

# A Shadow Rate Model for G2++

## Zusammenfassung der Masterarbeit an der Universität Ulm

Timon Kramer

Im Rahmen des Packaged Retail and Insurance-based Investment Products (PRIIP) und der Produktinformationsstelle Altersvorsorge (PIA) auf dem deutschen Markt wird das G2++ Modell für die Zinsmodellierung verwendet. Das G2++ Modell ist ein Short Rate Modell, das von zwei Gaußschen Faktoren abhängt. Das Modell lässt beliebig negative Zinsen zu. Die Wahrscheinlichkeit hierfür war vernachlässigbar als das Modell noch auf historische Zinsniveaus kalibriert wurde, welche weit über null lagen. Jedoch waren die am Markt zu beobachtenden Zinssätze der letzten Jahre nahe null und erreichten in vielen Ländern, einschließlich der Europäischen Währungszone, sogar negative Werte. Eine Kalibrierung des G2++ Modells auf einer solchen Zinsstrukturkurve, führt zu hohen Wahrscheinlichkeiten für Zinssätze mit Werten weit unter null. Einige Marktteilnehmer sind der Auffassung, dass beliebig negative Zinssätze unrealistisch seien. Es wird argumentiert, dass Bargeld mit seinen derzeitigen Eigenschaften als Ersatz für Bankeinlagen angesehen werden kann. Dadurch könnten beliebig negative Zinsen auf Bankeinlagen vermieden werden. Nach einer Stellungnahme der Deutschen Aktuarvereinigung (DAV) ist es im aktuellen Rechtsrahmen angemessen und sinnvoll, Modelle mit einer Zinsuntergrenze für die Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen zu verwenden. Eine Möglichkeit dafür ist die Anwendung eines so genannten Shadow Rate Modells. Dort ist die Short Rate gegeben durch das Maximum einer Untergrenze und einer so genannten Shadow Rate, die durch ein Short Rate Modell modelliert wird. Dadurch sind die Zinssätze in diesem Modell von unten begrenzt.

Das Ziel dieser Masterarbeit besteht darin den Shadow Rate Ansatz auf das G2++ Modell anzuwenden und dabei die Marktkonsistenz und die Arbitragefreiheit für die risikoneutrale Bewertung zu erhalten. Die Arbeit befasst sich mit der Berechnung von Zero Coupon Bond (ZCB) Preisen, um verschiedene Zinssätze innerhalb des Modells ableiten zu können. Zuletzt werden die Effekte der Zinsuntergrenze auf zukünftige Zinsen innerhalb des Modells analysiert.

Zu diesem Zweck wird eine Maximierung zwischen einer Zinsuntergrenze und der Short Rate des G2++ Modells unter Wahrung der Arbitragefreiheit eingeführt. Um die Marktkonsistenz zu gewährleisten und weiterhin eine anfängliche Zinsstruktur reproduzieren zu können wird dieses Modell durch einen Korrekturterm angepasst. Da durch die Einführung der Zinsuntergrenze keine analytische Formel der ZCB Preise mehr existiert, werden numerische Methoden erarbeitet und eingeführt, die ZCB Preise innerhalb einer angemessenen Zeit und mit angemessener Genauigkeit berechnen.

## **Inhalt**

Die Struktur der Arbeit ist wie folgt: In Kapitel 1 werden die Hintergründe und die Ziele vorgestellt. Kapitel 2 enthält die wichtigsten Definitionen und Notationen für die Zinsmodellierung in einem risikoneutralen Umfeld. Unter anderem wird das G2++ Modell vorgestellt und die Bepreisung von ZCBs beschrieben. Es wird ein so genanntes Lower Bound G2++ Modell definiert, in dem der Shadow Rate Ansatz auf das G2++ Modell angewandt wird. Darüber hinaus wird ein zusätzlicher Korrekturterm eingeführt, sodass das Modell gegebene Zinssätze replizieren kann. Schließlich wird mithilfe des Feynman-Kac Theorems eine partielle Differentialgleichung für ZCB Preise im Lower Bound G2++ Modell hergeleitet. Diese wird für numerische Methoden verwendet. In Kapitel 3 wird zuerst die numerische Approximation des Korrekturterms im Lower Bound G2++ Modells beschrieben. Des Weiteren werden verschiedene numerische Methoden zur Berechnung der ZCB Preise diskutiert und die Implementierung der Monte-Carlo Methode und der Finite-Differenzen-Methode (FDM) aufgezeigt. In Kapitel 4 werden die ZCB Preise im Lower Bound G2++ Modell für ein spezifisches numerisches Beispiel mithilfe der im vorherigen Kapitel beschriebenen FDM approximiert. Die Genauigkeit der numerischen Methode wird analysiert, bevor die Auswirkungen der Zinsuntergrenze und des Korrekturterms auf die Zinssätze in dem numerischen Beispiel untersucht werden. In Kapitel 5 schließen eine Zusammenfassung der Ergebnisse, eine Diskussion der Grenzen der Arbeit und ein Ausblick auf weitere Forschung die Arbeit ab.

