Statistischer Fit historischer Fondskurs-entwicklungen zur stochastischen Projektion langfristiger Sparprozesse

Zusammenfassung der Bachelorarbeit an der Universität Ulm

Noël Daniele Beck

Die kapitalgedeckte Altersvorsorge gewinnt in Deutschland vor dem Hintergrund des demografischen Wandels und aktueller Reformbestrebungen der Bundesregierung zunehmend an Bedeutung. Insbesondere fondsgebundene Vorsorgeprodukte wie das im März 2026 beschlossene Altersvorsorgedepot sollen Vorsorgenden langfristig eine stärkere Partizipation an den Renditechancen der Kapitalmärkte ermöglichen. Da Investitionen in Fonds mit Kapitalmarktrisiken verbunden sind, stellt sich die Frage, wie zukünftige Renditen stochastisch projiziert und daraus resultierende Ablaufleistungen sowie Risiken bewertet werden können.

Viele finanzmathematische Modelle und Simulationen basieren auf der Annahme normalverteilter Renditen. Diese Annahme steht jedoch im Widerspruch zu empirischen Untersuchungen, die seit Jahrzehnten zeigen, dass Kapitalmarktrenditen asymmetrisch verteilt sind und extreme positive wie negative Renditen deutlich häufiger auftreten, als es unter der Annahme einer Normalverteilung zu erwarten ist.

Trotz dieser Erkenntnisse ist bislang nur unzureichend untersucht, welchen Einfluss die Wahl der Verteilungsannahme auf die simulationsbasierte Bewertung langfristiger Fondssparpläne hat. Die vorliegende Arbeit adressiert diese Lücke durch die Untersuchung der folgenden beiden Fragestellungen:

- Welche Wahrscheinlichkeitsverteilungen eignen sich zur Modellierung historischer Fondsrenditen?
- Welche Auswirkungen hat die Wahl der Verteilungsannahme auf die Projektion langfristiger Fondssparpläne und deren Ablaufleistungen?

Zur Beantwortung dieser Fragestellungen gliedert sich die Arbeit in zwei aufeinander aufbauende Teile. Zunächst werden historische Kursverläufe des DAX Performance Index und des MSCI World Gross Index analysiert und geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilungen modelliert. Anschließend

wird untersucht, wie sich unterschiedliche Verteilungsannahmen auf simulationsbasierte Projektionen langfristiger Fondssparpläne auswirken.

Anpassung und Goodness-of-Fit-Analyse von Wahrscheinlichkeits-Verteilungen für Fondsrenditen

Zunächst konnte gezeigt werden, dass die Renditen beider Indizes deutlich von der Annahme der Normalverteilung abweichen. Sie sind linksschief, extreme Verluste sind häufiger zu beobachten als entsprechende Gewinne und sie weisen schwere Randbereiche (Heavy Tails) auf. Das bedeutet, dass insgesamt deutlich mehr extreme positive und negative Renditen auftreten, als durch die Normalverteilung erfasst werden können. Diese unterschätzt solche Extremereignisse daher systematisch.

Ziel dieses Teils der Arbeit ist die Identifikation einer geeigneten Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Modellierung historischer Renditen. Hierzu werden sechs Wahrscheinlichkeitsverteilungen betrachtet: drei symmetrische Basisverteilungen sowie jeweils eine Erweiterung, die durch einen zusätzlichen Parameter die Schiefe der Renditen erfassen kann. Die Parameterschätzung erfolgt dabei durch numerische Maximierung der Likelihood-Funktion.

Die Anpassungsgüte wird mithilfe von Anpassungsgütetests, eines Bootstrap-Verfahrens sowie grafischen Analysen (QQ-Plots) bewertet. Das Ergebnis: Verteilungen, die sowohl Schiefe als auch Heavy Tails abbilden können, beschreiben die historischen Renditen deutlich besser als symmetrische Verteilungen. Die Skew-t-Verteilung liefert die überzeugendste Modellierung der historischen Renditen, da sie als einzige der betrachteten Verteilungen von keinem der verwendeten Tests verworfen wird.

Gleichzeitig zeigt sich, dass eine gute Anpassung an historische Renditen allein nicht ausreicht, um die Eignung eines Modells für die Projektion zukünftiger Renditen zu beurteilen. So können die geschätzten Modellparameter zu Abweichungen der erwarteten Rendite vom historischen Mittelwert führen. Da sich bereits geringe Unterschiede in den monatlichen Renditen über lange Anlagezeiträume erheblich auf Ablaufleistungen und Risikokennzahlen auswirken können, bildet diese Fragestellung die Grundlage für den zweiten Teil der Arbeit.

Verteilungsannahmen und ihre Auswirkungen auf die Bewertung von Fondssparplänen

Im zweiten Teil der Arbeit wird untersucht, wie sich die zuvor angepassten Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf die Simulation langfristiger Fondssparpläne auswirken. Mithilfe von Monte-Carlo-Simulationen werden Ablaufleistungen, deren Verteilungseigenschaften sowie Unterdeckungswahrscheinlichkeiten über einen Zeitraum von 30 Jahren berechnet. Die Simulation ermöglicht dabei einen direkten Vergleich der verschiedenen Verteilungsannahmen. Dabei zeigen sich insbesondere die folgenden zwei zentralen Erkenntnisse:

Erstens reagieren die Ablaufleistungen besonders sensitiv auf Abweichungen der erwarteten Rendite vom historischen Mittelwert. Ursache hierfür ist, dass die Parameterschätzung die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Daten maximiert, den historisch beobachteten Mittelwert der Renditen jedoch nicht zwangsläufig exakt trifft. Insbesondere bei der Laplace- und der Student-t-Verteilung liegen die mittels Maximum-Likelihood geschätzten Lageparameter über dem empirischen Mittelwert der Renditen, was in den Simulationen zu unrealistisch hohen Ablaufleistungen führt. Bereits geringe Abweichungen der erwarteten Rendite führen durch den Zinseszinseffekt über lange Anlagezeiträume zu einer systematischen Über- oder Unterschätzung der Ablaufleistungen und der daraus abgeleiteten Risikokennzahlen.

Zweitens fällt das Risiko einer Unterdeckung bei Verteilungen mit Schiefe und ausgeprägten Heavy Tails deutlich höher aus als bei der häufig verwendeten Normalverteilung. Die Unterschiede treten insbesondere in den unteren Quantilen der Ablaufleistungsverteilung und damit in pessimistischen Szenarien auf. So liegt die geschätzte Unterdeckungswahrscheinlichkeit der Skew-t-Verteilung für den DAX nach 30 Jahren fast doppelt so hoch wie bei der Normalverteilung. Dies verdeutlicht, dass die Normalverteilung Unterdeckungsrisiken und die Auswirkungen extremer negativer Renditen tendenziell unterschätzt.

Insgesamt zeigt sich, dass die Wahl der Verteilungsannahme einen wesentlichen Einfluss auf die Bewertung langfristiger Fondssparpläne hat. Für eine realistische Projektion sind Verteilungen erforderlich, die neben einer mit dem historischen Mittelwert übereinstimmenden erwarteten Rendite auch Schiefe und Heavy Tails modellieren können. Die häufig verwendete Normalverteilung unterschätzt dagegen die Risiken extremer Renditen. Die Skew-t-Verteilung nach Jones und Faddy erfüllt diese Anforderungen am besten und stellt damit unter den betrachteten

Verteilungen die geeignetste Grundlage für die stochastische Projektion langfristiger Fondssparpläne dar.