K. Stadtmüller
M. Thalmaier

Wintersemester 2007/2008
28.11.2007
Blatt 5

Übungen zur Mathematik 3 für Wirtschaftswissenschaftler

(Vorlesungshomepage: http://www.mathematik.uni-ulm.de/sgm/mfww)

1. **Lagerungsmodell von Metzler**
Die in einem Unternehmen erzeugten Konsumgüter haben im Lagerungsmodell von Metzler einen zweifachen Verwendungszweck. Sie sind zum Verkauf und zur Aufrechterhaltung eines gewissen Lagerbestandes bestimmt.
Es bezeichne U_t die Anzahl der in der Periode t für den Verkauf und S_t die Anzahl der in der Periode t für der Lager erzeugten Konsumgütereinheiten.
Ferner werde angenommen, dass die Unternehmen in jeder Periode eine konstante, nicht induzierte Nettoinvestition durchführen, die mit I_0 bezeichnet wird.
Für das in der Periode t erzeugte Gesamteinkommen Y_t gilt dann

$$Y_t = U_t + S_t + I_0, \quad t = 2, 3, 4, \ldots$$

a) Die in einer Periode t zum Verkauf bestimmte Produktionsmenge U_t hängt nicht nur von den tatsächlichen Verkäufen in der Vorperiode, sondern auch von Zu- und Abnahme des Konsums ab:

$$U_t = C_t + \rho(C_{t-1} - C_{t-2}), \quad t = 2, 3, 4, \ldots,$$

wobei C_t die tatsächlichen Verkäufe in der Periode t und ρ der sogenannte Erwartungskoeffizient ist.
Weiter wird angenommn, dass die tatsächlichen Verkäufe einer beliebigen Periode t einen Bruchteil b, $0 < b < 1$, des Gesamteinkommens dieser Periode ausmachen:

$$C_t = b \cdot Y_t, \quad t = 1, 2, 3, \ldots$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$U_t = b(1+\rho)Y_{t-1} - b\rho Y_{t-2}, \quad t = 2, 3, 4 \ldots.$$

b) Die Anzahl der in der Periode t für das Lager erzeugten Konsumgüter S_t läßt sich darstellen als

$$S_t = k \cdot U_t - Q_{t-1}, \quad t = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei k der Lager-Akzelerator und Q_{t-1} der Lagerbestand am Ende der (t-1)-ten Periode ist. Dabei gilt für Q_{t-1}

$$Q_{t-1} = -bY_{t-1} + (k+1)b(1-\rho)Y_{t-2} - (k+1)b\rho Y_{t-3}.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$S_t = b\Big(k(1+\rho)+1\Big)Y_{t-1} - b\Big(k\rho + (k+1)\cdot(1+\rho)\Big)Y_{t-2} + (k+1)b\rho Y_{t-3}, \quad t = 3, 4, 5, \ldots.$$

c) Stellen Sie mit Hilfe von Teil a) und b) die Differenzengleichung für Y_t auf.

d) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslösung der Differenzengleichung.

e) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung für $\rho = 2,\ b = 0,4,\ k = 0,5$ und $I_0 = 250$.

2. **Lineare Differenzengleichung m-ter Ordnung**
Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung und in Teil a) die Lösung zu den gegebenen Anfangswerten für die folgenden Differenzengleichungen.

a) $y_{k+3} + y_{k+2} - 4y_{k+1} - 4y_k = 3, \quad y_0 = 2, y_1 = 7, y_2 = 8$
Hinweis: $\lambda_1 = 2$ ist eine Nullstelle des zugehörigen charakteristischen Polynoms.

b) $y_{k+4} - 2y_{k+3} - 2y_{k+2} + 6y_{k+1} + 5y_k = 0$
Hinweis: $\lambda_1 = 2 + i$ ist eine Nullstelle des zugehörigen charakteristischen Polynoms.

c) $y_{k+4} + 3y_{k+2} - 4y_k = 5$

3. **Verständnisfragen**

a) Wieviele linear unabhängige Lösungen kann eine Differenzengleichung der Ordnung m maximal haben?

b) Wieso reicht es aus, falls $P(\lambda) = 0$ gilt, im Ansatz für die allgemeine Lösung λ, aber nicht $\overline{\lambda}$ zu betrachten, obwohl doch auch $P(\overline{\lambda}) = 0$ gilt?

c) Es seien $y_k^{(1)}$ und $y_k^{(2)}$ allgemeine Lösungen einer inhomogenen Differenzengleichung. Ist jede Linearkombination $c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ wieder eine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung?