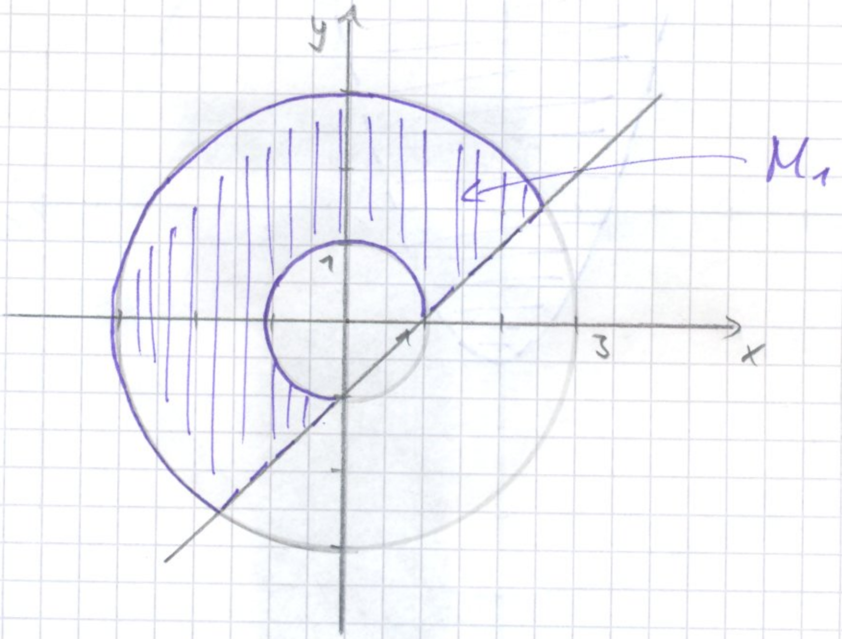
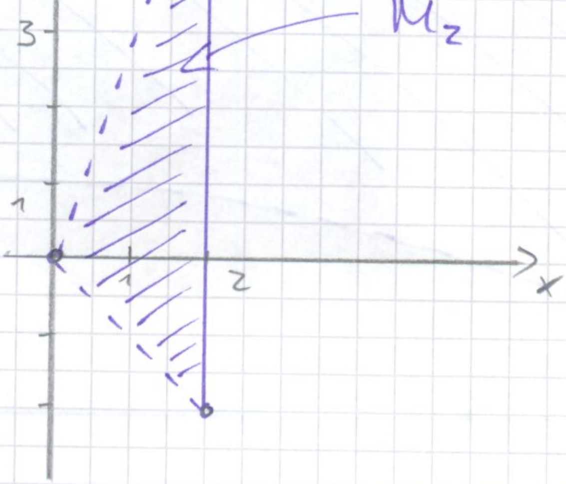
Lösungsvorschläge Probeklausur

Aufgabe 1:

