



## Das lineare Regressionsmodell

### Das ökonomische Modell

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$$

$y$ : die endogene Variable

$x$ : die erklärende Variable

$\beta_0, \beta_1$ : die Parameter (Koeffizienten) des ökonomischen Modells

### Eine Verhaltensgleichung

- $y$  ist linear abhängig von  $x$
- $\beta_0$  ist der  $y$ -Achsenabschnitt  
(also wie hoch ist  $y$ , wenn  $x$  den Wert 0 annimmt)
- $\beta_1$  ist der marginale Effekt von  $x$  auf  $y$  ( $\beta_1 = \partial y / \partial x$ )

z.B. eine Keynesche Konsumfunktion

$$C = \bar{c} + c' \cdot Y^v$$

Der aggregierte Konsum  $C$

ist abhängig vom aggregierten verfügbaren Einkommen  $Y^v$

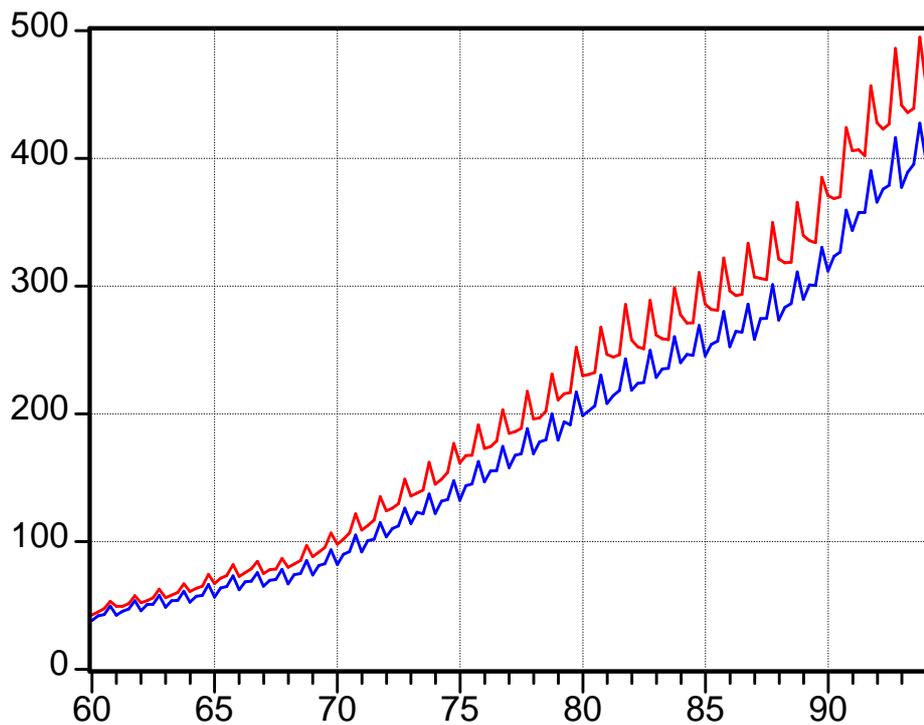
$\bar{c}$  ist der autonome Konsum,  $c'$  ist die marginale Konsumneigung

Die Daten → Eviews Workfile ew21

Schätzung anhand der Daten der vierteljährlichen volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung

Westdeutschland, 1960.1 bis 1994.4

PLOT (Zeitreihenschaubild)



