Universität Ulm | 89069 Ulm | Germany

Dipl.-Kfm. Philipp Buss
Institut für Wirtschaftspolitik

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Ludwig-Erhard-Stiftungsprofessur

Wintersemester 2012/13

Übung 6

Das Solow-Modell und optimales Wachstum

Frenkel, M., Hemmer, H.-R., Grundlagen der Wachstumstheorie, München, Vahlen, 1999, Kapitel 4.

Helmholtzstr. 20, Raum E 02
Tel. 0731 50-24265, Fax -24262

http://www.uni-ulm.de/wipo
Philipp.Buss@uni-ulm.de

1 Das einfache Solow-Modell

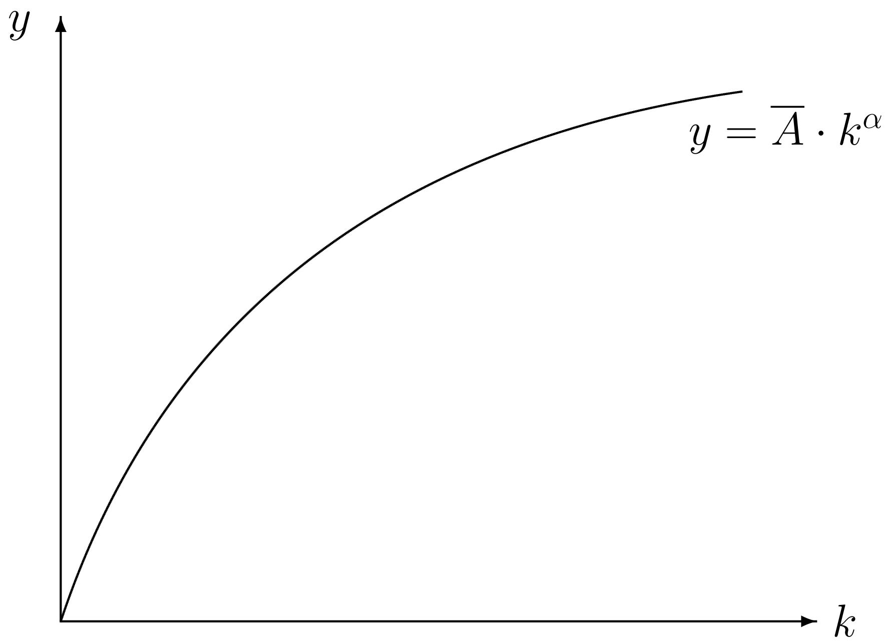
Das Solow-Modell wurde von Robert M. Solow in den 50er Jahren entwickelt; 1987 bekam er den Nobelpreis für seine Leistungen auf dem Gebiet der Wachstumstheorie.

1.1 Kurze Wiederholung: Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

- Arbeitsproduktivität: $\frac{Y}{L} = A \cdot (\frac{K}{L})^{\alpha}$
- Kapitalproduktivität: $\frac{Y}{K} = A \cdot (\frac{K}{L})^{-(1-\alpha)}$
- Kapitalintensität $\frac{K}{L}$ bestimmt Faktorproduktivitäten.
- Grenzprodukt der Arbeit: $\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) \cdot A \cdot (\frac{K}{L})^{\alpha}$
- Grenzprodukt des Kapitals: $\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha \cdot A \cdot (\frac{K}{L})^{-(1-\alpha)}$

Cobb-Douglas-Produktionsfunktion in Pro-Kopf-Größen

- $k = \frac{K}{L}$
- $y = \frac{Y}{L} = A \cdot (\frac{K}{L})^\alpha = A \cdot k^\alpha$
- abnehmende Grenzerträge des Kapitals $\frac{\partial^2 y}{\partial k^2} < 0$



1.2 Die Nachfrageseite

- In einer geschlossenen Volkswirtschaft verwenden die Haushalte das Einkommen für Konsum C und Sparen $S = s' \cdot Y$ mit der Sparquote s':
  $\Rightarrow Y = C + s' \cdot Y$
- Die Gleichung für das Pro-Kopf-Einkommen $y = Y/L$ lautet:
  $y = c + s' \cdot y$
- In einer geschlossenen Volkswirtschaft entsprechen die Pro-Kopf-Investitionen i den Pro-Kopf-Ersparnissen $s' \cdot y$:
  $\Rightarrow i = s' \cdot y$