## **Berechnung des Korrekturterms und der ZCB Preise**

Die Berechnung der ZCB Preise, die eine gegebene Zinsstruktur reproduzieren, ist in diesem Modell komplex und rechenaufwändig. Zum einen muss für jede jährliche Laufzeit ein Korrekturterm approximiert werden. Dies geschieht durch die Anwendung eines numerischen Verfahrens zur Berechnung von Nullstellen. Dabei müssen in jedem Schritt ZCB Preise mit einem geschätzten Korrekturterm berechnet werden, bis die resultierenden ZCB Preise den zu replizierenden ZCB Preisen entsprechen. Zum anderen ist die Berechnung der ZCB Preise selbst rechenintensiv, da zwei korrelierte stochastische Prozesse über lange Laufzeiten von bis zu 100 Jahren berücksichtigt werden müssen. Es werden verschiedene numerische Methoden diskutiert, die zur Berechnung der ZCB Preise infrage kommen. Die FDM wird ausgewählt, da dabei ZCB Preise für alle Gitterpunkte berechnet werden und die Berechnung für lange Laufzeiten der ZCBs effizient ist. Darüber hinaus wird die Monte-Carlo Methode als Benchmark für die FDM implementiert.

Durch die Wahl und Anpassung der FDM, die Wahl des numerischen Verfahrens zur Findung der Nullstelle und die Vorgehensweise bei der Suche nach den Startwerten für dieses Verfahren, kann die Rechenzeit für die Approximation des Korrekturterms und die Berechnung der ZCB Preise erheblich reduziert werden. Dies erlaubt es, eine hohe Anzahl von Gitterpunkten zu verwenden, was eine genauere Berechnung der ZCB Preise in einer angemessenen Zeit ermöglicht.

## **Ergebnisse**

Die zukünftigen Spot Rates, die durch das Lower Bound G2++ Modell generiert werden, werden für ein numerisches Beispiel analysiert. Die Ergebnisse dieser Analyse zeigen zwei Haupteffekte. Zum einen wird die Wahrscheinlichkeitsdichte der künftigen Spot Rates im Lower Bound G2++ Modell durch die Zinsuntergrenze von links abgeschnitten. Zum anderen wird im Vergleich zum ursprünglichen G2++ Modell der rechte Teil der Wahrscheinlichkeitsdichte der zukünftigen Spot Rates durch den Korrekturterm nach links verschoben und bleibt von der Zinsuntergrenze nahezu unbeeinflusst. Die Zinsuntergrenze und der Korrekturterm führen zu einer positiv schiefen Verteilung und verringern die Varianz der künftigen Spot Rates. Darüber hinaus ist der Durchschnitt der künftigen

Spot Rates im Lower Bound G2++ Modell niedriger als im G2++ Modell. Dies kann als Kosten der optionsähnlichen Eigenschaft der Short Rate interpretiert werden. Diese Eigenschaft eliminiert das Risiko, dass die Zinssätze unterhalb der Zinsuntergrenze liegen, und verringert die Schwankungen der künftigen Zinssätze. Die Analyse in dieser Arbeit zeigt, dass sich diese Effekte verstärken, je höher die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Shadow Rate unterhalb der Untergrenze liegt.

## **Fazit**

Diese Arbeit zeigt erfolgreich wie eine Zinsuntergrenze in das G2++ Modell zu Bewertungszwecke gemäß einer Stellungnahme der DAV implementiert werden kann. Dabei bleiben die Arbitragefreiheit und die Marktkonsistenz erhalten. Hierfür werden geeignete numerische Methoden zur genauen Berechnung von ZCB Preisen und zur Anpassung an eine gegebene Zinsstrukturkurve mit angemessener Rechenzeit und Genauigkeit aufgezeigt. Es werden die Auswirkungen auf die künftigen Zinssätze veranschaulicht, die durch die Einführung einer Zinsuntergrenze für das G2++ Modell zu erwarten sind. Unter der Prämisse, dass die Beschränkung der Zinssätze mit einer Untergrenze als sinnvoll erachtet werden, trägt diese Arbeit zu stabileren Ergebnissen bei der Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen unter Solvency II in der Europäischen Union bei. Somit trägt diese Arbeit zur Literatur auf dem Gebiet der Zinsmodellen mit Zinsuntergrenze in einem risikoneutralen Umfeld für Bewertungszwecke bei.