

Übungen zur Mathematik 3 für Wirtschaftswissenschaftler

(Vorlesungshomepage: <http://www.mathematik.uni-ulm.de/sgm/mfww>)

1. Die Schuldenlast

In seinem Aufsatz 'The Burden of the Debt and the National Income' untersuchte E.D. Domar die Auswirkungen von Defiziten im Staatshaushalt auf die Staatsverschuldung.

Dabei nimmt er an, dass in jeder Periode die defizitären Ausgaben der Regierung einen konstanten Anteil α des Volkseinkommens ausmachen. Die staatliche Verschuldung wächst dann mit den defizitären Ausgaben und ihr Zuwachs steht zum Volkseinkommen im gleichen konstanten Verhältnis α , $\alpha > 0$.

Bezeichne $Y(t)$ das Volkseinkommen zum Zeitpunkt t und $D(t)$ die Staatsverschuldung zum Zeitpunkt t , so gilt bei stetiger Bewegung:

$$D'(t) = \alpha \cdot Y(t).$$

Die Ausgangswerte zum Zeitpunkt $t = 0$ seien gegeben durch:

$$Y(0) = Y_0 \quad \text{und} \quad D(0) = D_0.$$

Bestimmen Sie das Verhältnis der Staatsverschuldung zum Volkseinkommen $\frac{D(t)}{Y(t)}$ in den folgenden drei Fällen und treffen Sie eine Aussage über die Entwicklung dieses Verhältnisses.

- Das Volkseinkommen bleibt konstant, d.h. $Y(t) = a$.
- Das Volkseinkommen wächst linear, d.h. $Y(t) = a + bt$.
- Das Volkseinkommen wächst mit konstanter Wachstumsrate r , d.h. $Y'(t) = rY(t)$, $r > 0$.

2. Differentialgleichungen

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'(x) = -2xe^{y(x)}, \quad y(0) = 0$

b) $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 4x^2 + 2, \quad x > 0, \quad y(1) = 4$

c) $y'(x)(y(x))^3 = \frac{1}{4}e^x, \quad y(0) = 1$

d) $y'(x) + \frac{1}{2x} \cdot y(x) - (2x^2 + 1)(y(x))^{-1} = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = -2$

3. Röstkaffeepreis

Der Preis für Röstkaffee, der anfänglich 6 Euro pro kg betrage, verändere sich im Verlauf von t Wochen auf $p(t)$ Euro je kg.

Die Nachfrage $x(t)$ betrage: $x(t) = 8 - \frac{1}{6}p(t) + \frac{1}{2}p'(t)$.

Das Angebot $y(t)$ belaufe sich auf: $y(t) = \frac{1}{4}p(t) + 3 + \frac{15}{6}p'(t)$.

- a) Stellen Sie die Differentialgleichung für $p(t)$ auf und lösen Sie diese.
Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass die Nachfrage stets gleich dem Angebot ist.
- b) Wie teuer ist ein kg Röstkaffee nach 9 Wochen?
- c) Welchen Wert erreicht der Röstkaffeepreis langfristig?