



Übung 2

Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

1 Einführung

Grundbegriffe, Produktionsfunktion

2 Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

*Substitutionselastizität, Kapitalintensität, Produktivität,
Grenzproduktivität, Produktionselastizität, Skalenelastizität
totale Faktorproduktivität*

3 Ein empirisches Beispiel

*Schätzung einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion
für Westdeutschland 1960–1998*

Literatur:

*Frenkel, M./Hemmer, H-R. (1999), Grundlagen der Wachstumstheorie,
Vahlen, München, S. 33–35.*

1 Einführung

1.1 Grundbegriffe

- Produktion Y
- Produktionspotential YP
- Auslastungsgrad des Produktionspotentials $Q = Y/YP$
- Produktionsfunktion $YP = YP(A, K, L)$
 - Skalierungsparameter (totale Faktorproduktivität) A
 - Kapital K
 - Arbeitskräfte L

1.2 Produktionsfunktion

In Unternehmen werden Inputs (Produktionsfaktoren) durch einen Produktionsprozess in Outputs transformiert.

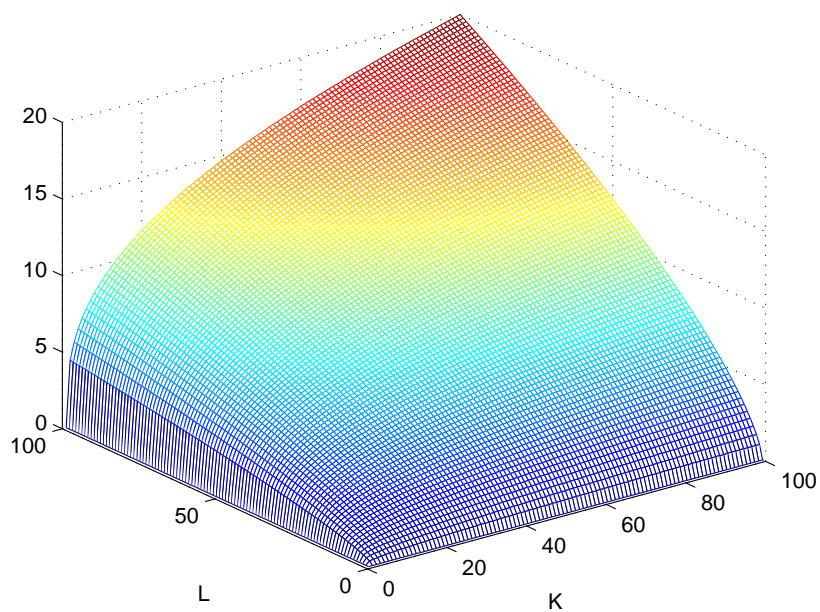
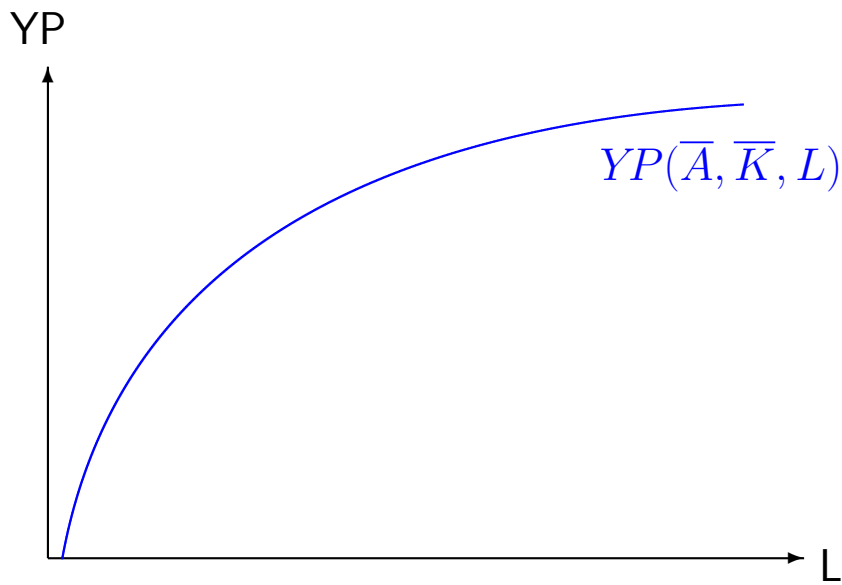
Die **Produktionsfunktion** gibt die **maximale Outputmenge** an, die man mit gegebener Anzahl von Produktionsfaktoren bei einem gegebenen Stand der Technik herstellen kann.