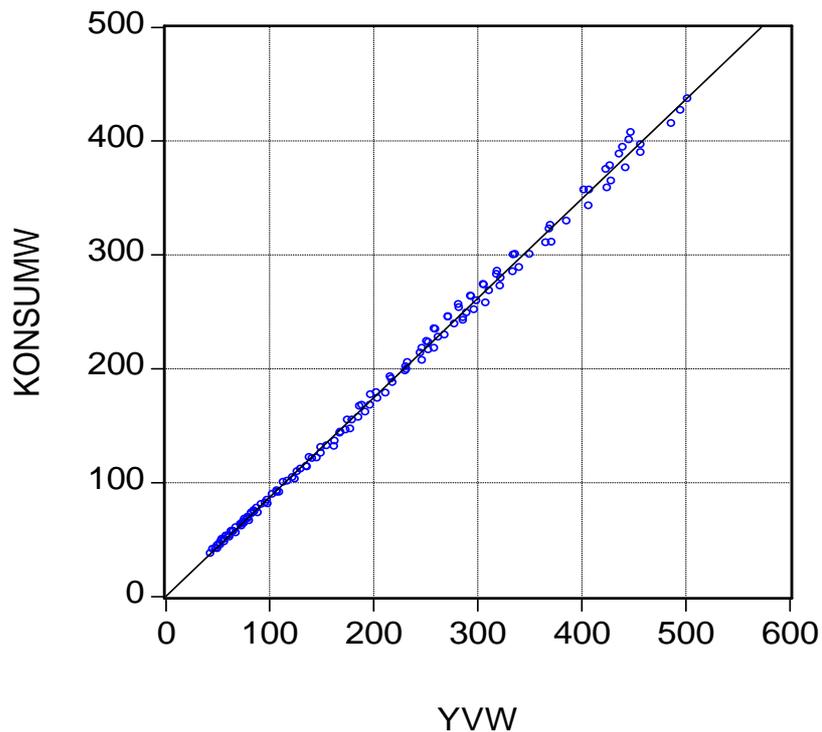
Der Konsum und das verfügbare Einkommen stiegen über die Zeit an

*Ursache: Einerseits Preisanstieg, andererseits Anstieg der Realeinkommen*

Konsum und verfügbares Einkommen wiesen auch starke saisonale Schwankungen auf

*Ursache: Zahlung eines 13. Monatsgehalts im 4. Quartal (Weihnachtsgeld), Ausgaben für Weihnachten*

## SCAT ( $x - y$ Diagramm)



Konsum und verfügbares Einkommen sind positiv korreliert

### Das empirische Modell

1. Die Schätzung der Parameter des Modells kann anhand aggregierter Daten für den Konsum und das verfügbare Einkommen erfolgen
2. Natürlich ist der Konsum nicht nur vom verfügbaren Einkommen abhängig, sondern auch von anderen Faktoren
3. Die Abweichungen vom linearen Zusammenhang werden als Residuen bezeichnet

## Das empirische Modell

$$KONSUMw_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot YVw_t + \varepsilon_t$$

$t$ : Zeitindex,  $t = \{1960.1, \dots, 1994.4\}$

$\varepsilon$  Residuen bzw. Störterme bzw. Abweichungen bzw. Fehler

Schätzung der Koeffizienten  $\beta_0, \beta_1$  anhand der Daten der vierteljährlichen volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung für die Zeit von 1960 bis 1994

## Das ökonometrische Modell

Die Schätzung mit der Methode der Kleinsten Quadrate

$$KONSUMw_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot YVw_t + \hat{\varepsilon}_t$$

bzw.

