K. Stadtmüller
M. Thalmaier

Wintersemester 2007/2008
16.01.2008
Blatt 9

Übungen zur Mathematik 3 für Wirtschaftswissenschaftler

(Vorlesungshomepage: http://www.mathematik.uni-ulm.de/sgm/mfww)

1. **Nicht-Eindeutigkeit von Anfangswertproblemen bei Differentialgleichungen**
   Es wird die folgende Differentialgleichung aus der Vorlesung betrachtet:
   $$y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \quad (*)$$
   a) Zeigen Sie: $y(x) = \dfrac{(x+C)^2}{4}$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in (-C, \infty)$, ist eine Lösung der obigen Differentialgleichung $(*)$.
   b) Zeigen Sie: Falls $y(x)$ eine Lösung von $(*)$ ist, so ist auch $z(x) = -y(-x)$ eine Lösung von $(*)$.
   c) Zeigen Sie, dass für jedes $a \le 0$ die Funktionen $\Phi_a(x)$ Lösung von $(*)$ sind zur Anfangsbedingung $y(2) = 1$, wobei
   $$\Phi_a(x) = \begin{cases} x^2/4 & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0 & \text{falls} \quad a \le x \le 0 \\ -(x-a)^2/4 & \text{falls} \quad x < a. \end{cases}$$

2. **Angestrebter Kapitalstock**
   Es seien K^* die Höhe des von einer Volkswirtschaft angestrebten Kapitalstocks und $K(t)$ der im Zeitpunkt t tatsächlich erreichte Kapitalstock, wobei $K(t) \le K^*$.
   Durch Vornahme von Nettoinvestitionen wird beabsichtigt den bekanntet Wert $K^* = const.$ zu erreichen. Dabei werde unterstellt, dass die zeitliche Änderung $K'(t)$ des Kapitalstocks proportional zur Differenz $K^* - K(t)$ zwischen angestrebtem und vorhandenenem Kapitalstock sei (Proportionalitätsfaktor sei $a > 0$).
   a) Stellen Sie die Differentialgleichung für $K(t)$ auf und zeigen Sie, dass
      i) $K^* + Ce^{-at}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist,
      ii) $K^* + (K_0 - K)e^{-at}$ die Lösung der Differentialgleichung ist, wenn der Kapitalstock zum Zeitpunkte $t = 0$ den Wert K_0 besitzt.
   b) Ermitteln und skizzieren Sie die Lösung für $K^* = 100$, $K_0 = 10$ und $a = \frac{1}{2}$.
   c) Nach welcher Zeit hat sich die ursprüngliche Differenz $K^* - K_0$ um die Hälfte verringert?

3. **Separierbare Differentialgleichungen**
   Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme auf einem möglichst großen Intervall.
   a) $y'(x) \cdot 2y(x) = 4x^3 + 8x, \quad y(0) = 2$
   b) $y'(x) = -\sin(x) \cdot y(x), \quad y(0) = e$

4. **Elastizitätsfunktion**
   Ermitteln Sie die zutreffende Nachfragefunktion $x = x(p)$ für ein Gut, wenn die Information vorliegt, dass die Preiselastizität der Nachfrage die Gestalt $\epsilon_{x,p} = \dfrac{-p}{625 - p}$ habe, wobei gelten soll $x(50) = 115$.