Dynamic Time-Consistent Value at Risk Asset Allocation

Zusammenfassung der Masterarbeit an der Universität Ulm

Felix Fießinger

Mithilfe der Portfoliotheorie stellen sich Langzeitinvestoren die Frage, wie viel sie von ihrem Geld in sichere Anlagen und wie viel sie in riskante Anlagen investieren sollen als auch wie sie diese Investmenthöhen stetig verändern müssen, um ihren Nutzen maximieren zu können. Genau mit dieser Frage habe ich mich in meiner Masterarbeit beschäftigt. Dabei habe ich zwei verschiedene Modelle analysiert und anschließend numerisch ausgewertet. Diese Fragestellung ist besonders interessant für Versicherungsunternehmen, da ich einerseits den Value at Risk als Risikomaß benutzt habe, welcher spätestens seit Solvency II das Standardrisikomaß in der Versicherungsbranche ist, und andererseits aufgrund der resultierenden optimalen Strategien, welche sogar deterministisch sind. Dadurch bieten diese Resultate eine einfache Möglichkeit die optimalen Strategien in der Praxis umzusetzen.

Der Grundansatz beider Modelle ist den zu erwartenden Zugewinn unter Berücksichtigung des Risikos zu maximieren, wobei jeweils das Risiko mithilfe des Value at Risks gemessen wird. Mein Ansatz die Zugewinne und nicht die finalen Geldbeträge zu maximieren ist der Hauptunterschied zu bisherigen Analysen, wodurch die Ergebnisse unabhängig vom initialen Kapital werden. Bei der Wahl dieser neuen Betrachtungsweise habe ich mich von mehreren psychologischen Studien inspirieren lassen. Dabei zeigen die Studien, dass Menschen stärker an der Höhe der Vermehrung ihres Kapitals als an der Kapitalhöhe an sich interessiert sind.
Ein großes Problem für die Implementierung von Asset Allocation Problemen sind die zeitinkonsistenten Lösungen: Optimale Strategien sind auch nach korrekter Anwendung am nächsten Zeitpunkt nicht mehr optimal. Dieses Problem kann für Investmentstrategien durch das Finden einer äquivalenten zeitkonsistenten Lösung behoben werden. Diese kann auch in der Realität ohne die Notwendigkeit der stetigen Neuberechnung der Strategien umgesetzt werden. Als Basis hierfür leitete ich eine Hamilton-Jabobi-Bellman (HJB) Gleichung zuerst in diskreter Zeit her um diese anschließend in stetiger Zeit zu verallgemeinern. Die Lösung dieser

partiellen Differentialgleichung wird in einem Nash-Equilibrium angenommen. Zentral für eine mathematisch saubere Herangehensweise ist hier das Verification Theorem: Die Lösung der HJB-Gleichung ist tatsächlich ein Nash-Equilibrium. Dieser Beweis ist sehr wichtig für die Theorie, da ein klassischer Limesansatz für die Überführung des diskreten Problems in stetige Zeit fehleranfällig ist, jedoch sind solche Beweise in mehreren Papern zu ähnlichen Problemen nicht durchgeführt worden. In meiner Analyse wurde jeweils der Kapitalmarkt mithilfe des Black-Scholes-Modells modelliert und das Vermögen durch einen kontrollierten Markov-Prozess dargestellt. Im Gegensatz zu einigen anderen Analysen in diesem Themenkomplex, habe ich alle gefundenen Aussagen und Resultate mathematisch sauber bewiesen.