$$KON\hat{S}UMw_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot YVw_t$$

$\hat{\beta}_0$  : geschätzter autonomer Konsum

$\hat{\beta}_1$  : geschätzte marginale Konsumneigung

$\hat{\varepsilon}_t$  : geschätzte Residuen

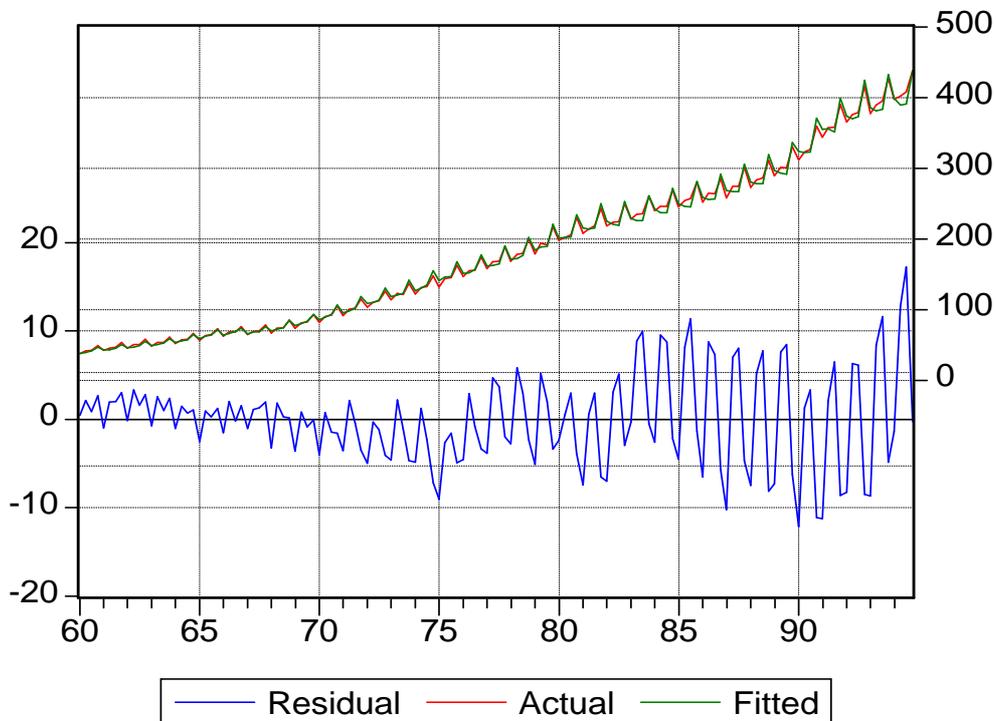
$KON\hat{S}UMw_t$  : geschätzte Konsumausgaben

ls konsumw c yvw

=====  
Dependent Variable: KONSUMW                      Method: Least Squares  
Sample: 1960:1 1994:4  
Included observations: 140  
=====

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.407818	0.866981	0.470389	0.6388
YVW	0.872722	0.003517	248.1528	0.0000

=====  
R-squared                      0.997764              Mean dependent var    184.6276  
Adjusted R-squared          0.997748              S.D. dependent var    111.6542  
S.E. of regression          5.298797              Akaike info criteri    6.187019  
Sum squared resid          3874.661              Schwarz criterion      6.229043  
Log likelihood              -431.0914              F-statistic             61579.81  
Durbin-Watson stat         1.654655              Prob(F-statistic)     0.000000  
=====



## Die Schätzung der Parameter

Wähle ("schätze" bzw. berechne) die Koeffizienten so, dass die Summe der quadrierten Abweichungen der Schätzgleichung für die Beobachtungsperiode minimiert wird

$$\min_{\rightarrow \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} \sum_{t=1960.1}^{1994.4} \hat{\varepsilon}_t^2$$

## Die Berechnung der Parameter

$$\begin{aligned} \sum^t \hat{\varepsilon}_t^2 &= \sum^t (KONSUMw_t - KONSUMw_t)^2 \\ &= \sum^t (KONSUMw_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot YVw_t)^2 \end{aligned}$$

Die Summe der quadrierten Abweichungen wird minimiert, wenn die partiellen Ableitungen in Bezug auf die Parameter gleich 0 gesetzt werden

$$\frac{\partial \sum^t \hat{\varepsilon}_t^2}{\partial \hat{\beta}_0} = \sum^t 2 \cdot (KONSUMw_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot YVw_t) \cdot (-1) = 0$$

$$\frac{\partial \sum^t \hat{\varepsilon}_t^2}{\partial \hat{\beta}_1} = \sum^t 2 \cdot (KONSUMw_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot YVw_t) \cdot (-YVw_t) = 0$$

## Die Normalgleichungen

$$\sum^t KONSUMw_t - \hat{\beta}_0 \cdot T - \hat{\beta}_1 \cdot \sum^t YVw_t = 0$$

Der Mittelwert der geschätzten Residuen ist gleich 0

$$\sum^t KONSUMw_t \cdot YVw_t - \hat{\beta}_0 \cdot \sum^t YVw_t - \hat{\beta}_1 \sum^t YVw_t^2 = 0$$

Die Residuen sind unkorreliert mit der (den) erklärenden Variablen

## Die Beziehungen zwischen den Mittelwerten

$$\overline{KONSUMw} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot \overline{YVw} = 0$$

$$\overline{KONSUMw \cdot YVw} - \hat{\beta}_0 \cdot \overline{YVw} - \hat{\beta}_1 \overline{YVw^2} = 0$$

Lösen der beiden Gleichungen für die 2 Unbekannten  $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$   
liefert die geschätzten Parameter