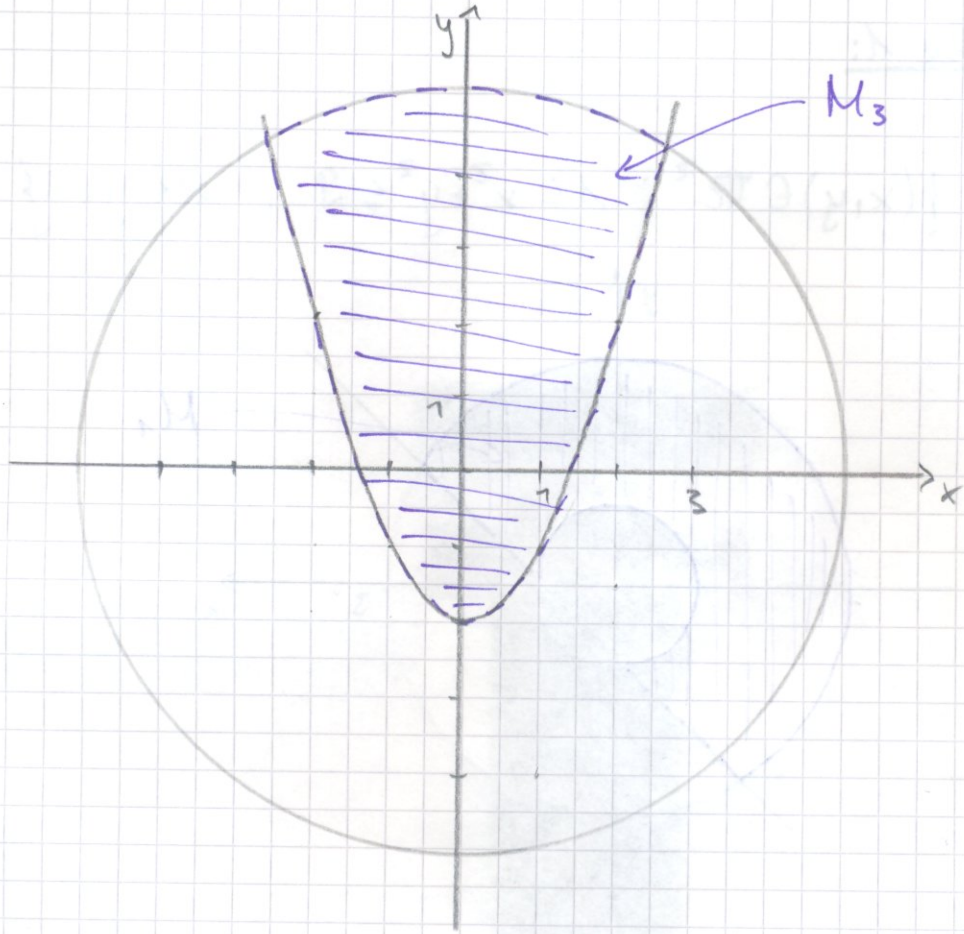
a) $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 9 \ ,\ x < y+1\}$



b) $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 \leq x \leq 2 \ ,\ -x < y < 3x\}$



c) $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 < y+2,\ x^2+y^2 < 25\}$



d) $M_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 < y < 7,\ \sqrt{x} < y\}$

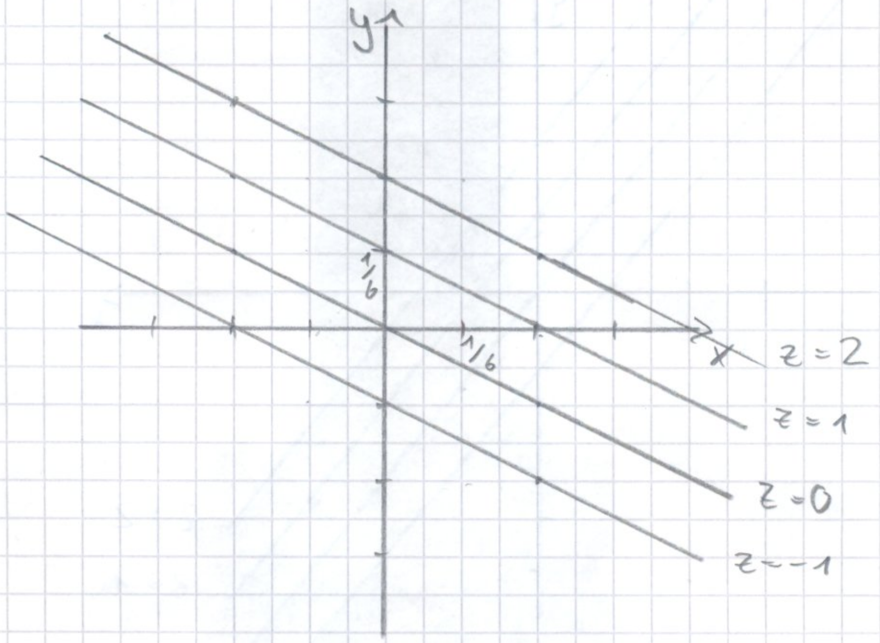
Aufgabe 2:

a) $z = 3x + 6y \;;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Für das Höhenliniendiagramm gilt: $z = \text{const.}$

- Sei $z = 0$: $\quad 0 = 3x + 6y \implies y = -\frac{1}{2}x$
- Sei $z = 1$: $\quad 1 = 3x + 6y \implies y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$
- Sei $z = -1$: $\quad -1 = 3x + 6y \implies y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}$
- Sei $z = 2$: $\quad 2 = 3x + 6y \implies y = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{6}$

