

Übungen zur Mathematik 3 für Wirtschaftswissenschaftler

(Vorlesungshomepage: <http://www.mathematik.uni-ulm.de/sgm/mfww>)

1. Multiplikatorenmodell von Hicks (1950)

In diesem Modell werden folgende Annahmen hinsichtlich der Beziehung zwischen Einkommen Y , Konsum C und Investition I einer Volkswirtschaft getroffen:

- Das Einkommen in der Periode t sei gleich dem Konsum plus der Investition in der Periode t , d.h. $Y_t = C_t + I_t$, $t \in \mathbb{N}_0$.
- Der Konsum einer beliebigen Periode sei eine lineare Funktion der Einkommen der beiden vorangehenden Perioden, d.h. $C_t = b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + B$, $t = 2, 3, \dots$ wobei b_1, b_2 und B Konstanten sind.
- Die Investition erhöht sich in jeder Periode um einen festen Betrag h , d.h. $I_{t+1} = I_t + h$, $t \in \mathbb{N}_0$.

a) Stellen Sie die Differenzengleichung für das Volkseinkommen gemäß des obigen Modells auf.

Hinweis: Lösen Sie zunächst die Differenzengleichung $I_{t+1} = I_t + h$ mit der Anfangsbedingung $I_0 = I(0)$.

b) Lösen Sie die zugehörige autonome homogene Differenzengleichung für $b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{2}{9}$.

2. Linearfaktoren

Zerlegen Sie die gegebenen Polynome in Linearfaktoren.

In den Klammern ist jeweils eine Nullstellen des gegebenen Polynoms angegeben.

- a) $P_1(\lambda) = \lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda - 3$ ($\lambda_1 = -1 + i$)
- b) $P_2(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 10\lambda - 8$ ($\lambda_1 = -1$)
- c) $P_3(\lambda) = \lambda^4 - \sqrt{3}\lambda^3 - 8\lambda^2 + 9\sqrt{3}\lambda - 9$ ($\lambda_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) = e^{i\frac{\pi}{3}}$)
- d) $P_4(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2 - 2$

3. Lineare Differenzengleichung 2.Ordnung

Bestimmen Sie zu den folgenden Differenzengleichungen jeweils die allgemeine Lösung sowie die Lösung zu den gegebenen Anfangswerten.

- a) $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$
- b) $\Delta_1^2 y_n + 4\Delta_1 y_n + 5y_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$
- c) $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 12y_n = -7$, $n \in \mathbb{N}_0$, $y_0 = 0$, $y_1 = -1$

4. nicht autonome Differenzengleichung

Gegeben sei die Differenzengleichung

$$y_{k+2} - y_{k+1} + 8y_k = 3k^2 + 2 - 5 \cdot 3^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen autonomen homogenen Differenzengleichung.
- b) Für welche $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ ist $y^* = \beta_0 k^2 + \beta_1 k + \beta_2 + \beta_3 3^k$ eine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung?
- c) Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung.
- d) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung zu den Anfangswerten $y_0 = 1, y_1 = 2$.