2. Nichtlineare Optimierung

2.1 Lokale Extrema mit und ohne Nebenbedingungen

Wir wiederholen zunächst Bekanntes aus Mathe für WiWis I und II

2.1.1 Optimierung bei einer Variablen

Geg: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ diff'bar (2-mal stetig), $x_0 \in (a,b)$

Notw. Bed.: lok. Mini an $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ (und es gilt $f''(x_0) \geq 0$)

Hinr. Bed.: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ lok. Mini an x_0.

f hat Maxi an $x_0 \Leftrightarrow -f$ hat Mini an x_0.

x_0 heißt stationärer Punkt, falls $f'(x_0) = 0$ gilt.

2.1.2 Optimierung bei mehreren Variablen (ohne NB)

Geg. $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, f diff'bar (2-mal stetig), $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in D$

$\boxed{n=2}$ Notw. Bed.: lok. Mini an $x^0 \Rightarrow \operatorname{grad} f(x^0) = (f_{x_1}(x^0), f_{x_2}(x^0)) = (0,0)$

(und es gilt $\Delta_f(x^0) = f_{x_1x_1} \cdot f_{x_2x_2} - f_{x_1x_2}^2 \big|_{x^0} \geq 0$ und $f_{x_1x_1}(x^0) \geq 0$)

Hinr. Bed.: a) $\operatorname{grad} f(x^0) = 0$ und $\Delta_f(x^0) > 0$ und $f_{x_1x_1}(x^0) > 0$
$\Rightarrow$ lokales Mini an x^0

b) $\operatorname{grad} f(x^0) = 0$ und $\Delta_f(x_1,x_2) = f_{x_1x_1} \cdot f_{x_2x_2} - f_{x_1x_2}^2 \big|_{(x,y)} \geq 0$ und
$f_{x_1x_1}(x_1,x_2) > 0 \quad \forall (x_1,x_2) \in D$
d.h. f ist (streng) konvex in D
$\Rightarrow$ globales Mini an x^0

$\boxed{n \in \mathbb{N}}$ Hesse'sche Matrix

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}(x) \quad \text{mit Untermatrizen}$$

$$H_{f,k}(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_kx_1} & \cdots & f_{x_kx_k} \end{pmatrix}(x) \quad (k = 1, \dots, n)$$

Notw. Bed.: lok. Mini an $x^0 \Rightarrow \operatorname{grad} f(x^0) = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})\big|_{x^0} = 0$
(und es gilt $\det H_{f,k}(x^0) \geq 0 \ \forall k = 1, \dots, n$)