

Übungen zur Mathematik 3 für Wirtschaftswissenschaftler

(Vorlesungshomepage: <http://www.mathematik.uni-ulm.de/sgm/mfww>)

1. Christbaumzucht

In einem Forstbetrieb werden Christbäume gezüchtet. Der Bestand wird jährlich zu Beginn des Jahres festgestellt. Aus langjähriger Erfahrung lässt sich folgende Annahme für den Bestand B_i der Christbäume im Jahr i ($i = 0, 1, \dots$) treffen:

- Durch den Weihnachtsverkauf, aber auch durch Wildverbiss, Schädlingsübergriffe und Christbaumklau wird der Bestand jährlich um α Prozent reduziert.
- Am Ende des $(i - 1)$ -ten Jahres werden als Reaktion auf die Reduktion des Bestandes jeweils β Prozent des Bestandes des davorliegenden Jahres aufgeforstet.
- Zusätzlich wird jedes Jahr eine feste Anzahl b an Christbäumen gepflanzt.

a) Stellen Sie die Differenzengleichung für B_i auf.

b) Lösen Sie die Differenzengleichung für $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,8775$ und $b = 11550$.

2. Differenzengleichung 3-ter Ordnung

Schreiben Sie die folgende Differenzengleichung 3-ter Ordnung als System von Differenzengleichungen.

$$y_{k+3} - \frac{7}{2}y_{k+2} + 2y_{k+1} + 2y_k = 6.$$

3. Systeme von Differenzengleichungen

Gegeben sei ein System von homogenen Differenzengleichungen m -ter Ordnung

$$Y_{k+1} = A \cdot Y_k$$

mit $A = (a_{ik}) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und $Y_k = \left(y_k^{(1)}, \dots, y_k^{(m)} \right)^T$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

$Y_k = c \cdot A^k \cdot Y_0$ ist Lösung der Differenzengleichung, wobei $Y_0 = \left(y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(m)} \right)^T$ und $c \in \mathbb{C}$ ist.

4. System von Differenzengleichungen

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}y_{k+1}^{(1)} &= y_k^{(1)} + y_k^{(2)} \\ y_{k+1}^{(2)} &= y_k^{(2)} - y_k^{(1)}.\end{aligned}$$

- a) Schreiben Sie das System in der Form $Y_{k+1} = A \cdot Y_k$.
- b) Berechnen Sie A^k für $k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie dazu zunächst $A^1, A^2, \dots, A^{10}$.
- c) Geben Sie die Lösung der Systems an und berechnen Sie $y_9^{(1)}$ und $y_9^{(2)}$.