Hinr. Bed. a) $\operatorname{grad} f(x^0) = 0$ u. $\det H_{f,k}(x^0) > 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow$ lokales Mini an x^0

b) $\operatorname{grad} f(x^0) = 0$ u. $\det H_{f,k}(x) > 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n$ und $\forall x \in D$

d.h. f ist (streng) konvex in D

$\Rightarrow$ globales Mini an x^0

$x^0 \in D$ heißt stationärer Punkt, falls $\operatorname{grad} f(x^0) = 0$ gilt.

Anwendungen

① Methode der kleinsten Quadrate am Beisp. der Regressionsgeraden

Zu vorgeg. verschiedenen Zahlen $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$ und Zahlen $y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}$ ist

$$Q := \sum_{\nu=1}^{N} (f(x_\nu) - y_\nu)^2 \quad \text{mit } f(x) = ax + b \text{ minimal für}$$

$$a_0 = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2} \quad \text{und} \quad b_0 = \frac{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)\cdot\bar{y} - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)\bar{x}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2}$$

$$\text{wobei } \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

Herleitung:

$$(*) \quad \frac{\partial Q}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{N} x_i(ax_i + b - y_i) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial b} = 2\cdot\sum_{i=1}^{N}(ax_i + b - y_i) \stackrel{!}{=} 0$$

$$(**) \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{N} x_i^2, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial b^2} = 2N, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial b\,\partial a} = 2\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Aus $\frac{\partial Q}{\partial b} = 0$ folgt $a_0\bar{x} + b_0 = \bar{y}$ und $a_0\left(\frac{1}{N}\sum x_i^2\right) + b_0\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i$

woraus sich a_0 und b_0 in der oben angeg. Form ergeben.

Wegen $\Delta_Q(a,b) = \frac{\partial^2 Q}{\partial a^2}\cdot\frac{\partial^2 Q}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial b\,\partial a}\right)^2\Big|_{(a,b)} = 4N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 > 0$

und $\frac{\partial^2 Q}{\partial b^2} = 2N > 0$ ist Q konvex, so dass an (a_0, b_0) ein Minimum von Q vorliegt.

a ist die Steigung der Regressionsgeraden, der sog. „Regressionskoeffizient".

② Gewinnmaximierung bei räuml. Preisdifferenzierung (vgl. Tietze):

Ein monopolistischer Anbieter hat mehrere räumlich getrennte Teilmärkte mit eigenen (unabhängigen) Preisabsatzfunktionen

z.B. $\quad p_1 = 60 - x_1 \qquad p_2 = 40 - \frac{1}{3}x_2$.