Höhenliniendiagramm:

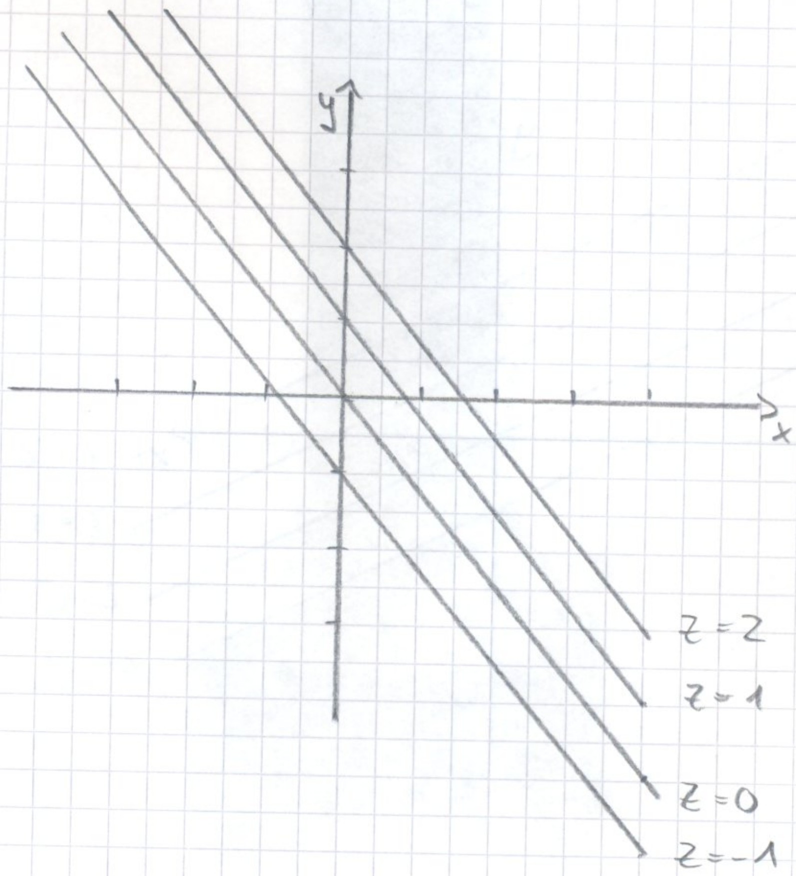


b) $z = 5x + 4y \; , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Für das Höhenliniendiagramm gilt: $z = \text{const}$

- Sei $z = 0$: $\quad 0 = 5x + 4y \implies y = -\frac{5}{4}x$
- Sei $z = 1$: $\quad 1 = 5x + 4y \implies y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$
- Sei $z = -1$: $\quad -1 = 5x + 4y \implies y = -\frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$
- Sei $z = 2$: $\quad 2 = 5x + 4y \implies y = -\frac{5}{4}x + \frac{2}{4}$

Höhenliniendiagramm:



Aufgabe 3:

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 + y^3$; $x_0 = 2,\ y_0 = 1$

$\Rightarrow z_0 = f(x_0, y_0) = 4 + 6 + 1 = 11$

Gleichung der Tangentialebene:

$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$f_x(x,y) = 2x + 3y^2 \qquad \Rightarrow f_x(2,1) = 4 + 3 = 7$

$f_y(x,y) = 6x + 3y^2 \qquad \Rightarrow f_y(2,1) = 12 + 3 = 15$

$\Rightarrow z - 11 = 7(x - 2) + 15(y - 1)$

$\Rightarrow z - 11 = 7x - 14 + 15y - 15$

$\Rightarrow \quad z = 7x + 15y - 18$ ist Glch d. Tangentialebene

b) $f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$; $x_0 = 1,\ y_0 = 2$

$\Rightarrow z_0 = f(x_0, y_0) = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

Gleichung der Tangentialebene:

$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$f_x(x,y) = y(-1)(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2xy}{(1+x^2)^2}$

$\Rightarrow f_x(1,2) = \frac{-4}{2^2} = \frac{-4}{4} = 1$

$f_y(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow f_y(1,2) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow z - 1 = 1\cdot(x-1) + \frac{1}{2}(y-2)$