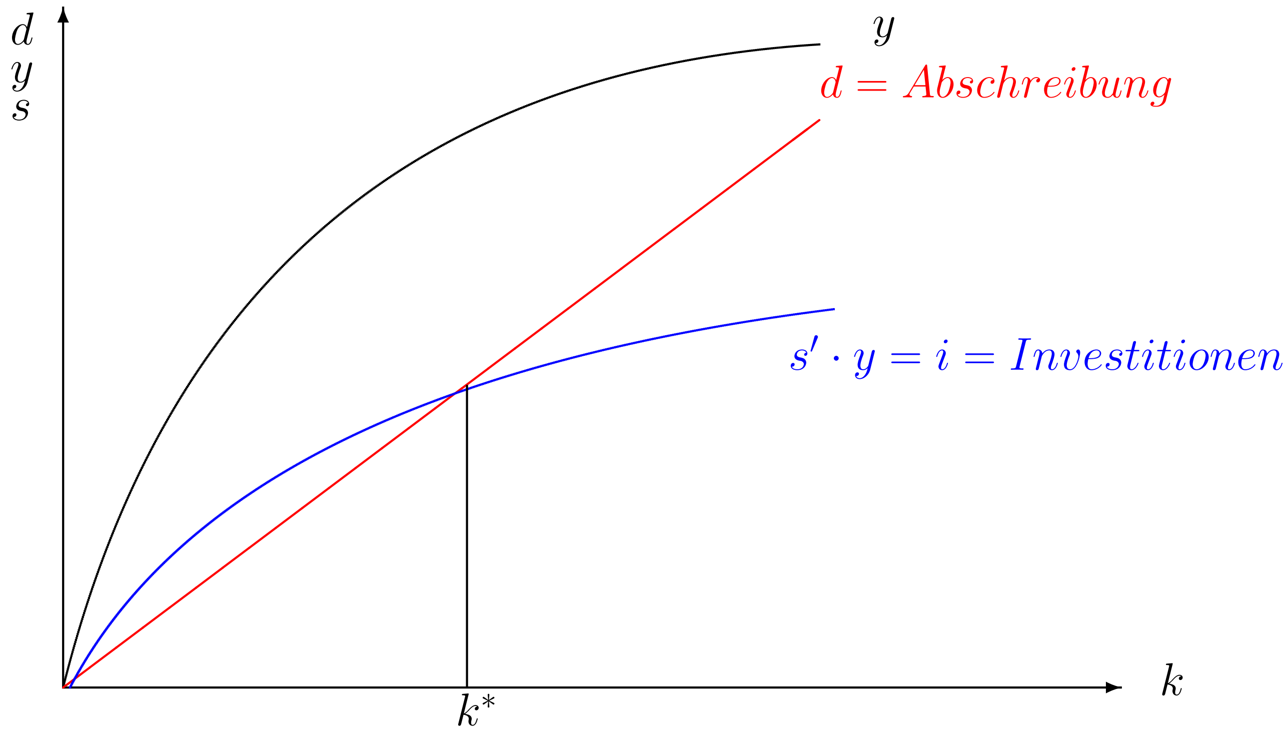
1.3 $\boxed{\text{Der Pro-Kopf-Kapitalstock}}$

- Der Kapitalstock steigt durch Investitionen i
- Der Kapitalstock verringert sich durch Abschreibungen $d = \delta \cdot k$
- Änderung des Kapitalstocks $\Delta k = k_{t+1} - k_t = i_t - \delta \cdot k_t$

  $\Rightarrow$Der Kapitalstock

  - steigt, falls Nettoinvestitionen getätigt werden
    $i_t > \delta \cdot k_t$
  - sinkt, falls die Abschreibungen zu hoch sind
    $i_t < \delta \cdot k_t$
  - bleibt konstant, falls die Nettoinvestitionen null sind
    $i_t = \delta \cdot k_t$

