K. Stadtmüller
M. Thalmaier

Wintersemester 2007/2008
24.10.2007
Blatt 1

Übungen zur Mathematik 3 für Wirtschaftswissenschaftler

(Vorlesungshomepage: http://www.mathematik.uni-ulm.de/sgm/mfww)

1. **Vereinfachtes Wettrüstungsmodell, Variation nach L.F. Richardson**
   Es seien A und B zwei rivalisierende Staaten. Die Rüstungsausgaben von A im Jahr n seien $A(n)$, die des Staates B seien $B(n)$. Das nachstehende Modell der Rüstungsausgaben beider Staaten basiert auf folgenden Überlegungen:
   Falls B viel Geld in Rüstung inverstiert hat, so wird A seinen Rüstungsetat erhöhen. Da hohe Rüstungsausgaben die Staatskasse leeren, hat A ein natürliches Interesse, diese gering zu halten.
   Diese Bedingungen werden in folgender Gleichung widergegeben:
   $$A(n+1) = (1-r)A(n) + sB(n) + a, \quad 0 \leq r \leq 1,\ a, s \geq 0,$$
   wobei r ein Maß für den wirtschaftlichen Zustand des Staates A und s ein Maß für das Misstrauen gegenüber dem Staat B darstellt.
   Ähnliche Überlegungen für den Staat B führen zu der Gleichung
   $$B(n+1) = (1-R)B(n) + SA(n) + b, \quad 0 \leq R \leq 1,\ b, S \geq 0.$$
   Vereinfachend nehmen wir an, dass beide Staaten das gleiche Misstrauen gegeneinander haben, d.h. $s = S$, und dass die wirtschaftliche Stärke beider Länder identisch sein soll, d.h. $r = R$.
   Addiert man beide Gleichungen, so erhält man
   $$A(n+1) + B(n+1) = (1-r+s)\Big(A(n) + B(n)\Big) + c,$$
   wobei $c = a + b$.
   Setzt man $T(n) := A(n) + B(n)$, so betrachet man die Gesamtausgaben für die Rüstung beider Staaten.

   a) Geben Sie die Differenzengleichung für $T(n)$ an, die sich aus obigem Modell ergibt und lösen Sie diese mit der Anfangsbedingung $T(0) = T_0$.
   b) Es seien $T(0) = 199,\ T(1) = 205,\ T(2) = 215$. Eskaliert die Wettrüstung?

2. **Differentialgleichungen**
   Berechnen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichungsprobleme.

   a) $y'(x) + \dfrac{2}{x} y(x) = x, \quad y(1) = 1$
   b) $y'(x) = -y^2 \sin(x), \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

3. **Künstliche Ernährung**
Künstliche Ernährung wird bei Patienten, die zur Nahrungsaufnahme nicht selbstständig fähig sind durch Infusion von Glukose (Traubenzucker) in die Blutbahn bewerkstelligt. $u(t)$ bezeichne den Glukosegehalt im Blut eines Kranken zur Zeit t und es sei $u(0) := u_0$. Wir nehmen an, dass dem Patienten Glukose mit der konstanten Rate von β Gramm pro Minute zugeführt wird. Der Abbau der Glukose erfolgt mit einer Rate, die proportional zum vorhandenen Glukosegehalt ist, also in der Form $-\alpha u(t)$ mit einer positiven Konstante α.

   a) Bestimmen Sie $u(t)$ für $t \geq 0$.
   b) Der Glukosegehalt nähert sich mit zunehmender Zeit einem Gleichgewicht. Wie groß ist er?

4. ***m*-te Differenz von *y***

   a) Zeigen Sie induktiv:

$$(1 + \triangle_h)^m y(x) = y(x + mh) \quad \forall\ m \in \mathbb{N}_0,$$

   wobei $(1 + \triangle_h)^0 y(x) := y(x)$.

   b) Zeigen Sie nun, dass

$$\triangle_h^m y(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j y\big(x + (m - j) \cdot h\big).$$

   Hinweis: Es gilt: $\triangle_h^m y(x) = (-1 + 1 + \triangle_h)^m y(x)$