



Übung 8

Vom gleichgewichtigen zum optimalen Wachstum

Das Ramsey-Modell

- 1 Wiederholung des Solow-Modells
- 2 Ermittlung des optimalen Wachstums
bei exogener Sparquote

Die Goldene Regel der Kapitalakkumulation

- 3 Das optimale Wachstum bei endogener Sparquote

Das Ramsey-Modell

- 4 Zusammenfassung

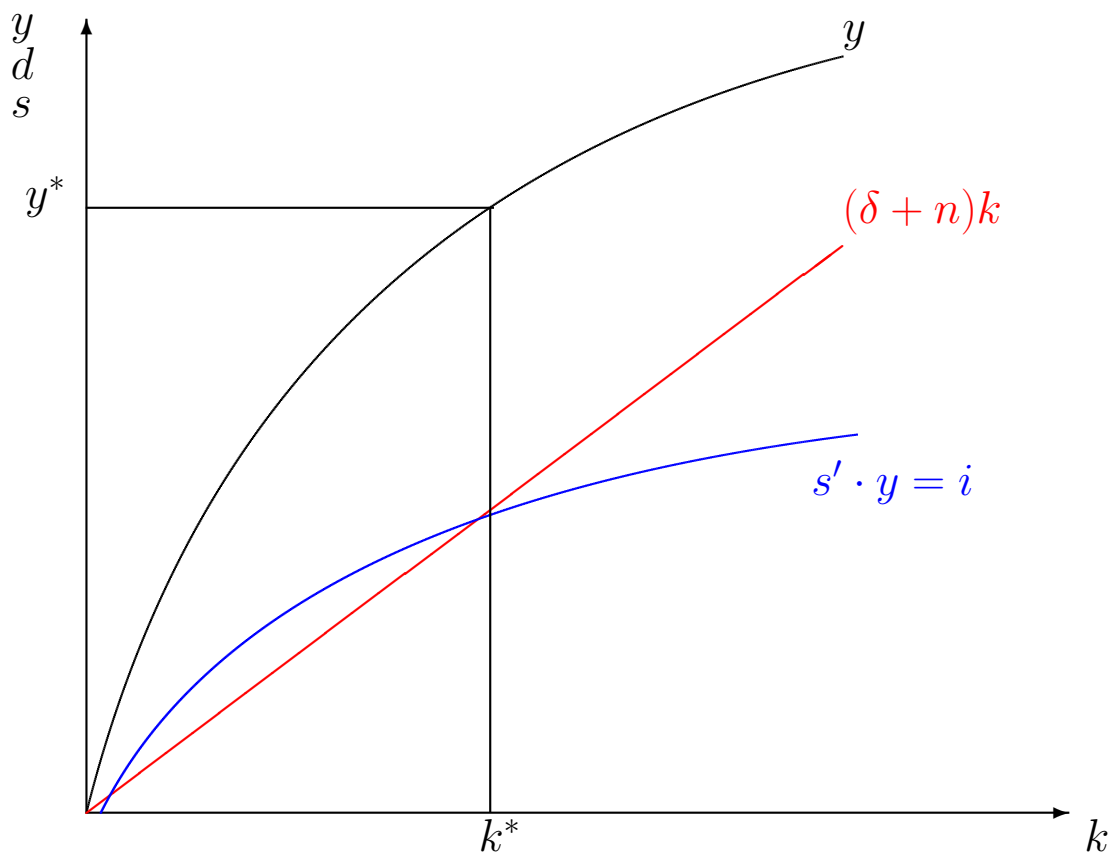
Literatur

Frenkel, M., Hemmer, H.-R., Grundlagen der Wachstumstheorie, München, Vahlen, 1999, Kapitel 4.