2 Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion ist eine **substitutionale Produktionsfunktion** der Form:

$$YP = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$$

Abbildung 1: Cobb-Douglas-Produktionsfunktion



$$YP(\bar{A}, K, L)$$

2.1 Eigenschaften der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Kapitalintensität

- Die Kapitalintensität $k = \frac{K}{L}$ gibt an, wieviel Kapital auf eine Arbeitskraft kommt.

Produktivität

- Die Durchschnittsproduktivität der Arbeit $\frac{YP}{L}$ gibt an, wieviel Output pro Arbeitskraft erzielt wird.

$$\frac{YP}{L} =$$

- Die Durchschnittsproduktivität des Kapitals $\frac{YP}{K}$ gibt an, wieviel Output pro Kapital erzielt wird.

$$\frac{YP}{K} =$$

Grenzproduktivität

- Die Grenzproduktivität der Arbeit $\frac{\partial YP}{\partial L}$ gibt an, wie sich der Output bei marginaler Veränderung der eingesetzten Arbeitsmenge ändert.

$$\frac{\partial YP}{\partial L} =$$

- Die Grenzproduktivität des Kapitals $\frac{\partial YP}{\partial K}$ gibt an, wie sich der Output bei marginaler Veränderung der eingesetzten Kapitalmenge ändert.

$$\frac{\partial YP}{\partial K} =$$

- Das Grenzprodukt gibt an, um wieviele **Einheiten** die Produktion bei einer marginalen Ausweitung des Faktoreinsatzes steigen kann.
- Graphisch entspricht die Grenzproduktivität der Steigung der Produktionsfunktion in einem YP-K-Diagramm bzw. in einem YP-L-Diagramm. Die Grenzproduktivität beider Produktionsfaktoren ist positiv und abnehmend.

Produktionselastizitäten

- Die Produktionselastizität des Kapitals ist $\frac{\partial YP}{\partial K} / \frac{YP}{K}$
- Die Produktionselastizität der Arbeit ist $\frac{\partial YP}{\partial L} / \frac{YP}{L}$
- Die Produktionselastizität gibt an, um wieviel **Prozent** die Produktion bei einer Ausweitung des Faktoreinsatzes um 1 Prozent steigen kann.
- Die Produktionselastizität ist bei einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion konstant.

$$\frac{\partial YP}{\partial K} / \frac{YP}{K} =$$

$$\frac{\partial YP}{\partial L} / \frac{YP}{L} =$$

Homogenität und Skalenerträge (returns of scale)

Eine Produktionsfunktion heißt **homogen vom Grad c**, wenn für jedes $\lambda > 0$ gilt: $\lambda^c \cdot YP = YP(\lambda K, \lambda L, A)$.

Im Fall der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion ist $c = \alpha + \beta$, da gilt

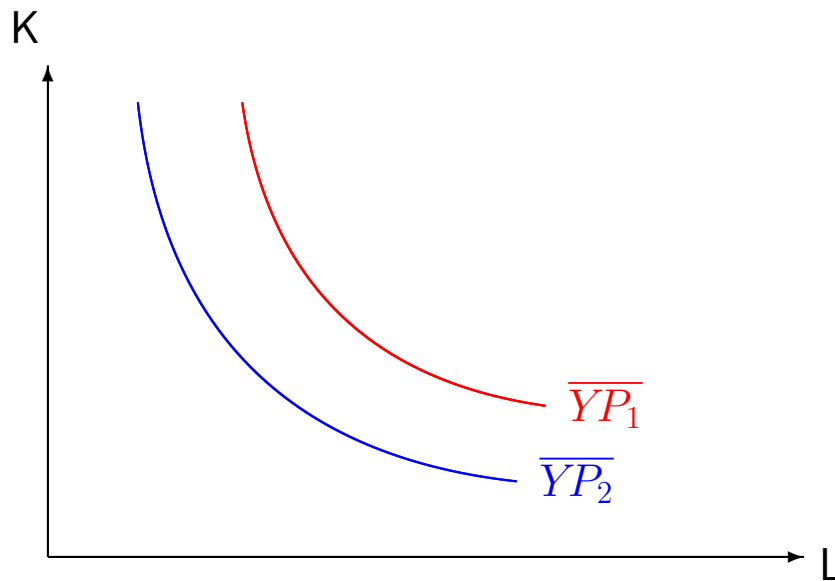
$$YP = \lambda^c \cdot YP_0 = A \cdot (\lambda K_0)^\alpha \cdot (\lambda L_0)^\beta = A \cdot \lambda^{\alpha+\beta} \cdot K_0^\alpha \cdot L_0^\beta$$

