

Übungen zur Mathematik 3 für Wirtschaftswissenschaftler

(Vorlesungshomepage: <http://www.mathematik.uni-ulm.de/sgm/mfww>)

1. Gleichgewichtslösung

Untersuchen Sie, ob für die folgenden Differenzgleichungen Gleichgewichtslösungen existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $y_{k+3} = 2y_{k+2} - 2y_{k+1} + 3$

b) $y_{k+1} = 2 - y_k^2$

2. Allgemeine Lösung, Gleichgewichtslösung

Gegeben sei die homogene Differenzgleichung

$$y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie:

a) $y_k^{(0)} = (-2)^k$, $y_k^{(1)} = 3 \cdot (-2)^k$ und $y_k^{(2)} = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$ sind Lösungen der Differenzgleichung.

b) Überprüfen Sie, ob die Lösungen ein Fundamentalsystem bilden und bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen Differenzgleichung.

c) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslösung der obigen Differenzgleichung. Ist diese stabil?

3. Lineare Differenzgleichung

Gegeben sei die homogene Differenzgleichung

$$y_{k+3} + \frac{1}{2}y_{k+2} - \frac{7}{2}y_{k+1} - 3y_k = 0.$$

a) Untersuchen Sie, ob die Lösungen $y_k^{(1)} = (-1)^k$, $y_k^{(2)} = 2^k$ und $y_k^{(3)} = (-\frac{3}{2})^k$ ein Fundamentalsystem bilden.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzgleichung für die Anfangswerte $y_0 = -2$, $y_1 = 7$ und $y_2 = -4$.

c) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslösung der obigen Differenzgleichung.

d) Wie sieht die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Differenzengleichung

$$y_{k+3} + \frac{1}{2}y_{k+2} - \frac{7}{2}y_{k+1} - 3y_k = -5$$

aus?

e) Bestimmen Sie die Lösung der inhomogenen Differenzengleichung aus Teil d) für die Anfangswerte $y_0 = 0$, $y_1 = 5$ und $y_2 = 3$.

4. Beweis zu Satz 2.11

Es bezeichne \mathcal{L}_h die Menge aller Lösungen der homogenen Differenzengleichung

$$y_{k+m} = \sum_{j=0}^{m-1} f_j(k)y_{k+j}$$

und $(y_k^{(p)})$ sei eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung

$$y_{k+m} = \sum_{j=0}^{m-1} f_j(k)y_{k+j} + g(k).$$

Dann ist die Lösungsgesamtheit von der inhomogenen Differenzengleichung gegeben durch

$$\mathcal{L} = (y_k^{(p)}) + \mathcal{L}_h.$$