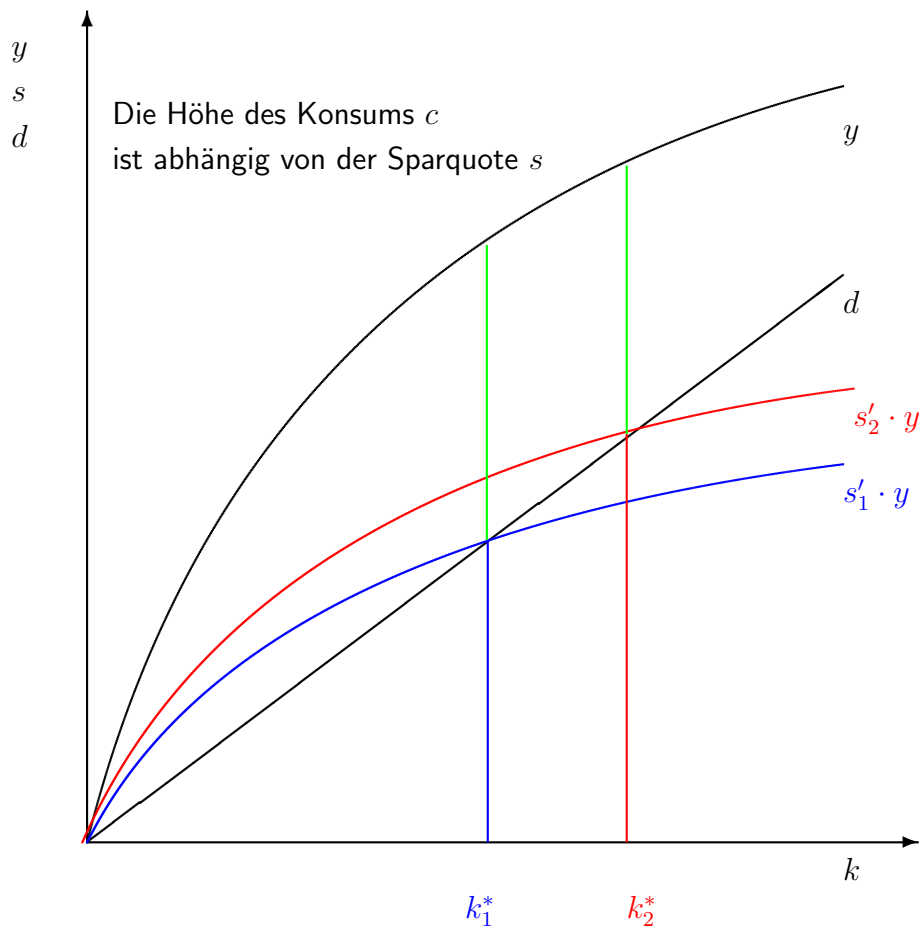
1 Wiederholung des Solow-Modells

- Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $y = \frac{Y}{L} = A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha = A \cdot k^\alpha$
- Die Nachfrageseite $y = c + s' \cdot y$
- Die Investitionen $i = s' \cdot y$
- Änderung des Pro-Kopf-Kapitalstock $\Delta k_{t+1} = i_t - (\delta + n) \cdot k_t$

Das Gleichgewicht: $y^* = A \cdot (k^*)^\alpha$



Konsum bei unterschiedlichen Sparquoten im steady state



⇒

2 Ermittlung des optimalen Wachstums bei exogener Sparquote

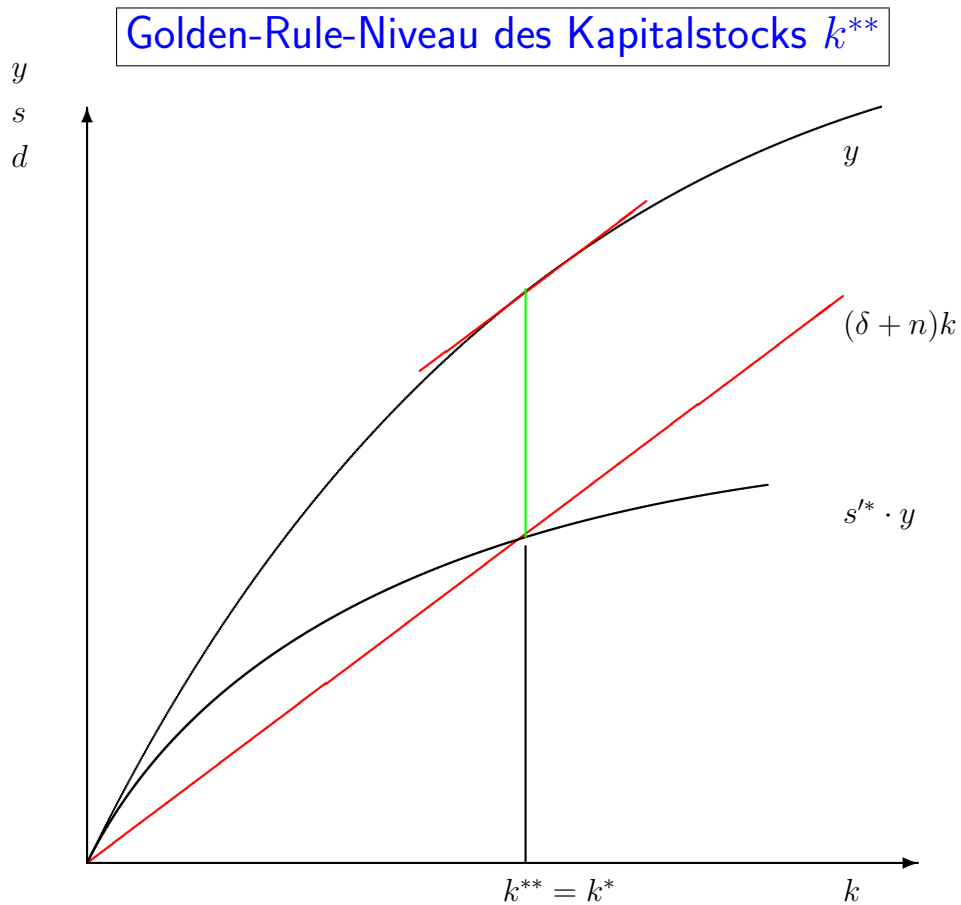
Die Goldene Regel der Kapitalakkumulation

Es gibt einen steady state, in dem der Pro-Kopf-Konsum am höchsten ist.