Das Gleichgewicht: Steady- State k^*

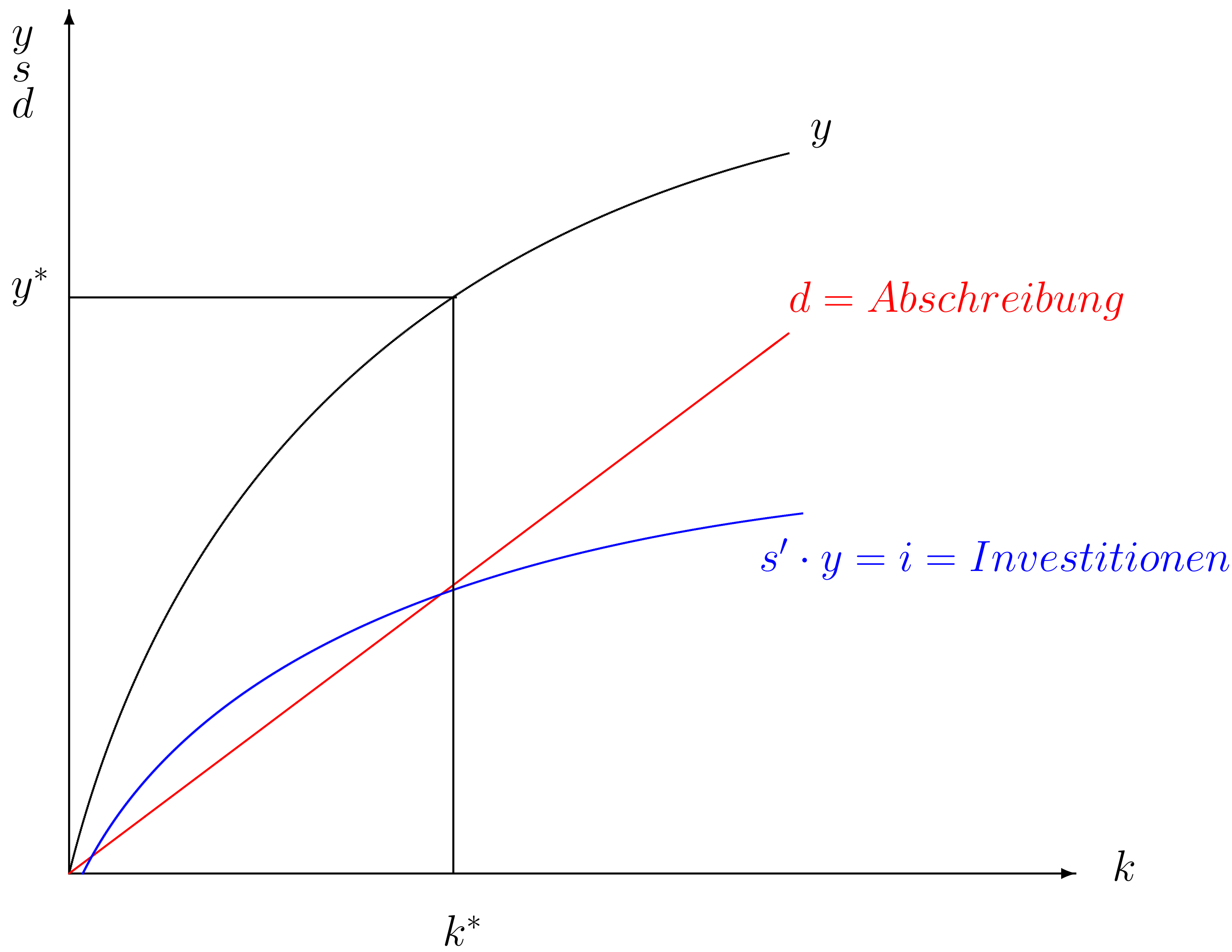


Unabhängig davon welchen Kapitalstock eine Volkswirtschaft in einem Zeitpunkt t_0 hat, wird es einen Prozess zum langfristigen Steady-State k^* geben.