Die marginale Konsumneigung beträgt etwa 0.87,  
der autonome Konsum ist gering (nicht signifikant von 0 verschieden)

## Unterschiedliche empirische Spezifikationen des Zusammenhangs von Konsum und Einkommen

### a) Die Schätzung in Logarithmen

```

=====
Dependent Variable: LOG(KONSUMW)          Method: Least Squares
Sample: 1960:1 1994:4
Included observations: 140
=====

```

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.078648	0.017249	-4.559593	0.0000
LOG(YVW)	0.989736	0.003328	297.3719	0.0000

```

=====
R-squared          0.998442      Mean dependent var 5.004162
Adjusted R-squared 0.998431      S.D. dependent var 0.692430
S.E. of regression 0.027431      Akaike info criter -4.340089
Sum squared resid  0.103841      Schwarz criterion  -4.298066
Log likelihood      305.8062      F-statistic         88430.05
Durbin-Watson stat 1.689312      Prob(F-statistic)  0.000000
=====

```

Die Schätzung der logarithmierten Werte liefert nicht marginale Effekte von  $x$  auf  $y$ , sondern die marginalen Effekte von  $\ln x$  auf  $\ln y$ , also Elastizitäten

$$\beta_1 = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x}{y}$$

Interpretation:

Der marginale Effekt einer relativen Einkommensänderung auf die relative Änderung des Konsums

→ die Elastizität des Konsums in Bezug auf das verfügbare Einkommen

## Achtung: Das ist ein anderes Modell !

$$\ln KONSUMw_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln YVw_t + \varepsilon_t$$

bzw.

$$KONSUMw_t = \exp(\beta_0) \cdot YVw_t^{\beta_1} \cdot \exp(\varepsilon_t)$$

- *Das verfügbare Einkommen wirkt proportional auf den Konsum, der Störterm wirkt multiplikativ auf die Gleichung (den Konsum)*
- *Die geschätzte Elastizität des Konsums in Bezug auf das verfügbare Einkommen beträgt etwa 1, d.h. ein um ein Prozent höheres Einkommen bedeutet einen um etwa 1 Prozent höheren Konsum*
- *Die Varianz der Residuen erscheint weitgehend konstant über die Beobachtungsperiode, die Residuen weisen immer noch positive Autokorrelation 4. Ordnung auf (Saison)*

### b) Die Schätzung mit Saisondummies

Saisondummies weisen für jeweils ein Quartal (jedes Jahr) den Wert 1 auf, sonst 0

```
show @SEAS(1) @SEAS(2) @SEAS(3) @SEAS(4)
```

obs	@SEAS(1)	@SEAS(2)	@SEAS(3)	@SEAS(4)
1960:1	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1960:2	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000
1960:3	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000
1960:4	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
1961:1	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
.	.	.	.	.