$\Rightarrow z - 1 = x - 1 + \frac{1}{2}y - 1$

$\Rightarrow z = x + \frac{1}{2}y - 1$ ist Glch. d. Tangentialebene

c) $\Delta x = x - x_0 = x - 1 = 0{,}1 \quad ; \quad x_0 = 1$

$\Delta y = y - y_0 = y - 2 = -0{,}2 \quad ; \quad y_0 = 2$

- Änderung auf Tangentialebene:

$\Delta z = z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$= f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$

$\Rightarrow \Delta z = 1\cdot\Delta x + \frac{1}{2}\cdot\Delta y$

$\Delta z = 0{,}1 + \frac{1}{2}\cdot(-0{,}2) = 0{,}1 - 0{,}1 = 0$

- Änderung auf Bildfläche:

$z_0 = f(x_0,y_0) = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

$z_1 = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta x) = f(1{,}1\ ;\ 1{,}8) = \frac{1{,}8}{1+1{,}1^2} \approx 0{,}81$

$\Rightarrow \Delta z = z_1 - z_0 = 0{,}81 - 1 \approx -0{,}18$

Aufgabe 4:

a) $f(x,y,z) = e^{x-y}\cos(5z)$

$f_x(x,y,z) = e^{x-y}\cos(5z)$

$f_y(x,y,z) = -e^{x-y}\cos(5z)$

$f_z(x,y,z) = -5\cdot e^{x-y}\sin(5z)$

$f_{xx}(x,y,z) = e^{x-y}\cos(5z)$

$f_{xy}(x,y,z) = -e^{x-y}\cos(5z) = f_{yx}(x,y,z)$

$f_{xz}(x,y,z) = -5e^{x-y}\sin(5z) = f_{zx}(x,y,z)$

$f_{yy}(x,y,z) = e^{x-y}\cos(5z)$

$f_{yz}(x,y,z) = 5e^{x-y}\sin(5z) = f_{zy}(x,y,z)$

$f_{zz}(x,y,z) = -25e^{x-y}\cos(5z)$

b) $f(x,y) = \sin(2x+3y) + 4\cos(4x+3y) + 3xy^2 - 3$

$f_x(x,y) = 2\cos(2x+3y) - 16\sin(4x+3y) + 3y^2$

$f_y(x,y) = 3\cos(2x+3y) - 12\sin(4x+3y) + 6xy$

$f_{xx}(x,y) = -4\sin(2x+3y) - 64\cos(4x+3y)$

$f_{xy}(x,y) = -6\sin(2x+3y) - 48\cos(4x+3y) + 6y = f_{yx}(x,y)$

$f_{yy}(x,y) = -9\sin(2x+3y) - 36\cos(4x+3y) + 6x$

Aufgabe 5:

a) $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$

I) $f_x(x,y) = 8x^3 - 4x = 4x(2x^2 - 1) \stackrel{!}{=} 0$

II) $f_y(x,y) = 4y^3 - 4y = 4y(y^2 - 1) \stackrel{!}{=} 0$

$\stackrel{I)}{\Rightarrow}$ $x = 0$ oder $2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\stackrel{II)}{\Rightarrow}$ $y = 0$ oder $y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

$\Rightarrow$ mögliche Extremwerte:

$P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,1)$, $P_3 = (0,-1)$

$P_4 = (\sqrt{\frac{1}{2}}, 0)$, $P_5 = (\sqrt{\frac{1}{2}}, 1)$, $P_6 = (\sqrt{\frac{1}{2}}, -1)$

$P_7 = (-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0)$, $P_8 = (-\sqrt{\frac{1}{2}}, 1)$, $P_9 = (-\sqrt{\frac{1}{2}}, -1)$

$f_{xx}(x,y) = 24x^2 - 4$

$f_{xy}(x,y) = 0$

$f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4$

Eingesetzt in die Funktion

$\Delta = f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2$

ergibt sich:

- **Für $P_1 = (0,0)$:**

$\Delta = (-4) \cdot (-4) = 16 > 0$

$f_{xx}(0,0) = -4 < 0$

$\Rightarrow$ In $P_1 = (0,0)$ liegt ein rel. Maximum vor.

