Probeklausur zur Mathematik 3 für Wirtschaftswissenschaftler

(13.02.2008, 12.00 Uhr - 14.00 Uhr)

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hilfsmittel: ein DIN-A-4-Blatt, allerdings mit keinen Beispielen, kein Taschenrechner

Viel Erfolg!

1. a) Geben Sie ein Beispiel für eine explizite, nicht autonome Differenzgleichung 2. Ordnung an.
b) Wie viele Anfangswerte müssen zu einer expliziten Differenzgleichung m-ter Ordnung vorgegeben sein, damit die Lösung eindeutig wird?
c) Was versteht man bei einer linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung unter einem Fundamentalsystem?

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differenzgleichungen und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

Berechnen Sie in Teil a) zusätzlich die Lösung des Anfangswertproblems.

a) $y_{k+3} - y_{k+2} - 6y_{k+1} = -12, \quad y_0 = \frac{14}{9}, \quad y_1 = \frac{17}{2}, \quad y_2 = 2$

b) $y_{k+3} + \frac{2}{3}y_{k+2} - \frac{1}{12}y_{k+1} - \frac{1}{12}y_k = 6$

Hinweis zu Teil b): $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ ist eine Nullstelle des zug. charakteristischen Polynoms

3. Der Dorfbäcker hat Konkurrenz von der Großbäckerei 'Backfrisch' bekommen.

In der Eröffnungswoche gingen 450 der 1800 Einwohner zu 'Backfrisch' zum Einkaufen, während sich die restlichen Einwohner für den gewohnten Einkauf beim Dorfbäcker entschieden. Im Lauf der Zeit konnte beobachtet werden, dass 80% der Kunden des Dorfbäckers diesem auch in der folgenden Woche treu blieben und 10% der Kunden von 'Backfrisch' in der darauffolgenden Woche wieder zum Dorfbäcker gingen.

Es werde nun vorausgesetzt, dass sich dieses Übergangsverhalten nicht verändert und jeder Dorfbewohner einmal in der Woche in einer der beiden Bäckereien einkauft.

- a) Wie viele Kunden hat der Dorfbäcker in der k -ten Woche ($k \in \mathbb{N}_0$)?
- b) In der wievielten Woche hat die Großbäckerei erstmals mehr Kunden als der Dorfbäcker? (Formel angeben)
- c) Wie verteilen sich die Kunden langfristig gesehen?

4. Ein Patient nimmt mit einem Medikament täglich 4 mg eines Wirkstoffs ein. 40% des im Körper vorhandenen Wirkstoffs werden täglich ausgeschieden.

Zu Beginn der Anwendung hat der Patient 3 mg des Wirkstoffs im Blut.

- a) Stellen Sie die Differenzengleichung für den Wirkstoffgehalt S_n des Medikaments im Blut nach n Tagen auf.
- b) Gibt es einen Grenzwert für den Wirkstoffgehalt, der nicht überschritten wird?
- c) Wird der Patient je mehr als 9 mg des Wirkstoffs im Blut haben? Wenn ja, wann? (Formel angeben)

5. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y' - 3x^2y + \frac{x^2}{2}y^3 = 0, \quad y(0) = 2$

b) $y' = y^2 \cdot x \ln x, \quad y(1) = 4$

c) $y' + \frac{y}{x} - 4x^2 - 2 = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 4$

6. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

a) $3y^{(3)} - 12y'' + 18y' - 12y = -24$

b) $y'' = 7y' + 5e^{3x} - 12y$

7. Zeigen Sie: Ist

$$y^{(m)} + \sum_{\nu=0}^{m-1} a_{\nu}y^{(\nu)} = b \quad \text{mit} \quad a_0 \neq 0, \quad b \neq 0$$

eine lineare autonome Differentialgleichung, so ist $y_p = \frac{b}{a_0}$ eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung.