 1-Jahres-Log-Return durch die Summation der einzelnen Komponenten ergibt. Die gewählte Architektur für den Generator sowie für den Critic wird im Appendix der dargelegten Masterarbeit ausführlich beschrieben. Hierbei werden einzelne Bausteine wie Convolutional-Layer und (Regular) Attention-Layer formell eingeführt. Ebenso wird auf die gewählten Hyperparameter eingegangen.

Numerische Ergebnisse: Im numerischen Teil der Arbeit werden die drei diskutierten Annualisierungsverfahren an zwei konkreten Beispielen, der Zeitreihe der 1-Jahres-EUR-Spot-Rate sowie der Zeitreihe des S&P-500-Indexes, untersucht. Hierbei werden alle Ansätze auf Basis der vorhandenen historischen wöchentlichen Log>Returns kalibriert. Anschließend werden ausgehend von den kalibrierten Modellen 1-Jahres-Log>Returns simuliert und mit den historischen rollierenden 1-Jahres-Log>Returns verglichen. Der Vergleich stützt sich sowohl auf eine visuelle Analyse anhand eines Vergleichs der Kerndichteschätzer, Plots der empirischen Verteilungsfunktion und QQ-Plots als auch auf den Vergleich von unterschiedlichen Quantilen, insbesondere der im Kontext von Solvency II relevanten 0,5 % bzw. 99,5 % Quantile. Es zeigt sich, dass die Verallgemeinerung des Copula-basierten Ansatzes über ein Wasserstein-GAN zu einer deutlich besseren Reproduktion der historischen Verteilungseigenschaften führt. Dies zeigt sich unter anderem anhand eines besseren QQ-Plots sowie beim Vergleich ausgewählter Quantile, die durch das Wasserstein-GAN besser getroffen werden können. Das Transformer-basierte Modell zeigt ebenfalls eine deutlich bessere Reproduktion der Verteilungseigenschaften der Trainingsdaten. Insbesondere für die 1-Jahres-EUR-Spot-Rate weist das Transformer-basierte Modell den besten In-Sample-Fit auf, wobei hier heraussticht, dass auch der ausgeprägte rechte Tail der historischen 1-Jahres-Log>Returns, der auf den rapiden Zinsanstieg um das Jahr 2022 zurückgeführt

werden kann, in der generierten Verteilung abgebildet wird. Grundsätzlich bleibt zu erwähnen, dass die GAN-basierten Verfahren der Ansätze zwei und drei die Tails der historischen Verteilung teilweise sehr stark extrapolieren, was zur Konsequenz hat, dass an den Rändern der generierten Verteilung Ausreißer auftreten können.

Multivariate Erweiterung: Im finalen Kapitel der dargelegten Masterarbeit wird eine multivariate Erweiterung des dritten vorgestellten, Transformer-basierten Ansatzes vorgestellt. Hierzu wird zunächst eine multivariate Erweiterung des von Wiese et al. (2019) eingeführten neuronalen Prozesses – ein sogenannter multivariater neuronaler Prozess – definiert. Anschließend wird eine Architektur für den Generator und den Critic vorgeschlagen, die es erlaubt, analog zum univariaten Fall, auf Basis beliebig hochdimensionaler, historischer 1-Jahres-Zeitfenster, die jeweils aus 52 wöchentlichen Log>Returns bestehen, trainiert zu werden und nach abgeschlossenem Training Pfade der resultierenden (multivariaten) Zeitreihe von wöchentlichen Log>Returns beliebiger Länge zu generieren. Die vorgeschlagene Architektur greift im Wesentlichen die in Fu et al. (2022) für den univariaten Fall entwickelte Struktur auf und formalisiert ein allgemeines Prinzip, wie diese für Zeitreihen mit beliebig vielen Dimensionen erweitert werden kann. Die vorgeschlagene Architektur wird anhand eines Beispiels in zwei Dimensionen mit den historischen Zeitreihen der 1-Jahres und der 20-Jahres-EUR-Spot-Rate untersucht. Es zeigt sich, dass die generierten Pfade sowohl marginale Eigenschaften wie die Verteilung der wöchentlichen bzw. jährlichen Log>Returns und die Autokorrelation als auch die Korrelation zwischen den beiden Komponenten reflektieren.

Fazit: Die Ergebnisse der dargelegten Masterarbeit zeigen, dass GAN-basierte Verfahren zu einem deutlich besseren In-Sample-Fit führen können als vergleichsweise einfache Modelle, die auf parametrischen Verteilungsfamilien basieren. Grundsätzlich muss a priori geklärt sein, inwiefern eine möglichst gute Approximation der Historie oder die glättende Wirkung parametrischer Verteilungen gewünscht ist, bevor eine Modellauswahl getroffen wird. Aufgrund der inhärenten Komplexität GAN-basierter Modelle und der noch beschränkten Erklärbarkeit der Ergebnisse ist mit einer zeitnahen Anwendung solcher Methoden im regulatorischen Umfeld nicht zu rechnen. Nichtsdestotrotz eröffnen sich, gerade aufgrund der Fähigkeit, historische Verteilungseigenschaften sehr gut zu reproduzieren, Anwendungsfelder, zum Beispiel im Rahmen der Validierung bestehender Markrisikomodelle oder zur Erweiterung von Datensätzen, die aus historischen Marktdaten bestehen und zur Kalibrierung gängiger Modelle verwendet werden.