- Falls $i_t > \delta \cdot k_t$ steigt der Kapitalstock. Dieser Prozess endet, wenn $i_t = \delta \cdot k_t$.
- Falls $i_t < \delta \cdot k_t$ führt dies zu einer Reduzierung des Kapitalstocks. Dieser Prozess endet, wenn $i_t = \delta \cdot k_t$.

1.4 Das Gleichgewichtseinkommen

$$\boxed{\text{Das Gleichgewicht: } y^* = A \cdot (k^*)^\alpha}$$

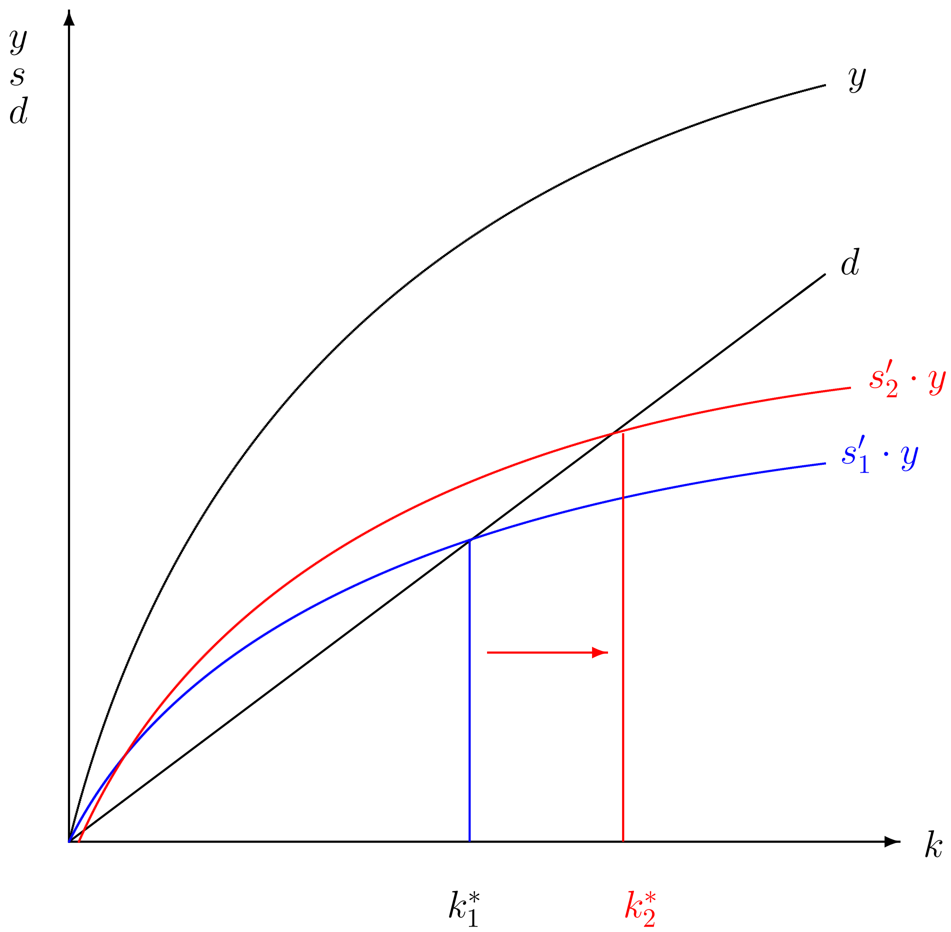


- Der Steady-State-Kapitalstock k^* bestimmt das Einkommen einer Volkswirtschaft.
- Das Solow-Modell erklärt Wachstum bis zum Erreichen des Steady-States.
- Länder, die über einen geringen Kapitalstock verfügen und noch weit von ihrem Gleichgewicht entfernt sind, weisen hohe Wachstumsraten auf.