Werden alle Inputfaktoren K, L mit einer Konstanten λ multipliziert, wie erhöht sich dann der Output YP?

- linear-homogene Produktionsfunktion ($c = 1$), d.h. konstante Skalenerträge: Output und Inputs steigen im selben Verhältnis also proportional. Verdoppeln sich die Inputs, verdoppelt sich der Output.
- überproportionale-homogene Produktionsfunktion ($c > 1$), d.h. zunehmende Skalenerträge
- unterproportionale-homogene Produktionsfunktion ($c < 1$), d.h. abnehmende Skalenerträge.

2.2 Substitution von Kapital und Arbeit

Abbildung 2: Isoquante der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion



Die **Isoquante** ist der geometrische Ort aller Faktorkombinationen, die das gleiche Outputniveau hervorbringen.

- Die **Grenzrate der technischen Substitution** entspricht der Steigung der Isoquante.
- Die Grenzrate der technischen Substitution entspricht dem umgekehrten Verhältnis der Grenzproduktivitäten zweier Inputfaktoren $\frac{\partial YP/\partial L}{\partial YP/\partial K}$.
- Die Grenzrate der technischen Substitution gibt an, um wieviele Einheiten die Einsatzmenge des Faktors Arbeit L erhöht (verringert) werden muss, wenn der Faktor Kapital um eine infinitesimal kleine Einheit reduziert (vermehrt) wird.

2.3 Die totale Faktorproduktivität

Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $YP = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$ kann auch geschrieben werden als:

$$\ln YP = \ln A + \alpha \cdot \ln K + \beta \cdot \ln L$$

Liegt das Interesse auf der Veränderung des Produktionspotentials, lautet die Gleichung:

$$\Delta \ln YP = \Delta \ln A + \alpha \cdot \Delta \ln K + \beta \cdot \Delta \ln L$$

Empirisch ist das Wachstum des Produktionspotentials, des Kapitals und der Arbeitskräfte beobachtbar.

Die Veränderung von A lässt sich über eine Umformung der Gleichung errechnen:

$$\Delta \ln A = \Delta \ln YP - \alpha \cdot \Delta \ln K - \beta \cdot \Delta \ln L$$

Wie ist die Veränderung des Skalierungsparameters A zu interpretieren?

$\Rightarrow \Delta \ln A$ ist die Rate des technischen Fortschritts!

Häufig wird ein konstantes Wachstum des technischen Fortschritts unterstellt, sodass

$$A_t = A_0 \cdot \exp(\gamma \cdot t)$$

wobei γ die Rate des technischen Fortschritts angibt.

3 Ein empirisches Beispiel

Als Beispiel schätzen wir die Parameter α und β mit Daten für Westdeutschland für die Jahre 1960 bis 1998.

Dazu wählen wir Kapitaleinsatz – bereinigt um Auslastungsschwankungen – und Arbeitszeit als Maß für die Produktionsfaktoren L und K , sodass gilt

$$Y = A \cdot (K \cdot Q)^\alpha \cdot (L \cdot H)^\beta$$

wobei Q den Auslastungsgrad und H das durchschnittliche Arbeitsvolumen in Stunden angibt.