Ziel meines Hauptmodells ist den erwarteten Nutzen des Zugewinns vom aktuellen Zeitpunkt bis zu einem Endzeitpunkt abzüglich des mit der Risikoaversion des Investors gewichteten Value at Risks des Zugewinns zu maximieren. Das Maximierungsfunktional ist dabei analog zum bekannten Mean-Variance-Ansatz gewählt. Als klassisches Beispiel habe ich hier die exponentielle Nutzenfunktion gewählt, jedoch sind die großen Resultate für allgemeine Nutzenfunktionen bewiesen worden, welche typische Eigenschaften vorweisen müssen. In meiner Masterarbeit habe ich erst in diskreter Zeit sowohl für das Funktional, welches maximiert werden soll als auch für die Wertfunktion des Equilibriums Rekursionsformeln aufgestellt. Anschließend habe ich in der Analyse der optimalen Kontrollfunktion bewiesen, dass das Optimum durch eine eindeutige deterministische Funktion angenommen wird. Diese äußerst überraschende Eigenschaft ist ein Resultat vom Betrachten von Geldzugewinnen anstelle absoluter Vermögenshöhen. Im Allgemeinen ist dieses Optimum nicht durch eine schöne Formel oder Gleichung darstellbar. Jedoch im Falle der exponentiellen Nutzenfunktion ist das Optimum durch das Lösen einer Integralgleichung berechenbar, daher war es logisch die Berechnung im numerischen Teil in dieser Art und Weise umzusetzen. Zum Abschluss der Analyse in diskreter Zeit habe ich die infinitesimalen Generatoren, welche in der HJB auftauchen, genauer betrachtet und diese durch analytische Formeln dargestellt. Nachfolgend verallgemeinerte ich die Resultate aus diskreter Zeit durch einen sauberen mathematischen Limitansatz in stetige Zeit, indem ich die Länge des Zeitintervalls zwischen zwei Zeitpunkten gegen Null konvergieren ließ. Dabei konnte ich zeigen, dass die optimale Kontrollfunktion auch in stetiger Zeit deterministisch ist. Hierbei bediente ich mich Methoden aus der konvexen Analysis und der Funktionalanalysis. Zusätzlich gelang es mir dabei zu zeigen: Es existiert eine Folge von deterministischen optimalen Kontrollfunktionen, wobei die Zeitlänge zwischen den diskreten Zeitpunkten gegen Null konvergiert, die in L^2 schwach gegen die optimale Kontrollfunktion in stetiger Zeit konvergiert. Außerdem konvergiert das Wertfunktional der diskreten Kontrollfunktion sogar stark gegen das Wertfunktional der optimalen Strategie in stetiger Zeit. Im Anschluss daran habe ich die Gleichung zur Berechnung der optimalen Kontrollfunktion im Falle der exponentiellen Nutzenfunktion auf stetige Zeit verallgemeinert, genauso wie die Formeln für die sich ergebenden infinitesimalen Operatoren in der HJB. Dadurch ließ sich die HJB in stetiger Zeit mit schönen analytischen Formeln darstellen. Abschließend habe ich im vorher diskutierten Verification Theorem folgende Aussage bewiesen: Eine Lösung der HJB ist auch tatsächlich ein Nash-Equilibrium und somit optimal. Zusammengefasst habe ich sichergestellt, dass die Lösung der Integralgleichung die optimale Investmentstrategie ist.

Mit meinem alternativen Modell maximiere ich den erwarteten Zugewinn vom aktuellen Zeitpunkt bis zum Endzeitpunkt. Als Nebenbedingung hierfür verwendete ich den Value at Risk des Endvermögens abzüglich des erwarteten Werts des Endvermögens zum aktuellen Zeitpunkt, welcher unterhalb einer bezüglich der Zeit monoton fallenden Risikoakzeptanzfunktion bleiben muss. Dabei begründete ich erst die Maximalität des Risikos im Optimum und durch eine Quadrierung dieser Nebenbedingung habe ich mein zu maximierendes Zielfunktional mithilfe eines Lagrange-Ansatzes aufgestellt. Zuerst leitete ich in diskreter Zeit die Rekursionsformeln, die Eigenschaften der optimalen Kontrollfunktion und eine genauere Darstellung der infinitesimalen Operatoren her. Ziel war es dabei die HJB in diskreter Zeit mit analytischen Formeln zu erhalten. In der Analyse dieses Ansatzes konnte ich im Gegensatz zum Hauptansatz sogar eine analytische deterministische Lösung für die optimale Kontrollfunktion finden, welche ich im numerischen Teil nutzen konnte. Anschließend bin ich wieder übergegangen diese Resultate in stetiger Zeit zu verallgemeinern, um die HJB aufzustellen. Erneut konnte ich eine analytische deterministische optimale Kontrollfunktion angeben. Eine besondere Auffälligkeit der optimalen Kontrollfunktion ist, dass diese nur von einzelnen Parametern wie der Steigung der Risikoakzeptanzfunktion, dem Konfidenzniveau, zu dem der Value at Risk gebildet wird, dem risikofreien Zinssatz und der Varianz des risikoreichen Assets im Black-Scholes-Modells abhängt. Die Korrektheit des Ansatzes im stetigen Fall konnte ich erneut mithilfe des Verification Theorems zeigen.

In der abschließenden numerischen Analyse habe ich in beiden Ansätzen die optimale Kontrollfunktion mithilfe der hergeleiteten Formel berechnet und dargestellt. Hierfür habe ich als Grundlage realistisch gewählte Werte für alle Parameter genutzt, jeden dieser Parameter separat einem Parameter-Tiering unterzogen und die Resultate bildlich dargestellt. Die Ergebnisse dieses Tierings bestätigen im Großen und Ganzen das erwartete Verhalten bei Änderungen der Parameter. Bemerkenswert ist, dass durch die hergeleiteten Formeln die Berechnung einfach und zeiteffizient möglich ist.