K. Stadtmüller
M. Thalmaier

Wintersemester 2007/2008
30.01.2008
Blatt 11

Übungen zur Mathematik 3 für Wirtschaftswissenschaftler

(Vorlesungshomepage: http://www.mathematik.uni-ulm.de/sgm/mfww)

1. **Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**
   Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen und untersuchen Sie die Lösungen auf Stabilität.
   a) $y'' + 5y' + 6y = -12, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = -3$
   b) $y^{(4)} = 6 - 4y^{(3)} - 3y'', \quad y(0) = 70, \quad y'(0) = -48, \quad y''(0) = 38, \quad y^{(3)}(0) = 0$
   c) $4y^{(3)} + 16y'' + 20y' + 8y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -4, \; y''(0) = 8$
   d) $y^{(4)} - 16y = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 12, \; y^{(3)} = 16$

2. **Wachstumsmodell von Solow**
   Betrachten Sie das Wachstumsmodell von Solow aus der Vorlesung im speziellen Fall
   $$s = 0,4 \quad b = 2 \quad \alpha = 0,9$$
   was bedeutet, dass die zugrunde liegende Differentialgleichung also lautet:
   $$k' + 2k - 0,4k^{0,9} = 0.$$
   a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $k(t)$ der Differentialgleichung.
   b) Wie verhält sich $k(t)$ für $t \to \infty$?
   c) Ermitteln Sie für den Fall $A_0 = 200$ das Arbeitsangebot $A(t)$.
   d) Ermitteln Sie das Kapital $K(t)$, das sich nach langer Zeit einstellt.

3. **eine Theorieaufgabe**
   Es seien $f, g : T \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung
   $$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0,$$
   und W sei die zugehörige Wronskideterminante.
   Man kann zeigen, dass W die Differentialgleichung $\quad W' = -f(x)W \quad$ löst.
   Zeigen Sie, dass dann folgt:
   Wenn $W(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in I$ ist, dann gilt $W(x) = 0$ für alle $x \in I$.

4. **und noch eine Theorieaufgabe**
   Es seien $\lambda = \alpha + i\beta, \; \overline{\lambda} = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ zur Differentialgleichung
   $$y^{(m)}(x) + \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu y^{(\nu)}(x) = 0 \quad (*)$$
   Gemäß Lösungsansatz (vgl. Vorlesung) sind dann $e^{\lambda x}$ und $e^{\overline{\lambda} x}$ die komplexwertigen Nullstellen der Differentialgleichung $(*)$.
   Zeigen Sie, dass sich daraus die reellwertigen Lösungen $e^{\alpha}\cos(\beta x)$ und $e^{\alpha}\sin(\beta x)$ ergeben.

5. **aller guten Dinge sind drei Theorieaufgaben**
   Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 3.11, dass die Differentialgleichung $y' + ay = \gamma$ die allgemeine Lösung $y(x) = c \cdot e^{-ax} + \frac{\gamma}{a}, \; c \in \mathbb{R}$, besitzt.