Zudem modellieren wir ein nichtlineares Wachstum des technischen Fortschritts mit

$$A = A_0 \cdot \exp(\gamma_1 \cdot t + \gamma_2 \cdot t^2 + \gamma_3 \cdot t^3)$$
$$\hat{A} = \frac{\partial \ln A}{\partial t} = \gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2 \cdot t + 3 \cdot \gamma_3 \cdot t^2.$$

Wir normieren A_0 auf 1, logarithmieren und können schließlich das empirische Modell schreiben als

$$\ln Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot t + \gamma_2 \cdot t^2 + \gamma_3 \cdot t^3 + \alpha \cdot \ln(K_t \cdot Q_t) + \beta \cdot \ln(L_t \cdot H_t) + \varepsilon_t$$

mit dem Fehlerterm $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$. Zur Schätzung der Parameter ziehen wir die Methode der kleinsten Quadrate heran ($\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 \rightarrow \min$).

Die Ökonometrie-Software EViews liefert folgende Schätzergebnisse:

```

=====
Dependent Variable: LOG(Y)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1960 1998
Included observations: 39 after adjustments
=====

```

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.596219	1.596071	-1.000093	0.3245
@TREND(1960)	0.044636	0.010910	4.091123	0.0003
@TREND(1960)^2	-0.001046	0.000264	-3.958221	0.0004
@TREND(1960)^3	1.23E-05	3.50E-06	3.525655	0.0013
LOG(K*Q)	0.303531	0.117978	2.572780	0.0148
LOG(L*H)	0.570212	0.180862	3.152738	0.0034

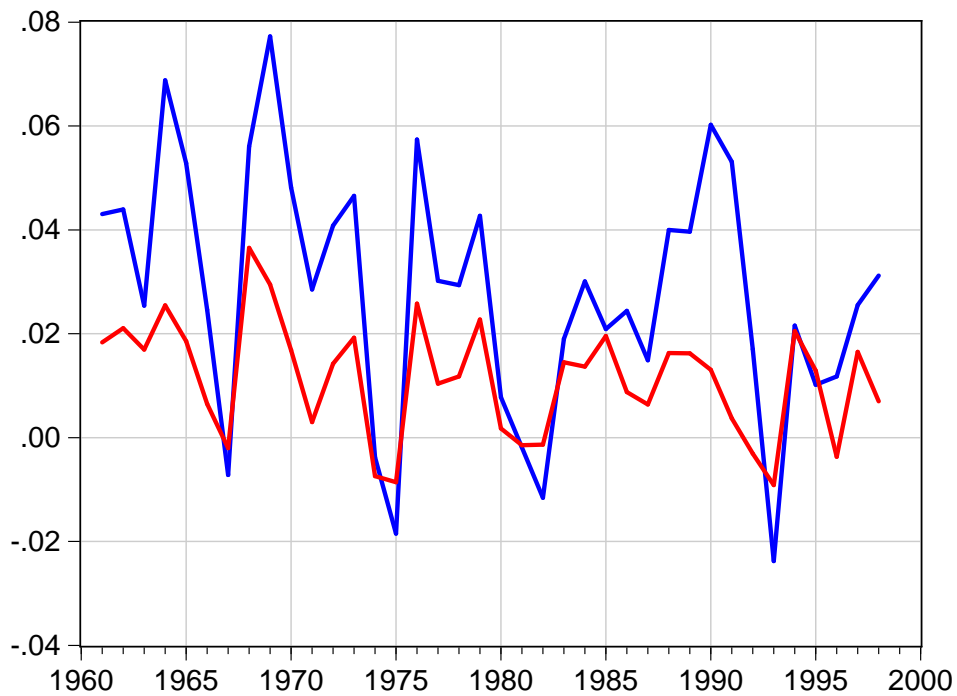
```

=====
R-squared          0.996242      Mean dependent var 7.404840
Adjusted R-squared 0.995672      S.D. dependent var 0.310474
S.E. of regression 0.020424      Akaike info crit  -4.803549
Sum squared resid  0.013766      Schwarz criterion  -4.547617
Log likelihood     99.66922      Hannan-Quinn crit -4.711723
F-statistic        1749.586      Durbin-Watson stat 0.307990
Prob(F-statistic)  0.000000
=====

```

Die geschätzte Produktionselastizität des Kapitals beträgt $\hat{\alpha} = 0.30$, die geschätzte Produktionselastizität der Arbeit beträgt $\hat{\beta} = 0.57$.