  (Wirtschaftswunder nach 2. WK)

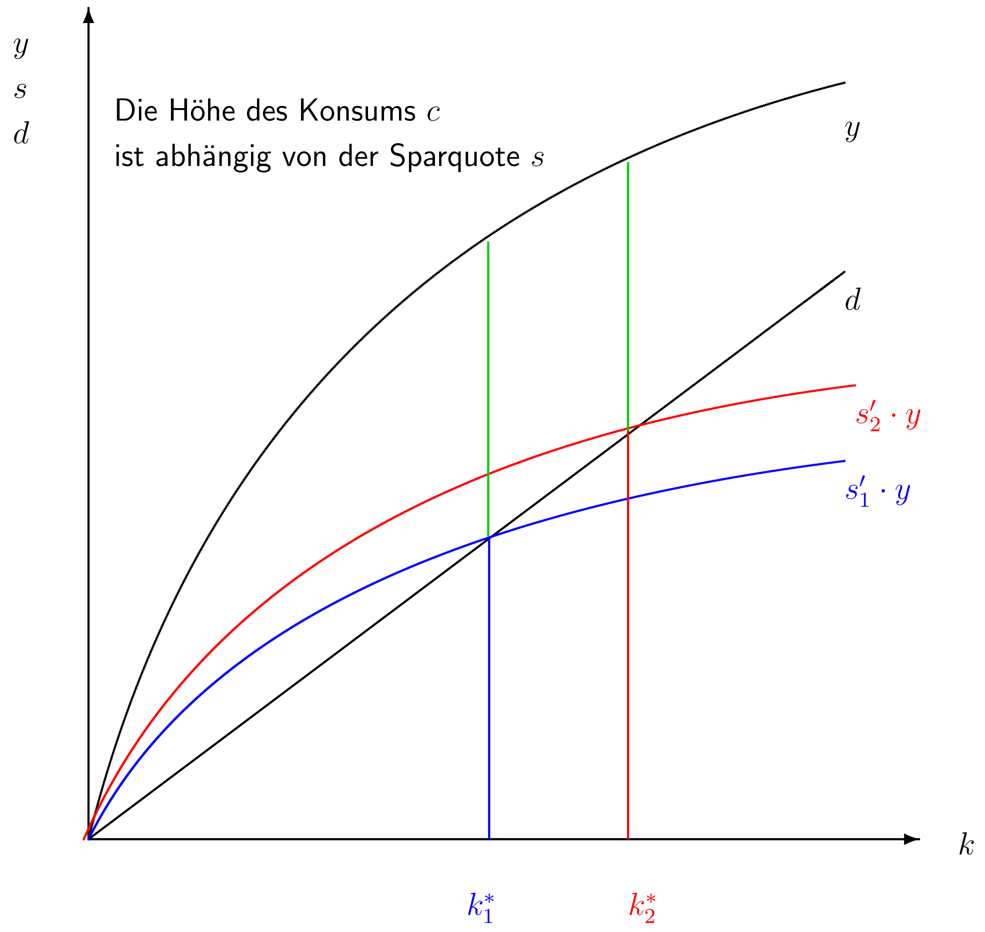
- Eine Volkswirtschaft, die ihr Steady-State erreicht hat, wächst im einfachen Solow-Modell nur noch bei einer Änderung von Sparquote oder Abschreibungsrate.

- Die Sparquote der USA liegt zum Beispiel deutlich unter der chinesischen Sparquote.