- **Für $P_2 = (0,1)$:**

$\Delta = (-4) \cdot 8 = -32 < 0$

$\Rightarrow$ In P_2 liegt ein Sattelpunkt vor.

- **Für $P_3 = (0,-1)$:**

$\Delta = (-4) \cdot 8 = -32 < 0$

$\Rightarrow$ In P_3 liegt ein Sattelpunkt vor.

- **Für $P_4 = (\sqrt{\frac{1}{2}}, 0)$:**

$\Delta = 8 \cdot (-4) = -32 < 0$

$\Rightarrow$ In P_4 liegt ein Sattelpunkt vor.

- **Für $P_5 = (\sqrt{\frac{1}{2}}, 1)$:**

$\Delta = 8 \cdot 8 = 64 > 0$

$f_{xx}(\sqrt{\frac{1}{2}}, 1) = 8 > 0$

$\Rightarrow$ In P_5 liegt ein rel. Minimum vor.

- **Für $P_6 = (\sqrt{\frac{1}{2}}, -1)$:**

$\Delta = 8 \cdot 8 = 64 > 0$

$f_{xx}(\sqrt{\frac{1}{2}}, -1) = 8 > 0$

$\Rightarrow$ In P_6 liegt ein rel. Minimum vor.

- <u>Für $P_7 = \left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, 0\right)$:</u>

$\Delta = 8 \cdot (-4) = -32 < 0$

$\Rightarrow$ In P_7 liegt ein Sattelpunkt vor.

- <u>Für $P_8 = \left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, 1\right)$:</u>

$\Delta = 8 \cdot 8 = 64 > 0$

$f_{xx}\left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, 1\right) = 8 > 0$

$\Rightarrow$ In P_8 liegt ein rel. Minimum vor.

- <u>Für $P_9 = \left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, -1\right)$:</u>

$\Delta = 8 \cdot 8 = 64 > 0$

$f_{xx}\left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, -1\right) = 8 > 0$

$\Rightarrow$ In P_9 liegt ein rel. Minimum vor.

b) $f(x,y) = x^2y - 6xy + x^2 - 6x + 8y^2$

I) $f_x(x,y) = 2xy - 6y + 2x - 6 \overset{!}{=} 0$

II) $f_y(x,y) = x^2 - 6x + 16y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y = -\dfrac{x^2 - 6x}{16}$ (*)

eingesetzt in I)

$\Rightarrow$ I') $2x \cdot \left(-\dfrac{x^2-6x}{16}\right) - 6 \cdot \left(-\dfrac{x^2-6x}{16}\right) + 2x - 6 = 0$

$-2x^3 + 12x^2 + 6x^2 - 36x + 32x - 96 = 0$

$-x^3 + 9x^2 - 2x - 48 = 0$

Für $x_1 = 3$ stimmt die Gleichung.

<u>Polynomdivision:</u>

$(-x^3 + 9x^2 - 2x - 48) : (x - 3) = -x^2 + 6x + 16$

$\underline{-(-x^3 + 3x^2)}$

$6x^2 - 2x$

$\underline{-(6x^2 - 18x)}$

$16x - 48$

$\underline{-(16x - 48)}$

0

$\Rightarrow -x^3 + 9x^2 - 2x - 48 = 0$

$(x-3) \cdot (-x^2 + 6x + 16) = 0$

$x_1 = 3$ oder $-x^2 + 6x + 16 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(-1) \cdot 16}}{-2} = \dfrac{-6 \pm 16}{-2}$

$$x_2 = \frac{-6+10}{-2} = -2$$

$$x_3 = \frac{-6-10}{-2} = 8$$

Rückwärts eingesetzt in (*) ergibt sich:

$$y_1 = -\frac{x_1^2 - 6x_1}{16} = -\frac{9-18}{16} = \frac{9}{16}$$

$$y_2 = -\frac{x_2^2 - 6x_2}{16} = -\frac{4+12}{16} = -1$$

$$y_3 = -\frac{x_3^2 - 6x_3}{16} = -\frac{64-48}{16} = -1$$

→ möglichen Extremwerte:

$P_1 = (3; \frac{9}{16})$, $P_2 = (-2; -1)$, $P_3 = (8; -1)$

$$f_{xx}(x,y) = 2y + 2$$

$$f_{xy}(x,y) = 2x - 6$$

$$f_{yy}(x,y) = 16$$

Eingesetzt in die Funktion

$$\Delta = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - \left(f_{xy}(x_0, y_0)\right)^2$$

ergibt sich:

- **Für $P_1 = (3, \frac{9}{16})$:**

$\Delta = \frac{17}{4} \cdot 16 - 0 = 68 > 0$

$f_{xx}(3, \frac{9}{16}) = 68 > 0$

$\Rightarrow$ In P_1 liegt ein rel. Minimum vor.