Der Beitrag des Kapitals zum Wirtschaftswachstum

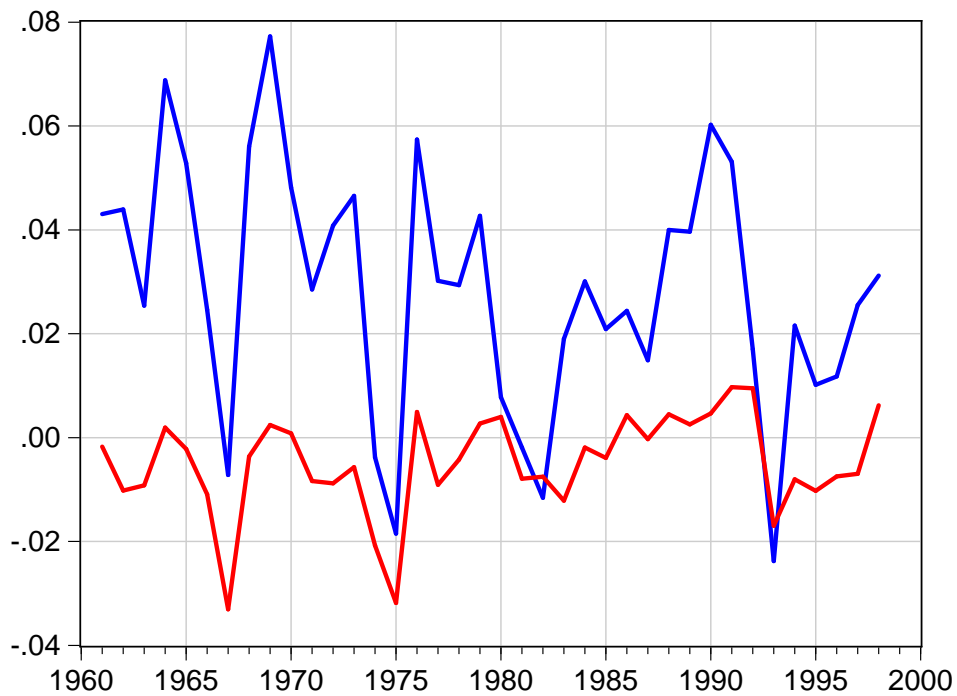


- Wirtschaftswachstum $\Delta \ln Y$
- der Beitrag des Kapitals, $\hat{\alpha} \cdot \Delta \ln(K \cdot Q)$

*Daten für Westdeutschland zu Preisen von 1991,
Veränderungsraten berechnet als Differenzen von Logarithmen,*

$$\hat{\alpha} = 0.30$$

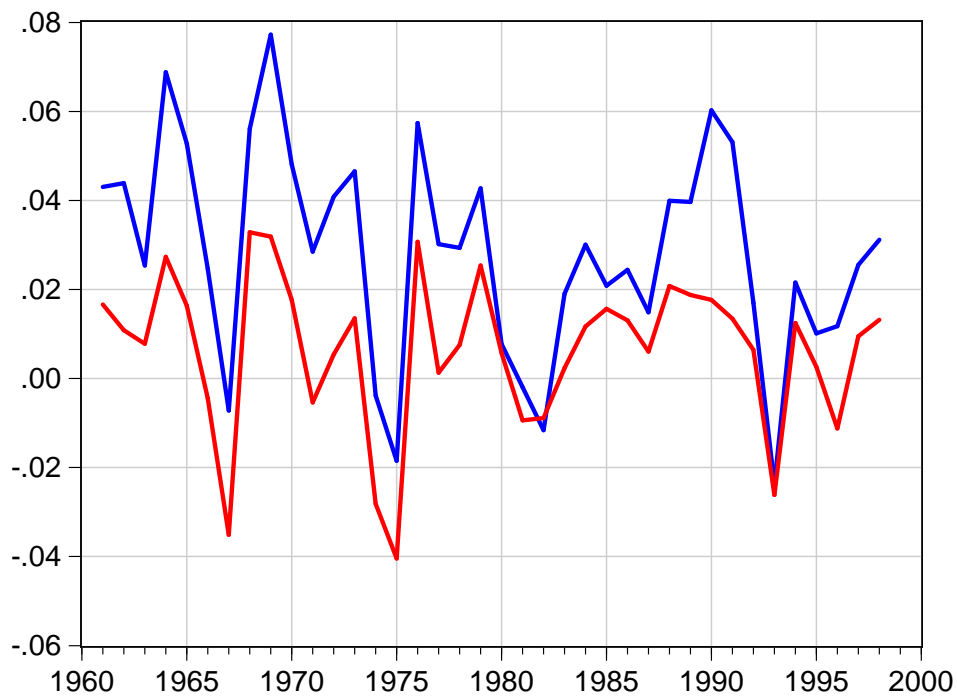
Der Beitrag der Arbeit zum Wirtschaftswachstum