Die Schätzung mit Saisondummies impliziert eine einfache (log)-lineare Form der Saisonbereinigung (konstante Saisonfigur, konstante Saisonfaktoren)

```

=====
Dependent Variable: LOG(KONSUMW)      Method: Least Squares
Sample: 1960:1 1994:4
Included observations: 140
=====

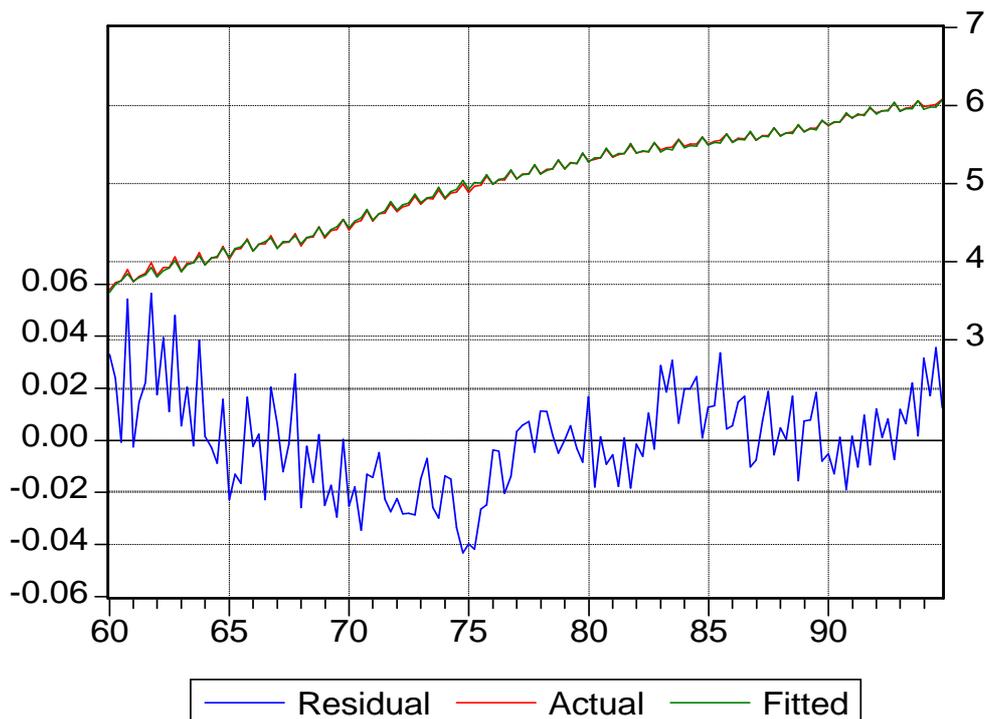
```

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.085586	0.012934	-6.617335	0.0000
LOG(YVW)	0.989902	0.002384	415.1491	0.0000
@SEAS(1)	-0.022565	0.004693	-4.807790	0.0000
@SEAS(2)	0.027245	0.004691	5.807518	0.0000
@SEAS(3)	0.019648	0.004688	4.190742	0.0000

```

=====
R-squared          0.999224      Mean dependent var 5.004162
Adjusted R-squared 0.999201      S.D. dependent var 0.692430
S.E. of regression 0.019571      Akaike info criter -4.994474
Sum squared resid  0.051708      Schwarz criterion  -4.889415
Log likelihood     354.6132      F-statistic        43465.34
Durbin-Watson stat 1.060116      Prob(F-statistic)  0.000000
=====

```



### c) Schätzung in Differenzen der Logarithmen (Wachstumsraten)

Die Schätzung in Differenzen der Logarithmen, also Wachstumsraten, liefert den kurzfristigen Effekt von Einkommensänderungen auf Konsumänderungen, bzw. die kurzfristige Elastizität von Konsumänderungen in Bezug auf Einkommensänderungen

Unterscheidung von 1. Differenzen (Differenzen zum Vorquartal) und 4. Differenzen (Veränderungen zum Vorjahresquartal)

#### Ergebnis:

Die Schätzung in 4. Differenzen impliziert eine weitere Art der Saisonbereinigung, die Saisonummies haben keinen signifikanten Einfluss in der geschätzten Gleichung

Die Bildung von 4. Differenzen eliminiert die Saisonfigur für die Daten des Konsums und des verfügbaren Einkommens

```
=====
Dependent Variable: D(LOG(KONSUMW),0,4) Method: Least Squares
Sample(adjusted): 1961:1 1994:4
Included observations: 136 after adjusting endpoints
=====

```

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.014034	0.002641	5.312863	0.0000
D(LOG(YVW),0,4)	0.779952	0.035928	21.70874	0.0000

```
=====
R-squared          0.778611      Mean dependent var 0.066539
Adjusted R-squared 0.776959      S.D. dependent var 0.026221
S.E. of regression 0.012383      Akaike info criter-5.930314
Sum squared resid  0.020549      Schwarz criterion -5.887480
Log likelihood     405.2613      F-statistic         471.2696
Durbin-Watson stat 1.125757      Prob(F-statistic)  0.000000
=====
```

## Die Interpretation der geschätzten Koeffizienten als Mittelwerte

*Die Schätzung der Konsumquote auf eine Konstante*

```
=====
Dependent Variable: KONSUMW/YVW          Method: Least Squares
Sample: 1960:1 1994:4
Included observations: 140
=====
      Variable      Coefficient Std. Error t-Statistic Prob.
=====
              C          0.877250    0.002099    417.8919    0.0000
=====
R-squared          0.000000    Mean dependent var 0.877250
Adjusted R-squared 0.000000    S.D. dependent var 0.024838
S.E. of regression 0.024838    Akaike info criter -4.545736
Sum squared resid  0.085755    Schwarz criterion  -4.524724
Log likelihood     319.2015    Durbin-Watson stat 1.581111
=====
```

