

Ein Kapitalmarktmodell zur Bestimmung von Chancen-Risiko-Klassen in der Lebensversicherung

Zusammenfassung der Masterarbeit an der Universität Ulm

Marc Schneble

Vor dem Hintergrund des sinkenden Rentenniveaus in den letzten Jahren und einer nicht erwartbaren Umkehr dieses Trends fördert der Staat bestimmte Produkte der privaten Altersvorsorge, die Basis- und Riesterrenten. Hierzu stehen sowohl klassische Produkte mit fester Verzinsung als auch Produkte zur Verfügung, deren Erträge zumindest teilweise von der Entwicklung am Kapitalmarkt abhängig sind. Um einen einheitlichen und leicht verständlichen Produktvergleich zu ermöglichen, hat die deutsche Bundesregierung mit dem Altersvorsorge-Verbesserungsgesetz ein verpflichtendes Produktinformationsblatt für die Anbieter von Basis- und Riesterrenten eingeführt. Dieses informiert unter anderem über die Chancen-Risiko-Klasse (CRK) eines Altersvorsorgeprodukts. Die Einteilung in eine der fünf Chancen-Risiko-Klassen „beschreibt das Verhältnis von Chancen auf eine höhere Rendite und dem Risiko, nicht die erwartete Rendite zu erzielen“. Die Produktinformationsstelle Altersvorsorge gGmbH (PIA) ist die neutrale Stelle, die im Auftrag des Bundesministeriums der Finanzen die Chancen-Risiko-Klassifizierung der geförderten Altersvorsorgeprodukte übernimmt. Die Chancen und Risiken sind in CRK 1 am geringsten und in CRK 5 am höchsten. Um ein Produkt in eine Chancen-Risiko-Klasse einzustufen, werden für je vier Vertragslaufzeiten 10.000 Kapitalmarktszenarien simuliert. Die Simulation erfolgt mit einem von der PIA kalibrierten Kapitalmarktmodell. Basierend auf den Simulationsergebnissen werden die jeweiligen Ablaufleistungen für einen Musterkunden zu Beginn der Auszahlungsphase berechnet. Das Chancemaß eines Produkts ist durch die Rendite des arithmetischen Mittelwerts aller simulierten Ablaufleistungen bestimmt. Das Risikomaß ist durch die Rendite des Mittelwerts der 20% geringsten Ablaufleistungen bestimmt. Die letztendliche quantitative Einteilung in eine CRK erfolgt durch den Vergleich mit fünf fest definierten Referenzportfolios. Anschließend werden Anpassungen aufgrund qualitativer Kriterien wie Beitragserhaltung und Mindestverzinsung vorgenommen.

Das Kapitalmarktmodell

Das Kapitalmarktmodell der PIA besteht aus einem Short-Rate-Modell und einem Aktienmodell. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der mathematischen Ausarbeitung und der Kalibrierung des Short-Rate-Modells, welches in der Literatur als G2++ Modell bezeichnet wird. Hierbei wird die Short-Rate als die Summe von zwei miteinander korrelierten Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen X und Y sowie einer deterministischen Funktion φ modelliert. Das G2++ Modell wird zunächst unter dem risikoneutralen Maß Q definiert. Die Funktion φ ist von den Parametern X und Y sowie den instantanen Forward-Raten abhängig. Letztere werden mit dem von der Bundesbank täglich kalibrierten Nelson-Siegel-Svensson Modell modelliert. Da die Simulation von Kapitalmarktszenarien unter dem auf dem Markt beobachtbaren Maß P erfolgen muss, wird mit dem Satz von Girsanow ein Maßwechsel vom risikoneutralen Maß Q zu P vollzogen. Die Short-Rate unter P entspricht der Short-Rate unter Q zuzüglich einer (mglw. negativen) Risikoprämie. Diese ist eine zeitabhängige Funktion der Modellparameter unter Q und der langfristigen Mittel von X und Y unter P .