- Wirtschaftswachstum $\Delta \ln Y$
- der Beitrag der Arbeit, $\hat{\beta} \cdot \Delta \ln(L \cdot H)$

*Daten für Westdeutschland zu Preisen von 1991,
Veränderungsraten berechnet als Differenzen von Logarithmen,
 $\hat{\beta} = 0.57$*

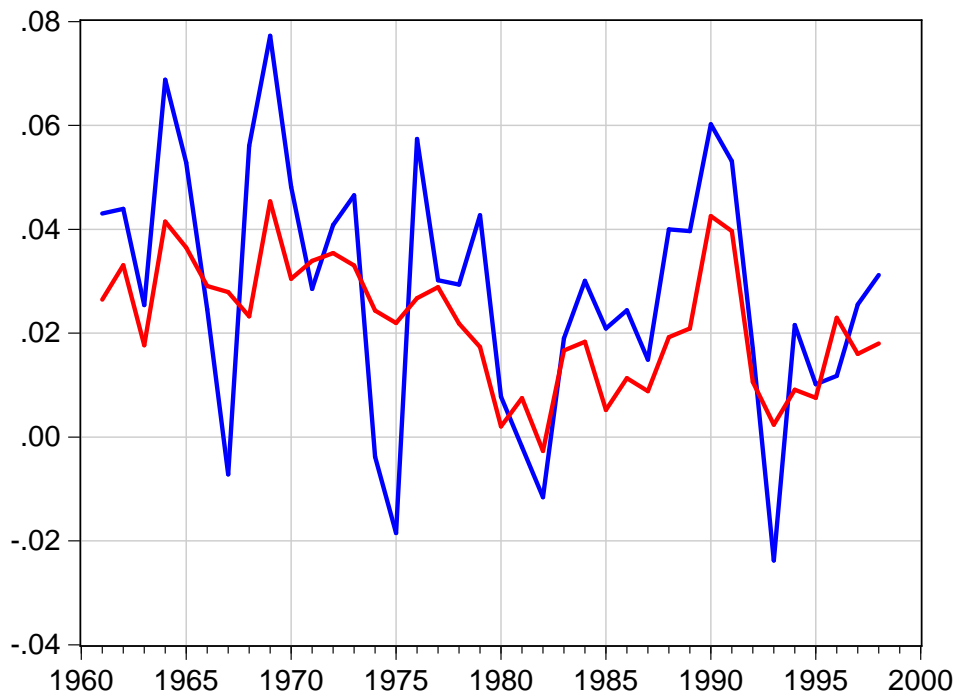
Der Beitrag von Kapital und Arbeit zum Wirtschaftswachstum



- Wirtschaftswachstum $\Delta \ln Y$
- der Beitrag des Kapitals und der Arbeit,
 $\hat{\alpha} \cdot \Delta \ln(K \cdot Q) + \hat{\beta} \cdot \Delta \ln(L \cdot H)$

*Daten für Westdeutschland zu Preisen von 1991,
Veränderungsraten berechnet als Differenzen von Logarithmen,
 $\hat{\alpha} = 0.30, \hat{\beta} = 0.57$*

Der unerklärte Rest



- Wirtschaftswachstum $\Delta \ln Y$
- Veränderungen der totalen Faktorproduktivität,
 $\Delta \ln A = \Delta \ln Y - \hat{\beta} \cdot \Delta \ln(L \cdot H) - \hat{\alpha} \cdot \Delta \ln(K \cdot Q)$

Daten für Westdeutschland zu Preisen von 1991,

Veränderungsraten berechnet als Differenzen von Logarithmen,

$$\hat{\alpha} = 0.30, \hat{\beta} = 0.57$$