- $y = c + s' \cdot y$ aufgelöst nach c : \Rightarrow
- im steady state gilt: \Rightarrow
- Somit gilt für den Konsum im steady state: \Rightarrow
- Maximiere c : \Rightarrow
- Ableitung nach k : \Rightarrow
- Optimalitätsbedingung (Golden Rule): \Rightarrow
- Golden-Rule-Niveau des Kapitalstocks: \Rightarrow

Die optimale Sparquote

- Im steady state gilt: $i =$
- Somit auch: $s' =$
- Einsetzen der Optimalitätsbedingung: $s' =$



Anfänglich wächst das Produktionsergebnis durch die hohe Grenzproduktivität des Kapitals schneller als Investitionen zur Erhaltung der Kapitalintensität notwendig wären.

3 Optimales Wachstum bei endogener Sparquote

Das Ramsey-Modell

Bestimmung des optimalen Konsumpfads und der optimalen Ersparnisse ohne eine konstante Sparquote anzunehmen über

- die Nutzemaximierung der Haushalte unter der Nebenbedingung Budgetrestriktion und
- die Gewinnmaximierung der Unternehmen.

Nutzenfunktion im 2 Perioden-Modell

- **Nutzenfunktion im Zwei-Perioden-Modell:** $U_0 = f(u(c_1), u(c_2))$
- Gegenwartswert des in der Zukunft anfallenden Konsums:
- Darstellung mittels Indifferenzkurven:
- Grenzrate der intertemporalen Substitution entspricht der Steigung der Indifferenzkurve

$$-\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial c_1} : \frac{\partial u_1}{\partial c_2} \text{ mit } \frac{\partial u_1}{\partial c_2} = \frac{\partial u_2}{\partial c_2} \cdot \frac{1}{1+\rho}$$

Die Budgetgerade

- Möglichkeit, am Kapitalmarkt Schulden aufzunehmen oder Ersparnisse anzulegen
- Zinssatz und Arbeitseinkommen gegeben
- Darstellung der Budgetgerade:

Das Haushaltsoptimum

- Budgetgerade und Indifferenzkurven kombinieren
- Optimum: Derjenige Punkt, der dem Haushalt den höchsten Nutzen verschafft, d.h. auf der höchsten noch erreichbaren Indifferenzkurve liegt

- Der **optimale Konsumpunkt** eines Haushaltes ist der Tangentialpunkt von Budgetgerade und Indifferenzkurve.

$$\frac{\partial u_1}{\partial c_1} : \frac{\partial u_1}{\partial c_2} = 1 + r \quad \text{mit} \quad \frac{\partial u_1}{\partial c_2} : \left(\frac{\partial u_2}{\partial c_2} \cdot \frac{1}{1+\rho} \right)$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial c_1} : \frac{\partial u_2}{\partial c_2} = \frac{1+r}{1+\rho}$$

- Intertemporale Einkommensumschichtung ist sinnvoll solange $\rho \neq r$

⇒

Unternehmen: Investition als intertemporale Entscheidung

Ziel Gewinnmaximierung

- Haushalte werden für ihren Konsumverzicht durch einen positiven Zins entschädigt \Leftrightarrow
- Unternehmen fragen so lange Ersparnisse zur Investitionsfinanzierung nach, bis die erwirtschaftete Rendite den Kosten (Zins) entspricht.

Periodengleichgewicht auf dem Kapitalmarkt

- Es gilt die Sparentscheidung der Haushalte und die Investitionsentscheidung der Unternehmen zusammenzuführen.
- Das Gleichgewicht liegt dort, wo sich die intertemporale Indifferenzkurve und intertemporale Transformationskurve tangieren.
- Die gemeinsame Tangente an Transformationskurve und intertemporaler Indifferenzkurve zeigt

- für die Unternehmen die Erfüllung der Gewinnmaximierungsbedingung,

$$GPK = 1 + r$$

- für die Haushalte die Erfüllung der Optimalitätsbedingung in Bezug auf die Konsumverteilung an.

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial c_1}}{\left(\frac{\partial u_2}{\partial c_2} \cdot \frac{1}{1+\rho}\right)} = 1 + r$$

Das Wachstumsgleichgewicht

- Im steady state ändert sich der Pro-Kopf-Konsum nicht.
- Der Gesamtkonsum wächst mit der Bevölkerungswachstumsrate n
- Das langfristige Wachstumsgleichgewicht ist erreicht, wenn jene Kapitalintensität realisiert wird, für die gilt:

Das Wachstumsgleichgewicht - Vergleich mit Goldenen Regel

- $GPK = n + \delta$
- Da $\rho > 0$, ist GPK_{Gold} kleiner als GPK_{Ramsey}

4 Schlußbemerkung

- Bei der Endogenisierung der Sparquote wird die Zeitpräferenz berücksichtigt.
- Je höher die Zeitpräferenz, desto weiter entfernt liegt k_{Ramsey} von k_{Gold} und je niedriger ist der Konsum c_{Ramsey}