Preise von Zinsderivaten

Die Kalibrierung des G2++ Modells erfolgt durch die möglichst genaue Anpassung der Preise von ausgewählten Zinsderivaten (Caps und Swaptions) im G2++ Modell an die entsprechenden beobachtbaren Marktpreise. Zunächst werden die Preise von europäischen Optionen auf Nullkuponanleihen im G2++ Modell bestimmt. Dafür wird ein neues Maß, das sogenannte T-Forward-Maß, definiert. Unter diesem entspricht der Preis eines Claims der erwarteten Auszahlung multipliziert mit dem Preis einer Nullkuponanleihe. Anschließend wird gezeigt, dass der Preis eines Caps im G2++ Modell der Summe der Preise von Put-Optionen auf n Nullkuponanleihen entspricht.

Auf der Marktmodellseite werden zunächst die Preise in Blacks Modell bestimmt, in dem die Underlyings als lognormalverteilt angenommen werden. Hierbei können die Underlyings jedoch keine negativen Werte annehmen. Deshalb werden die Marktpreise zusätzlich mit einem Modell unter Normalverteilungsannahme bestimmt, welches als „Normal Modell“ bezeichnet wird.

Für die Bestimmung von Cap-Preisen in beiden Modellen wird ausgenutzt, dass die Forward-Raten mit Fälligkeit in T ein Martingal bezüglich dem T -Forward-Maß bilden. Für die Bestimmung von Marktpreisen für Swaptions ist der Begriff „Marktpreis des Risikos“ entscheidend. Falls der Marktpreis des Risikos von zwei Derivaten f und g der Volatilität von g entspricht, dann ist f/g ein G -Martingal, wobei G das Maß bezeichne, das risikoneutral mit g als Numéraire ist. Mit diesem Resultat lassen sich die Preise von Swaptions in beiden Marktmodellen bestimmen.

Die Kalibrierung kann auch durch Angleichung von deren impliziten Volatilitäten erfolgen. Dazu werden für beide Marktmodelle mit Hilfe der hergeleiteten Preisformeln die implizierten Volatilitäten im $G2++$ Modell bestimmt. Informationen über Markt-Volatilitäten erhält man beispielsweise aus dem Bloomberg Terminal. Kalibriert wird mit at-the-money Caps und Swaptions. In diesem Fall wird gezeigt, dass man die impliziten Volatilitäten von Swaptions mit Hilfe einer geschlossenen Formel bestimmen kann. Für Caps können sie nur numerisch bestimmt werden. Die impliziten Volatilitäten in Blacks Model existieren nicht notwendigerweise.

Kalibrierung des $G2++$ Modells

Die Kalibrierung des $G2++$ Modells erfolgt zunächst unter dem risikolosen Maß Q . Zunächst kann man entweder an Preisen oder an impliziten Volatilitäten kalibrieren. Der Vorteil bei der Kalibrierung an Preisen ist die Existenz einer Lösung in jedem Fall. Dahingegen sind implizite Volatilitäten weniger abhängig von Parametern wie der Laufzeit und dem Strike einer Option. Zudem wird die Kalibrierung an Caps und an Swaptions vorgenommen. Im Gegensatz zu Cap-Preisen hängen Swaption-Preise von der Korrelation von Forward-Raten ab. Deshalb ist bei der Kalibrierung nach Swaptions ein Wert für die Korrelation von X und Y , der deutlich größer als -1 ist, zu erwarten. Da Black-Volatilitäten die relativen Preisänderungen der Underlyings messen, reagieren diese Volatilitäten besonders sensibel auf absolute Änderungen in der aktuellen Niedrigzinsphase. Volatilitäten im Normal Modell messen absolute Preisänderungen und schwanken daher nicht so stark. Bei einem niedrigen Zinsniveau sollten daher eher Normal-Volatilitäten für die Kalibrierung herangezogen werden.

Kombiniert man all diese Methoden, ergeben sich somit acht verschiedene Kalibrierungen. Die Implementierung wurde in MATLAB vorgenommen. Ein Algorithmus versucht, für eine Menge an Caps oder Swaptions die Preis- bzw. Volatilitätsdifferenzen des G2++ Modells und des Marktes so weit wie möglich zu verringern. Dabei wird zunächst mit einem stochastischen Minimierungsalgorithmus ein Startwert für einen bereits in MATLAB implementierten, deterministischen Algorithmus bestimmt, der lokal nach einem Minimum sucht. Der stochastische Algorithmus ist ein sogenannter genetischer Algorithmus, dessen Funktionsweise dem Evolutionsprinzip nachempfunden ist. Ausgehend von einer ersten Generation an Parametern wird durch zufällige Kombinationen dieser eine neue Menge an Parametern erzeugt. Je kleiner der Zielfunktionswert der Modellparameter ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese für die nächste Generation verwendet werden („survival of the fittest“). Die Reproduktion und Optimierung erfolgt solange, bis eine vorgegebene Abbruchbedingung erfüllt ist.