- **Für $P_2 = (-2, -1)$:**

$\Delta = 0 \cdot 16 - (-10)^2 = -100 < 0$

$\Rightarrow$ In P_2 liegt ein Sattelpunkt vor.

- **Für $P_3 = (8, -1)$:**

$\Delta = 0 \cdot 16 - 10^2 = -100 < 0$

$\Rightarrow$ In P_3 liegt ein Sattelpunkt vor.

Aufgabe 6:

a) $\iint_A 2x+y \, dA; \; A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1\le x\le 2, \; x<y<x^3\}$

$$\iint_A 2x+y \, dA = \int_1^2 \int_x^{x^3} (2x+y)\, dy \, dx = \int_1^2 \left[2xy+\frac{1}{2}y^2\right]_x^{x^3} dx =$$

$$= \int_1^2 2x^4+\frac{1}{2}x^6-2x^2-\frac{1}{2}x^2 \, dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2}x^6+2x^4-\frac{5}{4}x^2 \, dx = \left[\frac{1}{14}x^7+\frac{2}{5}x^5-\frac{5}{12}x^3\right]_1^2 =$$

$$= \frac{128}{14}+\frac{64}{5}-\frac{40}{12}-\frac{1}{14}-\frac{2}{5}+\frac{5}{12} = 18\,\frac{233}{420}$$

b) $\iint_B 3x^2+2y \, dB; \; B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0\le x\le 3, \; x-1<y<x+1\}$

$$\iint_B 3x^2+2y \, dB = \int_0^3 \int_{x-1}^{x+1} (3x^2+2y)\, dy \, dx =$$

$$= \int_0^3 \left[3x^2y+y^2\right]_{x-1}^{x+1} dx =$$

$$= \int_0^3 3x^2(x+1)+(x+1)^2-3x^2(x-1)-(x-1)^2 \, dx =$$

$$= \int_0^3 3x^3+3x^2+x^2+2x+1-3x^3+3x^2-x^2+2x-1 \, dx =$$

$$= \int_0^3 6x^2+4x \, dx = \left[2x^3+2x^2\right]_0^3 = 54+18 = 72$$

c) $\iint_C 6xy\, dC$; $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 \le x \le y^2+1,\ 0 \le y \le 1\}$

$$\iint_C 6xy\, dC = \int_0^1 \int_{y^2}^{y^2+1} 6xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left[3x^2y\right]_{y^2}^{y^2+1} dy =$$

$$= \int_0^1 3y(y^2+1)^2 - 3y(y^2)^2 \, dy =$$

$$= \int_0^1 3y(y^4+2y^2+1) - 3y^5 \, dy = \int_0^1 6y^3 + 3y \, dy =$$

$$= \left[\frac{6}{4}y^4 + \frac{3}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{6}{4} + \frac{3}{2} = 3$$

d) $\iint_D 6(x+2)(y-1)\, dD$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2-2 \le x \le y^2+2,\ 0 \le y \le 2\}$

$$\iint_D 6(x+2)(y-1)\, dD = \int_0^2 \int_{y^2-2}^{y^2+2} 6(x+2)(y-1) \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^2 6(y-1) \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{y^2-2}^{y^2+2} dy =$$

$$= \int_0^2 6(y-1)\left(\frac{1}{2}(y^2+2)^2 + 2(y^2+2) - \frac{1}{2}(y^2-2)^2 - 2(y^2-2)\right) dy =$$

$$= \int_0^2 6(y-1)\left(\frac{1}{2}y^4 + y^2 + 2 + 2y^2 + 4 - \frac{1}{2}y^4 + \right.$$