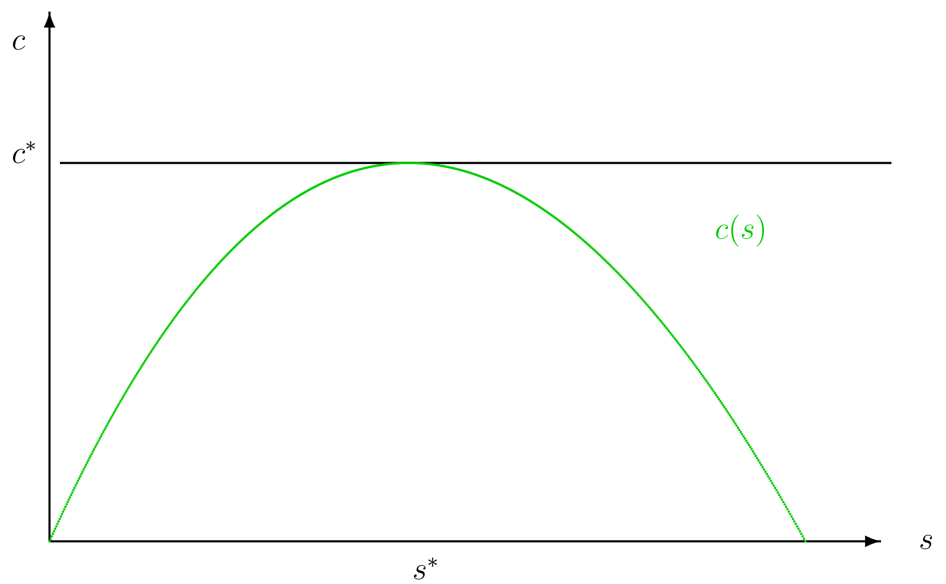


- Es besteht ein positiver Zusammenhang zwischen BIP und Investitionsquote.

Konsum bei unterschiedlichen Sparquoten im steady state



Der maximale Konsum $c^*(s^*)$ in einem steady state



$\Rightarrow$ Es gibt eine optimale Aufteilung der Einkommen auf C und I.

2 Optimales Wachstum bei exogener Sparquote

2.1 Die Goldene Regel der Kapitalakkumulation

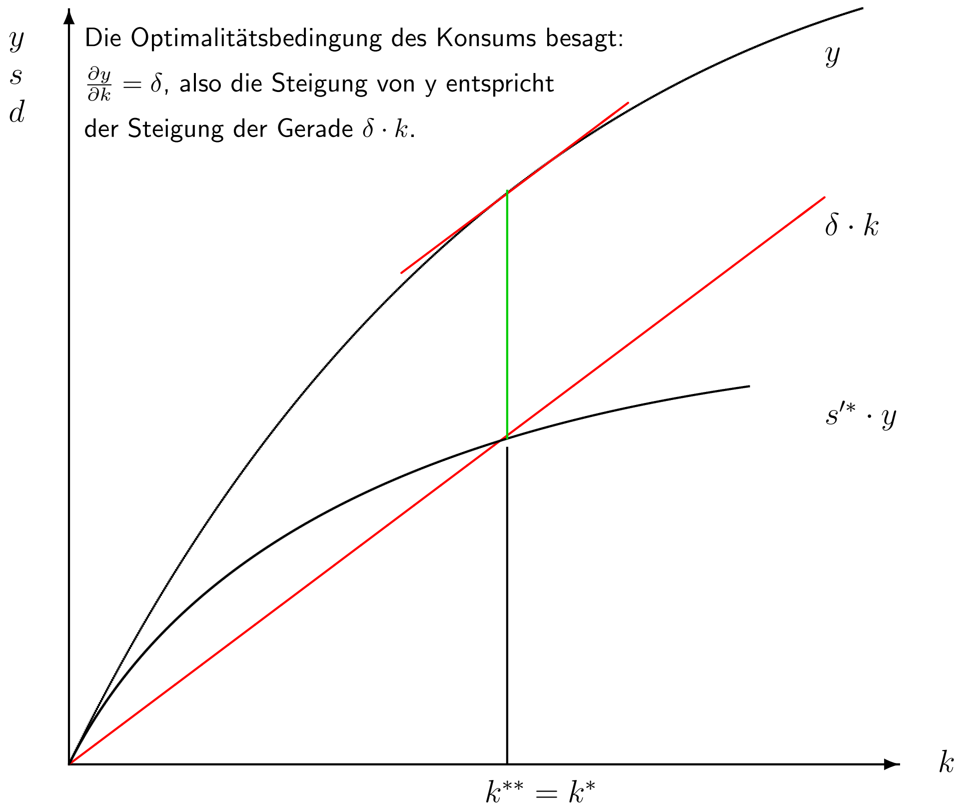
Es gibt ein steady state, in dem der Pro-Kopf-Konsum am höchsten ist.