*Die Schätzung der Konsumquote auf die Konstante liefert als Koeffizienten den Mittelwert der Variable über den Beobachtungszeitraum, die Residuen sind die Abweichungen der Konsumquote (jede Beobachtung) vom Mittelwert für die Konsumquote*

*Der Standardfehler der Gleichung ist die durchschnittliche (Wurzel aus der mittleren quadratischen) Abweichung der einzelnen Beobachtungen vom Mittelwert*



*Der Standardfehler des geschätzten Koeffizienten kann interpretiert werden als durchschnittliche Abweichung des Mittelwerts aus 140 Beobachtungen (Stichprobe: 1960.1 bis 1994.4)*

*Die Schätzung der Konsumquote auf 4 Saisondummies liefert als Koeffizienten den Mittelwert der Konsumquote für jedes Quartal*

*Die geschätzten Werte dieser Gleichung können interpretiert werden als bedingter Mittelwert (Erwartungswert) der Konsumquote, gegeben die Jahreszeit (das Quartal)*

*Ebenso können die geschätzten Werte der Konsumfunktion (siehe oben) interpretiert werden als bedingter Erwartungswert für den Konsum, gegeben das Einkommen*

*Der geschätzte Koeffizient  $\beta_1$  kann interpretiert werden als mittlerer Effekt des Einkommens auf den Konsum, der Standardfehler der Gleichung entspricht der durchschnittlichen Abweichung des Konsums (jede Beobachtung) von den geschätzten Werten aus der Konsumfunktion*



*Die Standardabweichung des Koeffizienten ist die durchschnittliche Abweichung des aus 140 Beobachtungen geschätzten (berechneten) Koeffizienten (bzw. Mittelwerts, siehe oben)*

**Literatur:** Winker, Kapitel 3, 6 und 7 (auszugsweise).

## Einige der von EViews ausgewiesenen Test-Statistiken für das Kleinste Quadrate Modell

SMPL	Sample	Schätzzeitraum
COEFFICIENT	$\hat{\beta}_i$	die geschätzten Koeffizienten, $\hat{\beta}_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$ mit $y$ : endogene Variable, $x_i$ : erklärende Variable(n)
STD.ERROR	$s(\hat{\beta}_i)$	Geschätzte Standardabweichung der Koeffizienten
T-STAT.	$t$ -Wert	$= \frac{\hat{\beta}_i}{s(\hat{\beta}_i)}$ , die $t$ -Statistik des geschätzten Koeffizienten. Für $t$ -Wert $\approx 2$ schließt das 95% Konfidenzintervall die Null gerade (nicht) ein
2-TAIL SIG		Konfidenzniveau des Koeffizienten, mit $(1 - p)$ -prozentiger Wahrscheinlichkeit liegt der wahre Koeffizient innerhalb $0 < \hat{\beta}_i < 2 \cdot \hat{\beta}_i$
R-squared	$R^2$	das Bestimmtheitsmaß der Schätzung, Anteil der erklärten Varianz an der Gesamtvarianz
Adjusted R-squared	$\bar{R}^2$	bereinigtes Bestimmtheitsmaß (um die Zahl der Freiheitsgrade)
S.E. of regression	$s$	Geschätzte Standardabweichung der Residuen, durchschnittlicher Fehler der Schätzung
Durbin-Watson stat.	DW	Teststatistik für Autokorrelation erster Ordnung, DW=2: keine Autokorrelation, DW<2: positive Autokorrelation, DW>2: negative Autokorrelation
F-statistic	$F_{k-1, N-k}$	Test auf Signifikanz des $R^2$ , also Test ob das $R^2$ von 0 verschieden ist
Prob(F-statistic)		das Signifikanzniveau für den Test $R^2 = 0$

vertiefende Literatur: Pindyck, Rubinfeld,  
*Econometric models and Economic Forecasts, chapter 3 + 4.*