K. Stadtmüller
M. Thalmaier

Wintersemester 2007/2008
07.11.2007
Blatt 3

Übungen zur Mathematik 3 für Wirtschaftswissenschaftler

(Vorlesungshomepage: http://www.mathematik.uni-ulm.de/sgm/mfww)

1. **Modell zur Einkommensverteilung von Champernowne (1953)**
Die Bevölkerung eines Landes sei in disjunkte Einkommenssteuerklassen $R_0, R_1, R_2, \ldots$ aufgeteilt. Die Anzahl der Personen in der Klasse R_n werde mit x_n bezeichnet. Zu fixierten Zeitpunkten (z.B. jeweils am Ende eines Jahres) erfolgt ein Wechsel zwischen den Einkommensklassen nach folgenden Regeln:

   - 10% der Personen einer jeden Klasse $R_n, n \in \mathbb{N}$ (also außer der Klasse R_0) wechseln in die nächst tiefere Klasse R_{n-1}.
   - Von der Klasse R_n in die Klasse R_{n+1} steigen $\left(\frac{30}{n+1}\right)$ % der Personen der Klasse $R_n, n \in \mathbb{N}_0$ auf.
   - Weiterhin seien $x_0 = 14400$ und $x_1 = 3x_0 = 43200$ vorgegeben.

   Die Einkommensverteilung befindet sich im Gleichgewicht, falls sowohl vor als auch nach dem Klassenwechsel dieselbe Einkommensverteilung vorliegt.

   a) Stellen Sie die Differenzengleichung für $n \in \mathbb{N}$ für den Fall des Gleichgewichts auf. Behandeln Sie den Fall $n = 0$ gesondert. Ist es Zufall, dass $x_1 = 3x_0$?
   Hinweis: Stellen Sie anhand der obigen Wechselregeln die Formel zur Berechnung der Einkommensverteilung nach dem Wechsel aus der Einkommensverteilung vor dem Wechsel auf. Die Gleichgewichtsbedingung führt somit auf eine Gleichung der Form $x_n = f(x_{n-1}, x_n, x_{n+1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Lösen Sie diese Gleichung dann nach x_{n+1} auf.
   b) Führen Sie die Hilfsgröße $y_n := x_n - \frac{3}{n}x_{n-1},\ n \in \mathbb{N}$ ein und lösen Sie damit die Differenzengleichung.
   c) Wie viele Personen befinden sich im Gleichgewicht in der Einkommensklasse R_5? Wie groß ist die Bevölkerung des betrachteten Landes?

2. **Komplexe Zahlen**
Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 5 + 2i$ und $z_2 = 5 - 2i$. Berechnen Sie:

   a) $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2$
   b) $z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$
   c) $\overline{z_2},\ |z_1|,\ \arg(z_1)$
   d) Geben Sie für z_1 die Polarkoordinatendarstellung an.

3. **Lineare Differenzengleichung 1.Ordnung**
   Lösen Sie die folgenden Differenzengleichungen 1.Ordnung

   a) $y_{n+1} = 9^n y_n$
   b) $y_{n+1} = y_n + n^2 + 2n + 1$

4. **Lineare Differenzengleichung 2.Ordnung**
   Gegeben sei die lineare inhomogene Differenzengleichung $y_{k+2} - y_{k+1} + \frac{1}{2} y_k = 1$.

   a) Zeigen Sie, dass

   $$y_k^{(1)} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{und} \quad y_k^{(2)} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{4}\right)$$

   Lösungen der zugehörigen homogenen Differenzengleichung sind und ein Fundamentalsystem bilden.
   b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslösung der obigen Differenzengleichung.
   c) Untersuchen Sie die Gleichgewichtslösung aus Teil b) auf Stabilität.

5. **Lineare Differenzengleichung 2.Ordnung**
   Gegeben sei die lineare inhomogene Differenzengleichung $y_{k+2} - 6y_{k+1} + 8y_k = 3$.

   a) Zeigen Sie, dass $y_k^{(1)} = 2^k$ und $y_k^{(2)} = 4^k$ Lösungen der zugehörigen homogenen Differenzengleichung sind.
   b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslösung der obigen Differenzengleichung.
   c) Untersuchen Sie die Gleichgewichtslösung aus Teil b) auf Stabilität.