- Das Pro-Kopf-Einkommen verwenden die Haushalte in einer geschlossenen Volkswirtschaft für Konsum c und Sparen $s = s' \cdot y$ mit der Sparquote s': $\Rightarrow y = c + s' \cdot y$
- Umformuliert errechnet sich der Konsum c aus der Differenz zwischen Einkommen y und Ersparnis s: $\Rightarrow c = y - s' \cdot y$

  und
- im steady state gilt: $\Rightarrow \delta \cdot k = s' \cdot y$
- Somit gilt für den Konsum im steady state: $\Rightarrow c = y - \delta \cdot k$
- Maximiere c: $\Rightarrow max_k \, (y - \delta \cdot k)$
- Ableitung nach k: $\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial k} - \delta = 0$
- Optimalitätsbedingung (Golden Rule): $\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial k} = \delta$

  Das Konsummaximum einer im Gleichgewicht wachsenden Volkswirtschaft ist erreicht, wenn die Grenzproduktivität des Kapitals der Abschreibungsrate der Kapitalintensität (die mit der Abschreibungsrate des Kapitalstocks übereinstimmt) entspricht.
- Auflösen der Gleichung nach k ergibt das Golden-Rule-Niveau des Kapitalstocks: $\Rightarrow k^{**}$

Golden-Rule-Niveau des Kapitalstocks k^{**}



- Mit steigender Kapitalintensität und daraus resultierender Arbeitsproduktivität nimmt zunächst der Konsum pro Kopf zu.
- Grund:
  Das Produktionsergebnis wächst schneller durch die hohe Grenzproduktivität des Kapitals als Investitionen zur Erhaltung der Kapitalintensität notwendig wären.

2.2 $\boxed{\text{Die optimale Sparquote}}$

- Im steady state gilt: $i = s' \cdot y = \delta \cdot k$
- Somit auch: $s' = (\delta \cdot k)/y$
- Einsetzten der Optimalitätsbedingung: $s' = [(\frac{\partial y}{\partial k})k]/y$
- Produktionselastizität des Kapitals: $\frac{\partial y}{\partial k} \cdot \frac{k}{y}$
- Die optimale Sparquote s'^* entspricht der Produktionselastizität des Kapitals α.

Eine Wirtschaft, deren Sparquote nach der Regel der Goldenen Kapitalakkumulation zu hoch ist, sollte weniger sparen und mehr konsumieren. Der höhere Konsum würde den Lebensstandard in der Gegenwart und auch in der Zukunft heben. Andererseits fordert die Goldene Regel bei zu geringer Sparquote zu Konsumverzicht in der Gegenwart auf, um einen höheren Zukunftskonsum zu ermöglichen.

3 Optimales Wachstum bei endogener Sparquote: Das Ramsey-Modell

3.1 Die intertemporale Nutzenfunktion

- Allgemeine Formulierung der intertemporalen Nutzenfunktion:

$$U_0 = \int_0^\infty u(c_t) \cdot e^{-\rho \cdot t} \cdot dt$$

  Die Berücksichtigung der unterschiedlichen Wertschätzung für Gegenwartskonsum und Zukunftskonsum erfolgt über die Zeitpräferenzrate ρ.

  Es gilt: $c_2(t_2)\frac{1}{1+\rho} = c_2(t_1)$

- Nutzenfunktion im Zwei-Perioden-Modell:

$$U_0 = f(u(c_1), u(c_2))$$

3.2 Das Haushaltsoptimum

- Die intertemporale Nutzenfunktion kann als Indifferenzkurve im $c_1 - c_2$-Diagramm dargestellt werden.
- Grenzrate der intertemporalen Substitution entspricht der Steigung der Indifferenzkurve

$$-\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial c_1} : \frac{\partial u_1}{\partial c_2} \text{ mit } \frac{\partial u_1}{\partial c_2} = \frac{\partial u_2}{\partial c_2} \cdot \frac{1}{1+\rho}$$
$$-\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial c_1} : (\frac{\partial u_2}{\partial c_2} \cdot \frac{1}{1+\rho})$$

- Die Budgetgerade hat die Steigung $-(1+r)$, mit Zins $r > 0$

- Der optimale Konsumpunkt eines Haushaltes ist der Tangentialpunkt von Budgetgerade und Indifferenzkurve

$$\frac{\partial u_1}{\partial c_1} : \frac{\partial u_1}{\partial c_2} = 1 + r$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial c_1} : (\frac{\partial u_2}{\partial c_2} \cdot \frac{1}{1+\rho}) = 1 + r$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial c_1} : \frac{\partial u_2}{\partial c_2} = \frac{1+r}{1+\rho}$$