Sind die Parameter des Modells unter Q kalibriert, können die unter P existenten Parameter kalibriert werden. Grundlage hierfür sind Annahmen der OECD über die zukünftigen Zinsentwicklungen. Die beiden Parameter unter P werden so festgelegt, dass die erwarteten Spot-Raten im G2++ Modell zu einem Zeitpunkt t in der Zukunft für eine 3-monatige bzw. eine 10-jährige Laufzeit den der OECD prognostizierten Spot-Raten entsprechen. Dies führt zu einem linearen Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten. Es konnte gezeigt werden, dass die beiden Parameter unter P viel sensitiver für die Prognosen der 10-jährigen Spot-Raten sind als für die der 3-monatigen. Zudem führte im betrachteten Beispiel eine Erhöhung der Prognose für 3-monatige Spot-Raten sogar zu einer Verringerung des langfristigen Mittels der Short-Rate unter P.

Ergebnisse

Zunächst wurden mit der Kalibrierung der PIA aus dem Jahr 2016 Quantilfächer der Short-Rate erstellt. Langfristig prognostiziert das Modell, dass die Short-Rate mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% zwischen 0% und 4% liegen wird. Auch konnte gezeigt werden, dass die stochastischen Short-Rates stark von der deterministischen Funktion φ des G2++ Modells abhängen. Die Addition der Risikoprämie bewirkt

langfristig einen Anstieg der Short-Rate von 1,3 Prozentpunkten gegenüber der Short-Rate unter Q. Eine weitere Charakteristik des G2++ Modells ist, dass die von Short-Rates implizierten Spot-Rates mit steigender Laufzeit zuverlässiger vorausgesagt werden können.

In allen Fällen der eigens durchgeführten Kalibrierung führt die anschließende Verwendung des deterministischen Minimierungsalgorithmus zu einem deutlich kleinerem Zielfunktionswert. Am genauesten kann die Kalibrierung von Cap-Volatilitäten im Normal Modell vorgenommen werden. Die kalibrierten Parameter unterscheiden sich je nach Methode, sind aber ähnlich zu denen der PIA.

Fazit

Das G2++ Modell produziert mit einer hohen Wahrscheinlichkeit Zinsen, die weit unter den niedrigsten bisher beobachteten Zinsen liegen. Dies kann dazu führen, dass vor allem Produkte, deren Ablaufleistung sich größtenteils aus der Zinsentwicklung ergibt, ein niedriges (und damit ein schlechtes) Risikomaß aufweisen. Man könnte die Prozesse X und Y alternativ als Cox- Ingersoll-Ross-Prozess definieren. Da in diesem Fall X und Y fast sicher strikt positiv sind, wäre die deterministische Funktion φ die untere Grenze für die Short-Rate.

Die Kalibrierung führte in allen Fällen zu einer Korrelation von X und Y von höchstens -0,96. Bei einer perfekt negativen Korrelation degeneriert das G2++ Modell zu einem ein-Faktor-Modell. Deshalb wäre es wichtig zu untersuchen, wie höhere Werte für die Korrelation von X und Y erreicht werden können.

Weiterhin hat diese Arbeit gezeigt, dass die Kalibrierung des Modells unter P sehr stark von den Erwartungen der OECD abhängig ist. Dies rührt daher, dass man mit zwei Daten ebenso viele Parameter kalibriert. Im betrachteten Beispiel führt eine Abweichung der Prognose für 10-jährige Spot-Raten von 0,1 Prozentpunkten zu einer langfristigen Abweichung der Short-Rate von fast 2 Prozentpunkten. Die Prognosen der OECD haben somit einen sehr großen Einfluss auf die Simulation von zukünftigen Short-Rate-Szenarien und damit auch auf die Bestimmung der Chancen-Risiko-Klassen.