- Der optimale Konsum hängt vom laufenden und zukünftigen Einkommen ab.
  Intertemporale Einkommensumschichtung ist sinnvoll solange $\rho \neq r$
  - $\rho < r$: sparen
  - $\rho > r$: verschulden
- Die Übertragung der mikroökonomischen Untersuchungen auf die Gesamtwirtschaft ist unproblematisch:
  - Verschuldung wird auf makroökonomischer Ebene durch das Ausland möglich,
  - oder man unterstellt, dass die Jungen sparen, während die Älteren entsparen.

3.3 Investition als intertemporale Entscheidung

- Wenn Haushalte für ihren Konsumverzicht durch einen positiven Zins entschädigt werden sollen, setzt dies voraus, dass Unternehmen durch Investitionen in die Zukunft eine entsprechend große Konsumgütermenge produzieren.
- Unternehmen fragen so lange Ersparnisse zur Investitionsfinanzierung nach, bis die erwirtschaftete Rendite den Kosten (Zins) entspricht.
- Der Bruttoertrag der Investition - Abschreibungen = Netto-Zinssatz:

$$\frac{\partial y}{\partial k} - \delta = r$$

- Im $c_1 - c_2$-Diagramm geht man von einem anfänglichen Ausstattungspunkt A aus, dessen Lage die Höhe der in beiden Perioden erzielbaren Produktionsmengen ohne Investitionstätigkeit vorgibt.
- Werden die Ersparnisse in Investitionen umgewandelt, ergibt sich eine Transformationskurve, deren konkave Form durch abnehmende Grenzerträge des Kapitals zu erklären ist.
- Das Steigungsmaß der Transformationskurve ist $\frac{\partial y}{\partial k}$ im betreffenden Investitionspunkt.
- Bei gewinnmaximalem Verhalten wird das Unternehmen für eine Investition genau noch die Kosten r tragen, für die gilt:

$$r = \frac{\partial y}{\partial k} - \delta$$

- Damit gilt für ein Zwei-Perioden-Modell, in dem die Abschreibungsrate $\delta = 1$ beträgt:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = 1 + r$$

3.4 Periodengleichgewicht auf dem Kapitalmarkt

- Es gilt die Sparentscheidung der Haushalte und die Investitionsentscheidung der Unternehmen zusammenzuführen.
- Das Gleichgewicht liegt dort, wo sich die intertemporale Indifferenzkurve und intertemporale Transformationskurve tangieren.
- Die gemeinsame Tangente an Transformationskurve un intertemporale Indiffenrenzkurve zeigt
  - für die Unternehmen die Erfüllung der Gewinnmaximierungsbedingung,
  $$\frac{\partial y}{\partial k} = 1 + r$$
  - für die Haushalte die Erfüllung der Optimalitätsbedingung in Bezug auf die Konsumverteilung an
  $$\frac{\partial u_1}{\partial c_1} : \frac{\partial u_2}{\partial c_2} \cdot (1 + \rho) = 1 + r$$
- Die Brücke zwischen Sparen und Investieren wird dabei durch den Zinssatz r geschlagen

3.5 Das Wachstumsgleichgewicht

- Im steady state ändert sich der Pro-Kopf-Konsum nicht.
- Das langfristige Wachstumsgleichgewicht ist erreicht, wenn jene Kapitalintensität realisiert wird, für die gilt:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \rho + \delta$$

- Da $\rho > 0$ ist das Wachstumsgleichgewicht nach der goldenen Regel kleiner als jenes mit endogener Sparquote

4 Schlussbemerkung

- Bei der Endogenisierung der Sparquote wird die Zeitpräferenz berücksichtigt.
- Je höher die Zeitpräferenz, desto weiter liegt k_{Ramsey} von k_{Gold} entfernt und desto niedriger ist der Konsum c_{Ramsey}.